Teil IV
Diernstag, 1.3.2005

Wellen

Was sind Wellen? Hier werden nur **eindimensionale** Wellen betrachtet. -
Eine Bewegungsrichtung
Wichtige Klassifikation der Wellen :

- Transversale und longitudinale Wellen Transversal nur im Festkörper möglich!
- Vorkommen: Sehr häufig. Insbesondere Schall, Licht, allgemeiner elektromagnetische Wellen, Wasserwellen - Oberfläche, Erdbebenwellen (zu Schall) ...(Zeigt enorme Verbreitung des Phänomens).

★ **Wie wird man einen derartigen Wellenvorgang idealisiert mathematisch beschreiben??**
Durch Angabe der**Auslenkung zur Zeit t am Orte x.** Auslenkung in die jeweils relevante Richtung (longitudinal - transversal) Mathematisch:

$$\boxed{A(t,x)=....}$$

Oder allgemeiner: : **A(t,x) ist ein Größenmaß für die Abweichung vom Gleichgewichtszustand**
(am Orte x zur Zeit t)
.
Eine solche *Amplitudenfunktion ist* ein spezielles Skalarfeld
Auftragen als (dreidimensionales) x-t-A- Diagramm

Zugehörige Vermessungsmethoden:
⧫ Film
⧫ t fest - Raumkonfiguration "Photo" - Momentaufnahme
⧫ x fest.- Zeitfunktion Amplitude am Orte x !

Numerische **Beschreibungsgrößen** eines Wellenvorgangs

Amplitude	MaximaleAbweichung v. Gleichgewichtszustand.	A_0		
Periode T	"Wiederkehrzeit" (Ort fest)	Kreisfrequenz ω Frequenz f	$\omega T = 2\pi \quad \omega = 2\pi f$	
Wellenlänge λ	"Wiederkehrentfernung" (Zeit fest)	Wellenzahl k	$k\lambda = 2\pi$	
Phase	Mathematisches Argument (Sinus)		$\varphi = kx \pm \omega t$ $=2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)$	
Phasengeschw.	Reine Welle (Geschw. Nullstelle)	$c_{Phase} = \frac{\omega}{k}$ $c=f\lambda$	ω und k nicht unabh.	
Gruppengeschw.	Überlagerte Wellen /Wellenberg	$c_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk}$		

☐ Sei A(t,x)=$\frac{7}{3}$ sin$(4x-3t+2)$ Welche Beschreibungsgrößen lassen sich hieraus ablesen oder unmittelbar berechnen? Wo verläuft das Maximum der Amplitude in der Raum-Zeit-Ebene, das für t=0 bei $x_M = \frac{\pi-2}{4} =$ 0.9 liegt?

▼$A_0 = \frac{7}{3}$ Maximale Abweichung / $\omega = 3$ und k=4. Das Maximum liegt bei$\underbrace{4x-3t+2}_{Phase}$=$\frac{\pi}{2}$.

Das gibt aufgelöst: t=$\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}(2-\frac{\pi}{2})$. t ist hier ja die vertikale Achse!▲

★ "Bewegungsgleichung" für einen Wellenvorgang ist die **Wellengleichung**

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(\mathrm{t,x})=\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(\mathrm{t,x})}$$

c wie üblich "Materialkonstante"

Physikalische Wellenbewgungen sind Lösungen dieser Gleichung!

Das ist eine "Partielle Differentialgleichung" für die gesuchte Größe A

.

Sie bestimmt die raum-zeitliche Entwicklung der Welle
so wie es die Newtonsche Bewegungsgleichung mit
der Bahn des Massenpunktes tat.
Sie Entspricht der Oszillatorgleichung

★Was sind partielle Ableitungen? Alle Variable bis auf eine fixieren. Hiert
⧫ x fixieren t ändern. Ergibt die zeitliche Änderungsrate von A (am Ort x)
⧫ Oder t fixieren, x ändern. Ergibt die örtliche Änderungsrate von A zur Zeit t

Zweite Ableitungen: Analog fortsetzen.
☐ Sei $\boxed{a(x,t) = (x-3t)^2}$. Berechnen Sie dei Werte der folgenden Wertetabelle.

$$\begin{array}{ccc} a(2,1) & a(2.1,1) & a(2.2,1) \\ a(2,1.1) & a(2.1,1.1) & a(2.2,1.1) \\ a(2,1.2) & a(2.1,1.2) & a(2.2,1.2) \end{array}$$

Bestimmen Sie damit näherungsweise $\frac{\partial a}{\partial t}(2,1)$ und $\frac{\partial a}{\partial x}(2,1)$ sowie $\frac{\partial a}{\partial t}(2,1)$ und $\frac{\partial a}{\partial x}(2,1)$ als mittlere Änderungsraten. Vergleichen sie mit den exakten (per aBleitung gewonnenen Raten.

▼ Die Tabelle gibt:

$$\begin{array}{ccc} 1.0 & 0.81 & 0.64 \\ 1.69 & 1.44 & 1.21 \\ 2.56 & 2.25 & 1.96 \end{array}$$

$\frac{\partial a}{\partial t}(2,1)$ ist näherungsweise $\frac{a(2,1.1)-a(2,1)}{0.1} = \frac{0.69}{.1} = 6.9$. Die Ableitung ist $\frac{\partial a}{\partial t}(x,t) = -6(x-3t)$. Also $\frac{\partial a}{\partial t}(2,1) = +6$. Das ist die exakte Rate. Der Rest analog. ▲

☐ Was ergibt die Phase $\varphi = kx - \omega t$ beim partiellen Ableiten nach t oder x? Genauere Konstruktion dieser Größe

▼ Jedes Ableiten nach t gibt ein (-ω), jedes Ableiten nach x einen Faktor k.▲

☐ Einschub: Gradientenberechnung i in Koordinaten (Wie war er geometrisch defineirt?) Beispiel s$(\vec{x}) = \vec{a}\cdot\vec{x}$.

Zurück zur Wellengleichung.
Ein besonders wichtiger spezieller "fundamentaler" **Lösungtyp der Gleichung** ist

$$\boxed{\mathrm{A(t,x)=A_0}\sin(\omega t - kx)}$$

Einheiten $[c] = \frac{m}{s}$ $\quad [\omega] = s^{-1}$ $\quad [k] = m^{-1}$

Es muss gelten $\boxed{c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}}$ S.Übersicht Also ω und k sind nicht unabhängig!
Die Geschwindigkeit ist materialbestimmt:

Veranschaulichung: Nach rechts mit der Geschw. c fortschreitende Welle!
☐ Wieso ist die Wellengleichung erfüllt? Nachprüfen
☐ Das folgende A ist Lösung der Wellengleichung

$$A(t,x) = A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

Dabei sind A_1 und A_2 beliebig. Was aber muss für die 4 Zahlen ω_1, k_1, ω_2 und k_2 an einschränkungen gelten?

Einschub: **Schallwellen in Luft**
⧫ Was muss/ sollte man wissen? $\boxed{c_{Schall} = 330m/s}$ (in Luft)
⧫ Was benötigt man zusätzlich? In der Regel wird die Frequenz angegeben! Dann kann man die zugehörige Wellenlänge bestimmen (und sich eine Vorstellung über deren Größe bilden!)
Einige orientierende Beispiele:

- f=1000/s $\quad \omega = 2\pi \cdot 1000/s = 6.28 \cdot 10^3/s \qquad \lambda_{1000} = \frac{c}{f} = \frac{330m/s}{1000/s} = \frac{1}{3}m$
- f=33/s $\quad \lambda_{33} = 10m$
- f=35$\cdot 10^3/s \qquad \lambda = \frac{3.3 \cdot 10^2}{3.5 \cdot 10^4} = 10^{-2}m$

☐ Rechenbesipiel:

Lichtwellen (Elektromagnetisches Spektrum!)

$$c_{\mathrm{Vakuum}} = 2.99792458 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

☐ Rechenbeispiel: $\lambda = 700nm$. Frequenz=???

★★★★★

Aber weder beim Schall noch beim Licht treffen wir üblicherweise derartig periodische Vorgänge an, wie sie durch unsere Idealwellen A(x,t)=$A_0 \sin(\omega t$-kx) beschrieben werden.

Rettung: Das sind nur Bausteine für viel komplexere Wellenvorgänge.
Das kennen wir bereits unter dem Stichwort "Superposition":
$\Diamond$ Superposition: Der von Massen oder Ladungen erzeugten Felder.
$\Diamond$ Der Lösungen der Oszillatorgleichung (Fourier....)
Und jetzt:
$\Diamond$ Erneut **Superposition der Lösungen der Wellengleichung**!

$$A(t,x) = A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

ist auch Lösung der Wellengleichung sofern nur $\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = c$ gilt.

Was bekommt man durch derartige Überlagerung heraus? (Mathematische Analyse!)
$\blacklozenge$ Konstruktion von Wellenbergen ("Teilchen")
$\blacklozenge$ Unterscheidung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (Wellenberg.)
$\blacklozenge$ Bei Dispersion: Auseinanderlaufen der Wellenberge

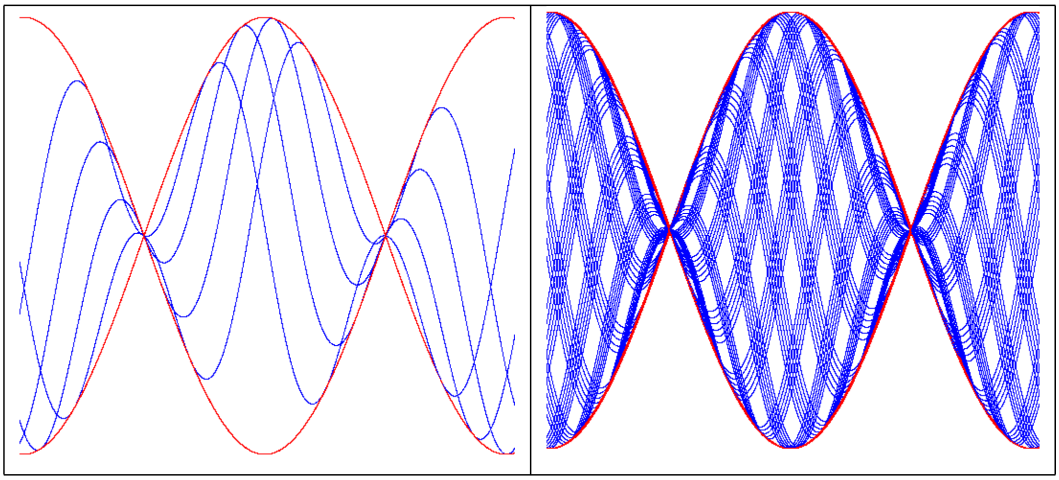
---

Zur rechnerischen Herleitung üblicherweise benutztes Beispiel:
Stets gilt: $\boxed{\text{sinx+siny=2sin}\frac{x+y}{2}\cos(\frac{x-y}{2})}$ Folgt aus Additionstheorem
Jetzt wähle x und y geeignet, so dass folgt
sinx+siny=2sin$\frac{x+y}{2}\sin(\frac{x-y}{2})$=2sin$(\omega t)\cos(kx)$
Das ergibt den Spezialfall der *Stehenden Welle*

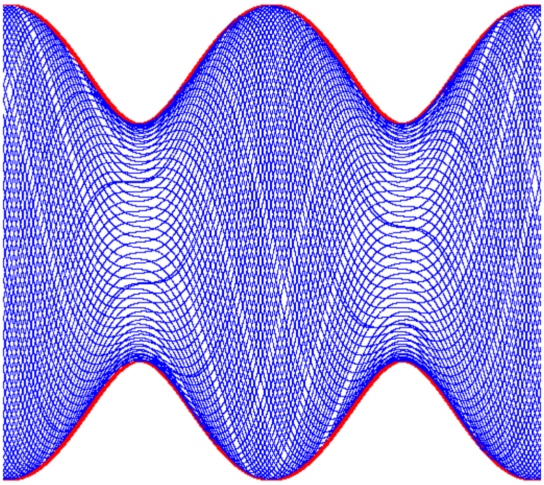
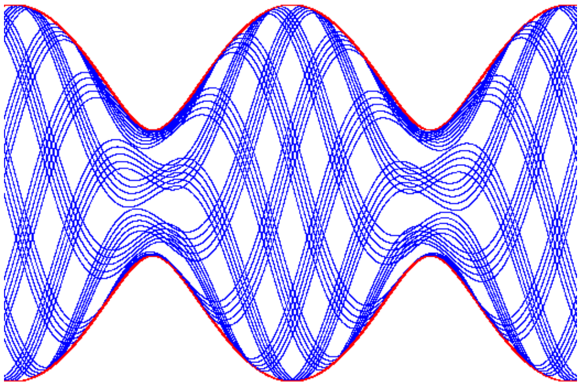
$$\begin{aligned} & A_0\,(\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)) \\ = \; & 2A_0\,(....) \end{aligned}$$

Allgemein erhält man folgendes Resultat: Man hat eine große Kreisfrequenz und eine kleine Kreisfrequenz. Die große ("schnelle" Schwingung) bleibt immer unter der einhüllenden "modulierenden" Kurve der kleinen. In den folgenden Bildern ist der Bildschirm mehrere Perioden der kleinen Kreisfrequenz breit und die Funktion selbst wird mit dieser Periode zyklisch wiederholt (blau). Die per Kurvendiskussion berechnete Einhüllende ist rot.

Die betrachtete Funktion ist f(t)=asin(2.82...t)+bsin(t). Bei den Bildern sind a und b unterschiedlich groß gewählt. Bei den ersten beiden ist a=b=1. Links sind zunächst 4 Durchgänge der Funktion aufgrtragen rechts viele.



Jetzt haben wir einmal a=0.5 und b=1.5 und dann a=0.5 und b=1.

Verallgemeinerung auf räumliche, nicht "eindimensionale" Wellenvorgänge.
Ebene Wellenfront im Raum. Die Phase ist im räumlichen Fall gleich

$$\boxed{\varphi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t}$$

zu wählen. Rest bleibt weitgehend.

Unterscheide: "**Gangunterschied**" das ist die geometrische Länge der Strecke
und "Phasendifferenz oder **Phasenunterschied**", also die entsprechende Phasenwinkeldifferenz $\Delta\varphi$ in der Sinusfunktion. Der Zusammenhang wird gegeben durch

$$\boxed{\Delta\varphi = k \cdot \Delta g}$$

Jeweils aufpassen, mit welchem Unterschied man arbeitet!
Sei etwa $\Delta g = 10^{-3}m$. Und $\lambda = 500 \cdot 10^{-9}m = 5 \cdot 10^{-7}m$. Dann ist $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5 \cdot 10^{-7}m} \approx 1.3 \cdot 10^{7}m^{-1}$. Und damit wird $\Delta g \cdot k = 1.3 \cdot 10^{4}$. Kurz es fallen $\frac{13 \text{ Tausend}}{2\pi}$ Sinusperioden in den Bereich Δg. Oder direkt in Wellenlängen $\frac{\Delta g}{\lambda} = \frac{10^{-3}m}{5 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 10^{-3}$. Soviel Wellenlängen passen in Δg hinein!
