Die Newtonsche Bewegungsgleichung

Merkform: $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$

D.h. mit korrekten Argumenten $\boxed{m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))}$

D.h. wieder: Ein Massenpunkt mit Masse m bewegt sich unter dem Einfluss eines Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{x})$ auf einer physikalischen Bahn $\vec{r}(t)$. Die zugehörige Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ folgt durch Ableiten und $\vec{a}(t)$ ist die durch erneute Ableitung folgende Beschleunigung.

Dann gilt immer (für alle Zeiten) $\boxed{m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))}$.

★ Zwei Anwendungsschemata:

♦Newton 1: Die Bahnkurve sei bekannt / gegeben. Dann folgt die zugehörige Kraft u**nd die muss sich als geeigneter Einfluss auf den Körper physikalisch inhaltlich erklären lassen!** (**Beispiel**: Kreisbewegung und (entgegengesetzte) Zentrifugalkraft, Begriff der Zwangskraft, Fragen □(2.13) und □(2.18).)

♦ Newton 2: Die Kraft sei (über physikalische Argumente) bekannt. Also $\vec{F}(\vec{x})$ verfügbar. **Dann erhält man die physikalisch möglichen Bahnkurven des Systems durch Lösen der entstehenden Differentialgleichung** für $\vec{r}(t)$ (numerisch oder explizit, □ (2.14) und (2.21)). Dies "Newton 2" ist der wichtige Fall. Verdeutlichung $\boxed{m\,\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \qquad \vec{r} \text{ gesucht.}}$

♦ Gibt man zusätzlich Anfangswerte (hier Ort und Geschw. zu einem Zeitpunkt) vor, dann liegt die Bahn vollständig fest. (Das ist **das** fundamentale Resultat, das dem mechanistischen Naturbild zu Grunde liegt! Beispielaufgaben für Anfangswerte in □(2.10) und □(2.18).)

♦ Beispiele: Ein- zwei- und Dreikörpersysteme in Computersimalation!

Die Kraft

Die auf den Massenpunkt zur Zeit t wirkende Kraft - das ist die benötigte Größe - kann oder muss je nach Situation mathematisch unterschiedlich festgelegt werden. Der einfachste Fall ist die Festlegung durch ein "Kraftfeld". D.h. an jedem Punkt $\vec{x}$ des (geometrischen) Raumes herrscht eine Kraft, die mit $\vec{F}(\vec{x})$ bezeichnet werden soll. Man hat eine Gleichung $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = ...:}$. Links die Bezeichnung und rechts ein Rechenausdruck, der es erlaubt, bei Eingabe von $\vec{x}$ diese Kraft auszurechnen.

♦ Veranschaulichung: Maus fixiert den Ort: Geom. Pfeil vom Ursprung zum Mausort ergibt den Ortsvektor $\vec{x}$. Der dort herrschende Kraftvektor $\vec{F}(\vec{x})$ wird an den Endpunkt angeheftet.

♦ Hauptbeispiele : Siehe □ (2.19)

♦ In die Newtonsche Gleichung ist $\vec{F}(\vec{r}(t))$ einzusetzen. Denn zur Zeit t befindet sich der Punkt am Orte $\vec{r}(t)$ und dort herrscht die angegbene Kraft.

♦ Einige mögliche Verallgemeinerungen werden durch die Schreibweise $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ angedeutet: Kräfte, die eventuell auch von der Zeit und/oder der Geschwindigkeit abhängen! Besipiele wurden besprochen. Die Newtonsche Gleichung verlangt dann $\boxed{m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)}$

♦ Mehrkörpersysteme: Wie sieht dann die Newtonsche Gleichung aus? (Für jeden Massenpunkt eine Gleichung der alten Art, zusammen ein Gleichungssystem). Diskussion der dann jeweils wirksamen Kräfte!

♦ Die Kraftdarstellung kann vom geometrischen Typ "kürzester Weg" sein oder vom Koordinatentyp ("achsenparalleler Weg"). Diese Drstellung kennzeichnen wir in der Regel durch die Bezeichnung $\vec{F}^K(x, y, z)$. Etwa Frage □ (2.16).

Das **Lösungsschema**

Dieses geht aus von 2 Vektorgleichungen, d.h. 6 Komponentengleichungen. Es sind die Gleichungen für die Änderungen von $\vec{r}$ und $\vec{v}$. Wir geben dies Gleichungen in mehreren Formen an, die sich leicht ineinander umrechnen lassen:

$\Delta\vec{r} = \vec{v}(t)\Delta t$	Ortsänderung
$\Delta\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}(t), t)\Delta t$	Geschwindigkeitsänderung

Ausgeschreiben und anders erläutert:

$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r} = \vec{v}(t) \cdot \Delta t$	Definition $\vec{v}$
$\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) = \Delta\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}(t), t)\Delta t$	Newton.

Und schließlich die Form, die man zur iterativen näherungsweisen Berechnung mit Hilfe des Computers verwenden kann:

$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t) \cdot \Delta t$	Rechte Seite berechnebar mit Information,
$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}(t), t)\Delta t$	zum Zeitpunkt t mit Ort $\vec{r}(t)$ und Geschw. $\vec{v}(t)$

Die (mit den rechten Seiten berechneten) linken Seiten liefern dann gerade die für den nächsten Zeitpunkt t+Δt benötigte Information über die Bahn.

In seltenen Fällen kann man die Lösung als Formel hinschreiben. Aber mit dem Computer ist das leicht. Vgl. □ (2.14).

Viele Felder werden selbst durch feste oder bewegliche Massenpunkte oder Punktladungen erzeugt. Diese Punkte nennt man dann $\boxed{\text{"Quelle"}}$. Zunächst setzt man diesen Quellpunkt in den Ursprung, weil dann ein günstiger zugehöriger Rechenausdruck (für das erzeugte Feld) entsteht. Typischerweise ist das für das Coulombfeld der Fall. Aber das kann auch für andere Felder so sein.

Sei $\vec{F}_0(\vec{x})$ das Feld, das entsteht, wenn die Quelle im Ursprung sitzt.

Wie sieht dann das Feld aus, das entsteht, wenn die Quelle an einem Ort mit Ortsvektor $\vec{a}$ sitzt? Wir nennen dies Feld $\vec{F}_{\vec{a}}$ und man überlegt sich geometrisch (Parallelverschiebung):

$\boxed{\vec{F}_{\vec{a}}(\vec{x})=\vec{F}(\vec{x}\text{-}\vec{a})}$ $\quad \vec{x}$ im Ausdruck für das gegeb. Feld durch $\vec{x} - \vec{a}$ ersetzen!

Wie sieht das resultierende Feld aus, wenn eine Quelle c facher Stärke in $\vec{a}$ und eine zweite d-facher Stärke in $\vec{b}$ sitzt? ("Superposition")

$$\boxed{\vec{F}_{result}(\vec{x})=c_1\vec{F}_0(\vec{x}\text{-}\vec{a})+c_2\vec{F}_0(\vec{x}\text{-}\vec{b})}$$

Damit kann man bereits sehr allgemeine und ungenheuer komplexe Feldkonfigurationen aufbauen!

Nochmals Newton zu insgesamt: Beachten Sie, dass beide Seiten der Gleichung m$\vec{a} = \vec{F}$ nach ausreichender Idealisierung unabhängig operativ zugänglich sind:

- Die rechte Seite: Die wirkende Kraft wird beispielsweise bestimmt, indem man ihren Einfluss kompensiert. Und zwar durch einen anderen Einfluss, den man durch einen Kraftvektor beschreiben kann. So kann man auch die Krafteinheit festlegen (1 Newton=1kg$\frac{m}{s^2}$)
- Die linke Seite: Hier bestimmt man zuerst den Ort für alle oder möglichst viele Zeiten. Ideal $\vec{r}(t) =$ ....die volle *Bahnkurve.* Daraus erhält man durch Ableiten die momentane Geschwindigkeit und daraus durch erneutes Ableiten die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$. Den Massenfaktor m kann man schließlich über das Wirkenlassen einer geeigneten Einheitskraft festlegen.

Zwischen all diesen Größen liefert die Newtonsche Gleichung eine zu erfüllende Beziehung, Gleichung. Diese Gleichung hat einen enormen Gültigkeitsbereich und ebenso ganz enorme Konsequenzen!

Erhaltungssätze (**Energiesatz**)

Leider ist Newton 2 vielfach mühsam. Man sucht nach Wegen, um leichter zu wichtiger Information über die zugehörigen physikalischen Bewegungen zu kommen. Wir führen ein wichtiges und nützliches Verfahren ein, dass derartiges leistet.

Wir geben die Schritte der Argumentation zusammenfassend an. Dabei sind eine Reihe ergänzender Überlegungen nötig, die wir auslagern. Ebenso eine Reihe von Zwischenschritten Es folgen die illustrierenden Beispiele!

⧫ Starte mit der Newtonschen Gleichung $\boxed{m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))}$

⧫ Multipliziere beide Seiten skalar mit der momentanen Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$. (Die Idee, die das ganze in Gang setzt!)

⧫ $\vec{F}$ sei konservativ, d.h.$\vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})$ Eine zusätzliche erforderliche Annahme an das Kraftfeld. Dazu Nebenbetrachtung (→ "Gradient eines Skalarfeldes")! Man sagt auch: "Für $\vec{F}$ gibt es ein Potential U($\vec{x}$)!" (Liste mit den Potentialen drei wichtigen Kraftfeldtypen →(...))

⧫ Dann folgt (mathematisch) : Die (für jedes t berechenbare) Größe $\boxed{E=\frac{m}{2}\vec{v}^2(t) + U(\vec{r}(t))}$ ist zeitlich konstant für jede **physikalische** Bewegung. ("physikalische und geführte Bewegungen" → (...)).

⧫ Schema (wichtiges Hilfsmittel): Wie wendet man den Satz typischerweise an ? $\boxed{\text{"E}(t_1) = E(t_2)\text{"}}$ (Merkform)

◊ **Dazu** drei illustrierende gerechnete Beispiele.

⧫ Ergänzend: →**Arbeit entlang eines Weges (geführte Bewegung) gegen das Kraftfeld**.

◊ Interpretation und Berechnung

◊ Schema zur Berechnung von Arbeitsintegralen!

◊ Arbeit im konservativen Kraftfeld

Die ersten beiden Schritte ausführlicher:

$m\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=\vec{F}(\vec{r}(t))$	Gl. sei erfüllt. Also physik. Bewegung! Gültige. Gl. skalar mit $\vec{v}(t)$ multiplizieren!
$m\vec{v}(t)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = (\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))$	Nur noch skalare Gleichung!
$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)) = (\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))....$	Produktregel $\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)$ Änderungsrate kinetische. Energie
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[-u(t)\right]$	Versuche auch, die rechte Seite als negative Änderungsrate einer Größe -u(t) zu schreiben
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t) + u(t)\right] = 0$	Wir wären am Ziel.

Jetzt sollte $\vec{F}$ konservativ sein. D.h. $\vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})$ wobei U ein zugehöriges Potentialfeld ist. Zur Verdeutlichung die Liste mit den drei Hauptfeldern und zugehörigen Potentialen:

$$\begin{array}{ll} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{g} & \mathrm{U}(\vec{x}) = -(\vec{g}\cdot\vec{x}) \\ \vec{F}_{Coul}(\vec{x}) = c\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} & \mathrm{U}_{Coul}(\vec{x}) = \frac{c}{r} \\ \vec{F}_{Osz}(\vec{x}) = -k\vec{x} & \mathrm{U}_{Osz}(\vec{x}) = \frac{k}{2}\vec{x}^2 \end{array}$$

Mit Hilfe der Kettenregel kann man den Ausdruck $(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))$ aus der Rechnung wie folgt umformen (Zuerst einfach einsetzen, dann Kettenregel!):

$$(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t)) = -(gradU(\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)) = -\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t))$$

Das aber hatten wir gesucht. Jetzt können wir die Rechnung wie gewünscht beendigen. Die letzten drei Zeilen lauten ausgeführt:

$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)) = (\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))....$	Produktregel $\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)$ Änderungsrate kin. Energie
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)\right] = \frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)$	Die rechte Seite ist negative Änderungsrate des Potentialwertes des Punktes
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)+U(\vec{r}(t))\right] = 0$	Wir sind am Ziel: Die Summe "Kinetische. +potent. Energie" hat Änderungsrate Null.

Oder:

Die **Summe aus kinetischer und potentieller Energie** hat entlang einer physikalischen Bahn einen konstanten Wert, ist. unveränderlich. Geht man zu einer andern physikalischen Bahn über, ist sie dort erneut konstant, aber in der Regel mit einem anderen festen Gesamtwert.

$$\boxed{E_{Bahn}=\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)+U(\vec{r}(t))}$$

★★ Wie nutzt man nun diesen Energiesatz? Wie sieht die hauptsächlich benutzte Anwendungsstrategie aus?

⧫ Suche zwei verschiedene Zeiten t_1 und t_2, für die Systemkonfiguration (Ort und Geschwindigkeit) und damit die beiden Summanden gut kennt

⧫ und die durch eine physikalische Bewegung $\vec{r}$ zusammenhängen.

Dann muss gelten:

$$\boxed{\boxed{\frac{m}{2}\vec{v}^2(t_1)+U(\vec{r}(t_1)) = \frac{m}{2}\vec{v}^2(t_2)+U(\vec{r}(t_2))}}$$

Kennt man drei von den vier beteiligten Größen, dann kann man die vierte bestimmen.

★ 1. Beispiel: **Senkrechter Fall** im konstanten Feld:

- 1. Konfiguration: Zur Zeit t_1 wird der Körper in der Höhe z=H losgelassen, also Geschwindigkeit Null. ("Fall", nicht senkrechter "Wurf"). Formal $\vec{v}(t_1)=\vec{0}$.
- 2. Konfiguration: Zur Zeit t_2 erreicht der Körper den Boden z=0 mit einer skalaren Geschwindigkeit v.

Mit $\vec{g} = (0,0,-g)$ und $\vec{r}(t) = (0,0,z(t))$ folgt aus unserer Tabelle U(0,0,z)=mgz. Damit sagt der Energiesatz

$$0+mgH = \frac{m}{2}v^2+0.$$

Und das bedeutet

$$\boxed{H=\frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v=\sqrt{2gH}} \quad \text{Senkrechter Fall.}$$

Man erhält (mühelos) die Fallhöhe als Funktion der Aufschlageschwindigkeit oder die Aufschlageschwindigkeit als Funktion der Fallhöhe.

★ 2. Beispiel: Die **Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche.**

Jetzt betrachten wir das Gravitationsgesetz. Die zugehörige anziehende Kraft wird mit zunehmender Entfernung immer schwächer. Wir fragen: Kann man einem Projektil auf der Erdoberfläche eine solche Anfangsgeschwindigkeit geben, dass es nicht auf die Erde zurückstürzt? Reibung soll dabei natürlich vernachlässigt werden. Das Potential ist in diesem Fall U($\vec{x}$) $= -\frac{GM_{erde}}{r}$. Wieder sei $\vec{x} = (0, 0, z)$. Also r=z>0.

Woran erkennt man, dass der Massenpunkt nicht zurückkehrt? Er muss bis nach r=∞ fliegen, muss sich immer weiter von der Erde entfernen. Und dort, nur im Unendlichen - ist das Potential in diesem Fall Null. Für jedes endliche r kommt ein echt negatives U heraus.

Jetzt wieder die beiden Konfigurationen:

- Zur Zeit t_1 werde der Punkt auf der Erdoberfläche (r=z=R_{Erde}) mit Geschwindigkeit V abgeschossen.
- Zur Zeit t_2 komme er nach z=∞, d.h. an einen Ort mit Potentialwert Null. Seine Grenzgeschw. nennen wir v_∞.

Das gibt die folgende Gleichung für den bewegten Punkt der Masse m:

$$\frac{m}{2}V^2 - m\frac{GM_{Erde}}{R_{Erde}} = \frac{m}{2}v_\infty^2 + 0$$

Im Grenzfall kommt m mit der Geschwindigkeit Null im Unendlichen an. Dazu sollte die geringste Startgeschwindigkeit gehören. Dann ist die rechte Seite Null und es folgt:

$$V^2 = \frac{2GM_{Erde}}{R_{Erde}} \quad \text{also ....}$$

★ 3. Beispiel: Geschwindigkeitsunterschied bei der **Schiffsschaukel**: Eine punktförmig idealisierte Schiffsschaukel der Masse M bewegt sich mit mit Überschlag. Der Kabinenpunkt hat den Abstand L von der Drehachse. Wie groß ist der Unterschied der Geschwindigkeit ganz oben und ganz unten?

▼ Unten: v_u h_u . Oben v_o $h_o = h_u + 2L$

Der Energiesatz gibt:

$$\frac{1}{2}v_u^2 = \frac{1}{2}v_o^2 + g2L \quad \text{Aufgelöst} \quad v_o = \sqrt{v_u^2 - 4gL}$$

Das gibt für den absoluten Unterschied:

$$\boxed{\Delta v = v_u - v_o = v_u - \sqrt{v_u^2 - 4gL}}$$

oder den relativen

$$\boxed{\tfrac{\Delta v}{v_u} = \tfrac{v_u - v_o}{v_u} = \tfrac{v_u - \sqrt{v_u^2 - 4gL}}{v_u} = 1 - \sqrt{1 - \tfrac{4gL}{v_u^2}}}$$

Ergänzung: **Der Gradient eines Skalarfeldes.**

Ein Skalarfeld ist eine Konstruktion oder eine Größe, die jedem Punkt des Raumes eine Zahl zuordnet. Physikalisch z. B. die an diesem Punkt herrschende Temperatur oder der dort herrschende Druck oder eine dort herrschende Stoffkonzentration usw. Mathematisch wird ein Skalarfeld durch eine Gleichung der Form $\boxed{\mathrm{s}(\vec{x}) = ...}$ wiedergegeben, bei der rechts ein Rechenausdruck steht, der aus dem Ortsvektor $\vec{x}$ eine Zahl macht, die mit $\mathrm{s}(\vec{x})$ bezeichnet wird. Liegen die geometrischen Pfeile als achsenparallele Wege vor, sieht das so aus $\boxed{\mathrm{s(x,y,z)}=....}$.

Beispielsweise $\mathrm{s}_1\mathrm{(x,y,z)}=\mathrm{x}^2+y^2+z^2$. oder $\mathrm{s}_2(x,y,z) = \sin(\mathrm{ax+by-cz})$ usw. Dann folgt weiter $\mathrm{s}_1(1,2,3) = 14$ unde $\mathrm{s}_2(1,1,0) = \sin(a+b)$. Hierbei sind a und b natürlich äußere Parameter.

Die betrachtete Größe ist hier der Wert des Skalarfeldes

Wie stets interessiert in der Physik vielfach die Änderung des Wertes. Aber Änderung worunter? Man kann vom Punkt des Ortsvektors $\vec{x}$ zu einem Punk in der Nähe gehen. Als Weg: von $\vec{x}$ zu $\vec{x} + \Delta\vec{x}$. Dan ändert sich der Wert des Skalarfeldes von $\mathrm{s}(\vec{x})$ zu $\mathrm{s}(\vec{x} + \Delta\vec{x})$. Der Unterschied oder die Wertänderung ist jetzt gegeben durch

$$\Delta s = \Delta s_{Exakt} = s(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - s(\vec{x}).$$

Das Neue: Es gibt jetztganz viele unterschiedliche Richtungen im Raum, die $\Delta\vec{x}$ nehmen kann. Physikalisch beschreibt Δs die Änderung einer Messgröße, etwa einer Temperatur.

Wie kann sich - abhängig von der gewählten Richtung - die Messgröße ändern?

Nun es wird (viele) Richtungen geben, in die sie sich nicht ändert und eine in der sie besonders stark zunimmt.

★ Der Gradient (von s am Orte $\vec{x}$) ist ein Vektor, den wir mit $\mathrm{grads}(\vec{x})$ bezeichnen wollen.

★ Die Richtung dieses geometrischen Pfeiles ist die Richtung stärkster Zunahme von s.

★ Und sein Betrag ist gleich der Änderungsrate von s in eben diese Richtung.

All das wird durch folgende Gleichung wiedergegeben

$$\boxed{\boxed{\Delta \mathrm{s}_{Approx}=(\Delta\vec{x}\cdot\mathrm{grads}(\vec{x}))}} \quad \text{Skalarprodukt!}$$

Ausgeschrieben:

$$\boxed{\Delta \mathrm{s}_{Approx}=|\Delta\vec{x}||\mathrm{grads}(\vec{x})|\cos(\theta)} \qquad \theta \text{ der Winkel zwischen } \Delta\vec{x} \text{ und } \mathrm{grads}(\vec{x}).$$

Für $\theta = 0$, also "$\Delta\vec{x}$ hat die Richtung des Gradienten" ergibt das die behauptete Ratenbeziehung

$$\Delta s^{Max}_{Approx} = |\Delta\vec{x}||grads(\vec{x})| \qquad |\mathrm{grads}(\vec{x})| = \frac{\Delta s^{Max}_{Approx}}{|\Delta\vec{x}|} = \frac{Wert\ddot{a}nderung}{Wegl\ddot{a}nge}$$

Natürlich liegt in der Regel ein Vektor**feld** vor! Der Gradient wird sich von Ort zu Ort ändern!

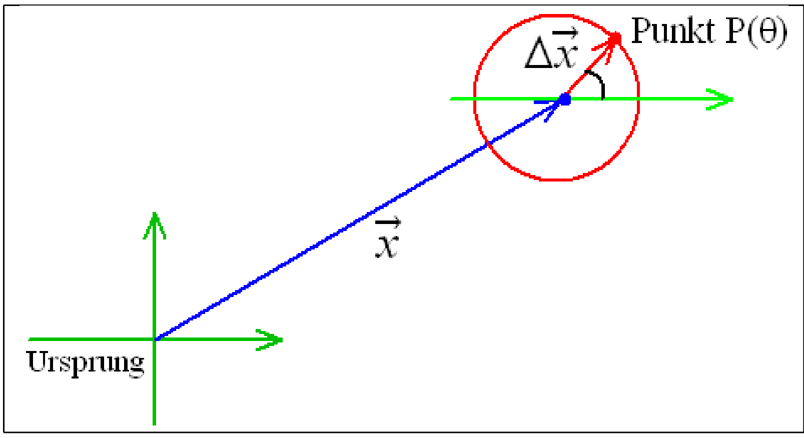
Einige illustrierende Beispiele:

Für $\mathrm{s}_1(\vec{x}) = \vec{x}^2$ gilt $\mathrm{grads}_1(\vec{x}) = 2\vec{x}$. Und ein zu merkender Fall: Für $\mathrm{s}_2(\vec{x}) = |\vec{x}|$ gilt $\mathrm{grads}_2(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$. Der Nachweis über die Definition ist in beiden Fällen eine nicht schwere Übung.

Zur Veranschaulichung des Sachverhaltes:

Wir betrachten ein Skalarfeld s in der Ebene und begeben uns an einen Punkt mit Ortsvektor $\vec{x}$. (Den "Aufpunkt"). Der zugehörige Feldwert ist $\mathrm{s}(\vec{x})$. In welche Richtungen können wir weitergehen? Was für Richtungen kann $\Delta\vec{x}$ in der Ebene haben? Das wird wie üblich durch eine Winkelangabe festgelegt. Dazu schlagen wir einen Kreis mit Radius Δr um $\vec{x}$ und laufen auf mit Punkt $\mathrm{P}=\mathrm{P}(\theta)$ auf diesem Kreis um $\vec{x}$

herum:

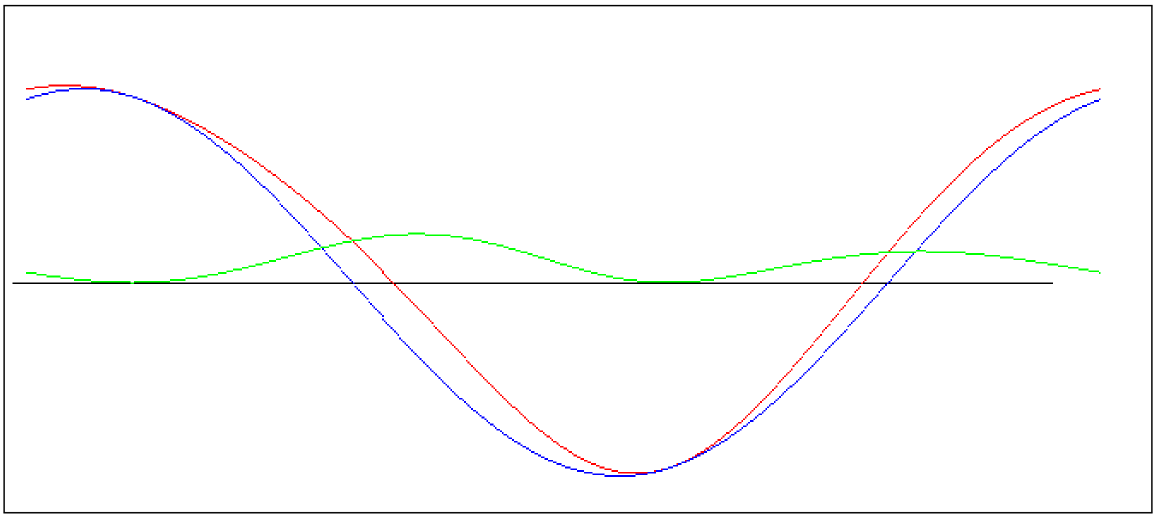


Vom Ursprung nach $\vec{x}$
Dort Feldwert s($\vec{x}$).
Weiter mit $\Delta\vec{x}$ nach P.
Dort Feldwert s($\vec{x} + \Delta\vec{x}$)
Unterschied:
$\Delta s = s(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - s(\vec{x})$.
Jetzt Winkel θ von 0 bis 2π.

Jetzt tragen wir Δs als Funktion des Winkels θ auf. Und zwar einmal den exakten Unterschied (für das gegebene Feld) und einmal den mit Hilfe des Gradienten berechneten Wert. Das ist wegen der Skalarproduktformel einfach eine Cosinusfunktion mit etwas anderer Amplitude. Die folgende Formel zeigt das sofort, wobei α den Polarwinkel des Gradienten in $\vec{x}$ bezeichnen soll:

$$\Delta s_{Approx}(\theta) = (\Delta\vec{x} \cdot grads(\vec{x})) = \underbrace{|\Delta\vec{x}||grads(\vec{x})|}_{\text{Feste Zahl!}} \cdot \cos(\alpha - \theta)$$

Beachten Sie, dass laut Konstruktion $|\Delta\vec{x}| = \Delta r$ ist!
Wie so etwas aussieht, zeigt das nächste Bild.



Rot ist Δs_{Exakt} aufgetragen, blau dagegen Δs_{Approx} und grün die Differenz beider, also der Fehler. Blau ist die Cosinusfunktion. Das Feld selbst muss heir nicht weiter interessieren. Das Ergebnis sieht stets ähnlich aus, wenn Δr nur klein genug gewählt ist.

Das Maximum des Cosinus gibt die Richtung des Gradienten (als Winkel gegen die 1- Achse). Das Minimum die Richtung stärkster Abnahme. Und die Nullstellen zeigen die richtungen an, in die sich das Feld nicht ändert.