Wellen

Was sind Wellen? Hier nur eindimensionale Wellen

- Animation: Transversale und longitudinale Wellen
- Vorkommen: Schall, Licht, allgemeiner elktromagnetische Wellen, Wasserwellen ....

★ **Wie wird man einen derartigen Vorgang idealisiert mathematisch beschreiben??**

$\boxed{\text{A(t,x)=....}}$ (Longitudinale oder transversale) **Auslenkung zur Zeit t am Orte x.**

Oder: Abweichung vom Gleichgewichtszustand.

$\vec{A}(t,x) \qquad \vec{E}_0 \sin(\omega t - (\vec{k} \cdot \vec{x}))$

Eine solche *Amplitudenfunktion ist* ein spezielles Skalarfeld

Auftragen als x-t-Diagramm

Messmethoden: t fest (Photo)

oder x fest - zeitliche Entwicklung!

Animationen!

"Bewegungsgleichung" ist die Wellengleichung

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(t,x)}$$

c wie üblich "Materialkonstante"

"Partielle Differentialgleichung" . Sie bestimmt die raum-zeitliche Entwicklung der Welle so wie es die Newtonsche Bewegungsgleichung mit der Bahn des Massenpunktes tat.

$$a(x,t) = (x-3t)^2$$
$$\frac{\partial a}{\partial x}(x,2) = 2(x-6)$$
$$\frac{\partial a}{\partial t}(x,2) = -6(x-6) \qquad \frac{\partial a}{\partial t}(x,t) = (-3)2(x-3t)$$

★Was sind partielle Ableitungen?

Besonders wichtige Speziallösung der Gleichung ist

$$\boxed{A(t,x) = A_0 \sin(\omega t - kx)}$$

Einheiten $[c] = \frac{m}{s} \qquad [\omega] = s^{-1} \qquad [k] = m^{-1}$

Es muss gelten $\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = k^2}$ S.u.

Was beschreiben diese beiden Größen ω und k?

★ $\boxed{\omega}$ Fester Ort. Dort zeitlichen Verlauf der Amplitude verfolgen. T=$\frac{2\pi}{\omega}$ ist unsere altbekannte Periode!

Projizierte Kreisbewegung

$$a_x(t) = A_0 \sin(\omega t + \overset{\varphi}{\boxed{(-kx)}})$$

★ $\boxed{\text{k}}$ Feste Zeit t und Photo des Amplitudenverlaufes entlang x mit Wellenlänge λ . Sinusgraph

$$a_t(x) = A_0 \sin(\overset{\psi}{\boxed{\omega t}} - kx) \qquad k\lambda = 2\pi \qquad \text{k}=\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Wellenzahl!}$$

■ Also: A(x,t)=$\frac{1}{10}$sin(5t-3x) beschreibt eine nach rechts laufende Welle der Amplitude $\boxed{.?.}$ und zeitlichen Periode $\boxed{.?.\ }$ und Wellenlänge $\boxed{..?..}$.

■Umkehrung: Eine Welle der Amplitude 2 und Frequenz 100 Herz (nicht Kreisfrequ.) und einer Wellenlänge von 3mm wird durch folgende Funktion beschrieben

$$A(x,t) = \boxed{?}\sin(\boxed{?}t - \boxed{\text{k}}x + \varphi)$$

■Auf eine Strecke der Länge L entfallen wieviel Wellenlängen?

Und eine nach links laufende Welle:

$$\boxed{\text{A(t,x)=A}_0 \sin(\omega t + kx)}$$

★ Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Wellenberges oder einer **Nullstelle**? (Betrag)

$$\omega\Delta t - k\Delta x = 0 \quad \text{gibt} \quad \boxed{\text{c}_{Phase}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\omega}{k}}$$

Etwas weiter: $\omega = 2\pi f$ f übliche Frequenz und k=$\frac{2\pi}{\lambda}$ gibt $\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\lambda$

$$\boxed{\boxed{\text{c=f}\cdot\lambda}}$$

Einschub: **Schallwellen in Luft** $\text{c}_{Schall} = 330m/s$

- f=1000/s $\omega = 2\pi \cdot 1000/s = 6.28 \cdot 10^3/s$ $\lambda_{1000} = \frac{c}{f} = \frac{330m/s}{1000/s} = \frac{1}{3}m$
- f=33/s $\lambda_{33} = 10m$
- f=35$\cdot10^3/s$ $\lambda = \frac{3.3\cdot10^2}{3.5\cdot10^4} = 10^{-2}m$

Oder auch: Damit ein fester Schwingungspunkt

Und Lichtwellen:

162 em Spektrum

★★★★★

Aber weder beim Schall noch beim Licht treffen wir üblicherweise derartig periodische Vorgänge an wie sie durch unsere Idealwellen A(x,t)=$A_0 \sin(\omega t$-kx) beschrieben werden.

Rettung: Das sind nur Bausteine für viel komplexere Wellenvorgänge.

Superposition: Der von Massen oder Ladungen erzeugten Felder.

Der Lösungen der Oszillatorgleichung

Und jetzt:

Erneut **Superposition der Lösungen der Wellengleichung**!

$$A(t,x) = A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

ist auch Lösung der Wellengleichung .

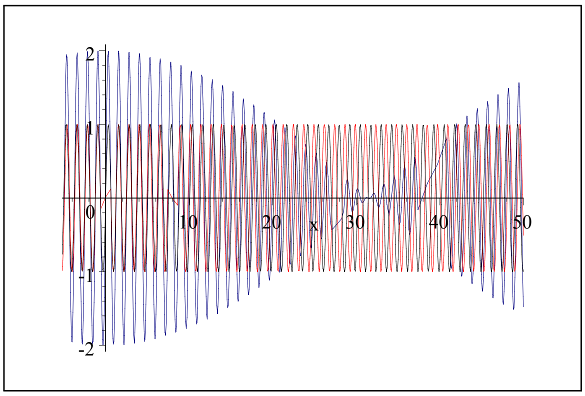
Stets gilt: $\boxed{\text{sinx+siny=2sin}\frac{x+y}{2}\cos(\frac{x-y}{2})}$

sinx+siny=2sin$\frac{x+y}{2}$ $\sin(\frac{x-y}{2})$=2sin$(\omega t)\cos(kx)$

Spezialfall: *Stehende Welle*

$$\begin{aligned} & A_0 \left(\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)\right) \\ = \; & 2A_0 \left(....\right) \end{aligned}$$

$\sin(5x) + \sin(5.1x)$



Weg von "Eindimensional"!
Ebene Wellenfront im Raum. Figur in der Ebene

- Von jedem Punkt geht eine Kreis/Kugelwelle aus - Einhüllende. Bezug zum Teilchenbild des Lichtes.

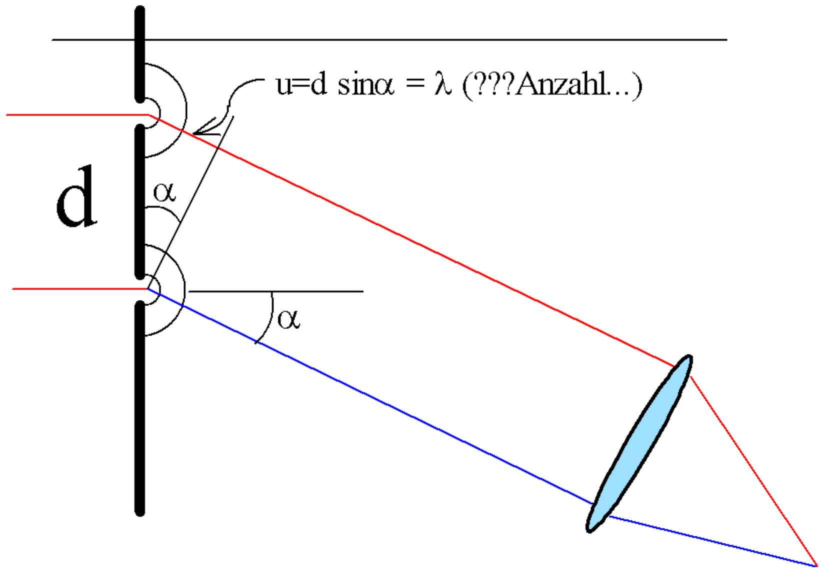
  Also: Wellenfront /Fläche und zugeh. Normale!

★★★★

Wellennatur des Lichtes. Wieso hat Licht Wellencharakter?
Wieso sieht man nicht um die Ecke?

Antwort: Das Licht geht wohl um die Ecke. Aber üblicherweise verschwören sich die Lichtwellen so, dass sie per Superposition im erwarteten Schattenbereich die Gesamtamplitude Null ergeben.
Nur durch geschickte Konfiguration kann man das verhindern.

Einfachstes Beispiel: **Interferenz an zwei Spalten**.
Wie bei einer Wasseroberflächenwelle entsteht hinter jedem Spalt eine eine halbkreisförmig sich ausbreitende Welle. Wir gehen weit weg von den Spalten, so dass die davon ausgehenden Normalen der Wellenflächen bereits näherungsweise parallel sind und dann durch die Augenlinse überlagert werden
Wir fixieren eine bestimmten Winkel α gegen die Flächennormale unter dem wir auf die beiden Spalte sehen



Der Gangunterschied ist

$$u = d \sin\alpha = \lambda \cdot \left(\frac{d \sin\alpha}{\lambda}\right)$$

Sobald $\left(\frac{d\sin\alpha}{\lambda}\right)$ gleich $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ ist, löschen sich die Strahlen durch Superposition aus. Sobald es gleich 1, 2, 3 ist, verstärken sich die Strahlen.

Erstes Löschen führt daher zu der Bedingung:

$$d \sin\alpha = \frac{1}{2}\lambda \qquad \text{Bedingung für } \alpha, \quad \text{d},\lambda \quad \text{gegeben.}$$

Unterscheide: "Gangunterschied" die geometrische Länge der Strecke
und "Phasendifferenz oder -Unterschied", also die entsprechende Phasenwinkeldifferenz $\Delta\varphi$ in der Sinusfunktion. Der Zusammenhang wird gegeben durch $\boxed{\Delta\varphi = k \cdot \Delta g}$

Animation zum Doppelspalt. Interferenz!!!(Interference)

■ Sei d=1mm und $\lambda = 500nm = 5 \cdot 10^{-7}m$. Wo findet sich das erste Minimum in 1m m Entfernung auf der Wand?

A=Dsin$\alpha = D \cdot \frac{\lambda}{2d} = 1m \cdot \frac{5 \cdot 10^{-7}m}{2 \cdot 10^{-3}m} = 2.5 \cdot 10^{-4}m = \frac{1}{4}mm$

Klar, dass hiervon üblicherweise nichts zu sehen ist.

Weiteres Beispiel für einen Gangunterschied im optischen Weg ist das

Michelson Interferometer

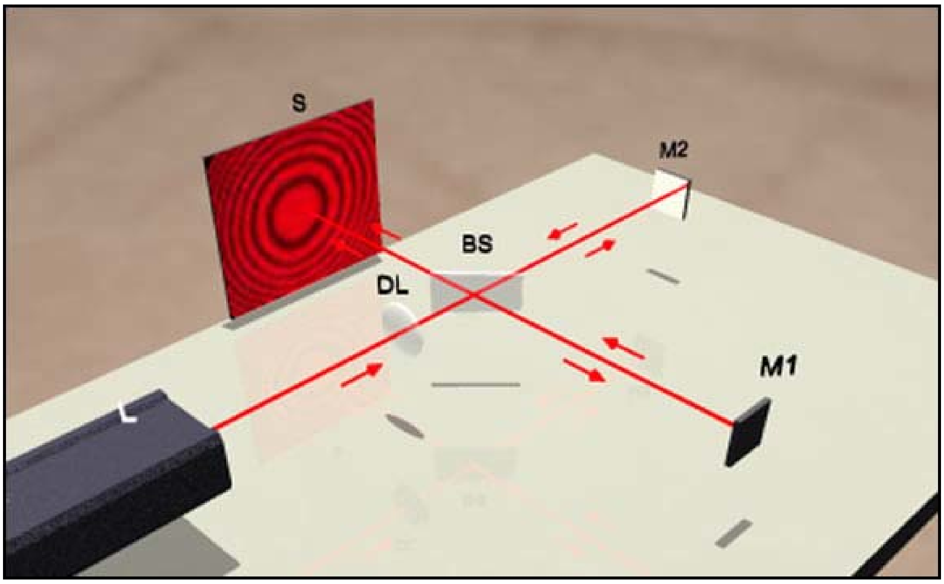
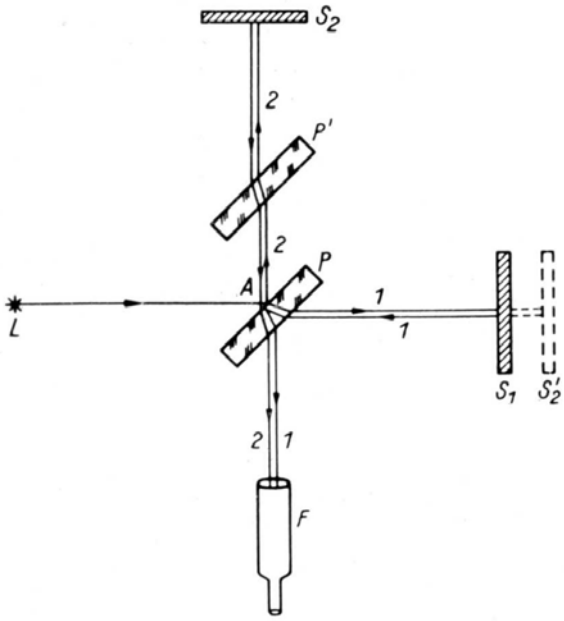


Figure 1:



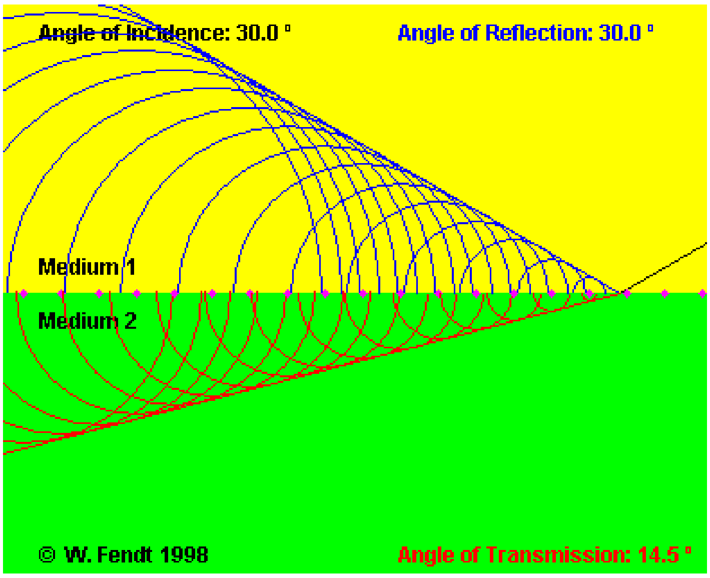
Aufbau des Michelson-Interferometers

Die Konstruktion ist der ersten Figur, das Ergebnis der zweiten zu entnehmen. Verschieben des Spiegels S_1 liefert Änderung des Gangunterschiedes, also Wandern der Ringe im zweiten Bild

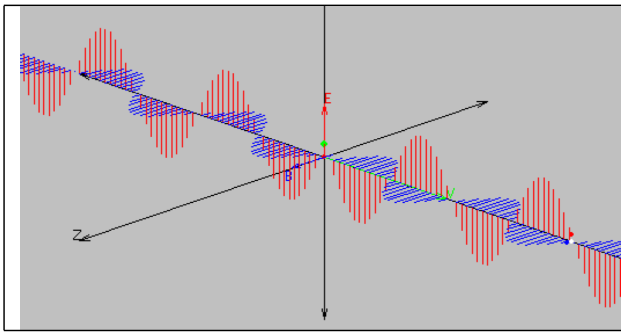
★ Messung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe des Interferometers.
Dazu: Schwimmeranimation. (Warum sollte der "Äther" als Träger des Lichtes mit Hilfe des Interferometers beobachtbar sein?
Ausweg über Mitnahme des Äthers geht nicht wegen Existenz der Aberration.

■ Was soll eine Formel für den Dopplereffekt leisten? Eingabegrößen, Ausgabegrößen?

■ Nochmals: Wellenfront und Brechungsgesetz. Die ausführliche Animation. Wie entsteht hier das Brechungsgesetz?



■ Wie sieht eine elektrom. Welle aus?



Verallgemeinerung der Formel
$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$

★★★★

Letztes Thema

Absorbtion / Abnahme der Wellenamplitude in Raum und Zeit

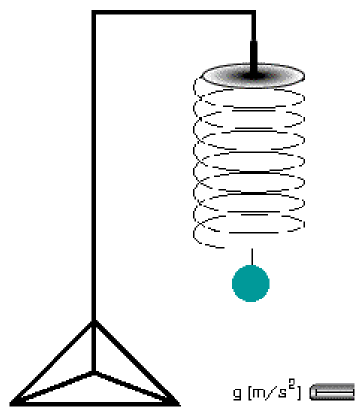
Erfahrungsgemäß gibt es eine solche **Abnahme**. Wir besprechen zwei Gründe, die zu einer Abnahme führen.

- Abnahme durch Absorbtion - verbunden mit einem Energieverlust des Systems

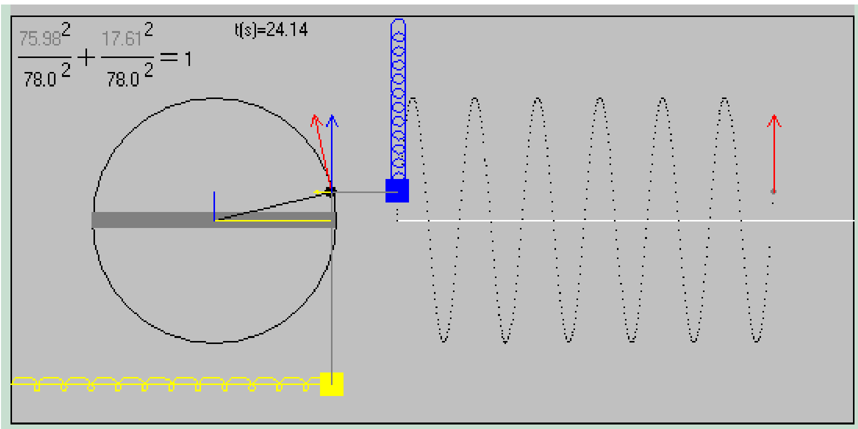
- Abnahme durch Ausbreitung - ohne Energieverlust des Systems

★★★

Erinerung an das Vorgehen beim System: Osillator (Federpendel) ohne Dämpfung:



Auslenkung x(t)=....??
Antwort:
$x_{AB}(t) = Ax_S(t) + Bx_c(t)$
$x_s(t) = \sin(\omega_0(t - t_1))$
$x_c(t) = \cos(\omega_0(t - t_1))$
$\omega_0 = \frac{k}{m}$
A,B frei vorgebbar



Wie sind wir vorgegangen? Zuerst wurde die zugehörige Kraft idealisiert. Das gab die Newtonsche Bewegungsgleichung des Systems:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t).$$

Wir haben zwei Lösungen x_s und x_c geraten und verifiziert, dass das Lösungen sind. Dann erhielten wir durch Superposition weitere Lösungen x_{AB}. Vermutung: Das sind alle. Man kann mit ihnen demnach das physikalische Problem der Anfangswertvorgabe lösen.

Das stimmt, wie man sofort überprüft:

Gebe t_1, x_1 und v_1 vor und verlange, dass die Bahn $x(t_1) = x_1$ und $v(t_1) = v_1$ erfüllt. Man findet sofort $\boxed{A=x_1}$ und $\boxed{B=\frac{v_1}{\omega}}$. Die zugehörige Funktion erfüllt alle Bedingungen.

★ Gedämpfte Schwingung ★

- Wir gehen über zum System "Massenpunkt mit Federkraft und zusätzlicher Reibung" in einer Dimension. Dazu gehört folgende Newtonsche Bewegungsgleichung

  $$\boxed{m\ddot{x}(t)=-kx(t)-2\beta\dot{x}(t)}$$

  - Kraftinterpretation: Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit
  - Vorzeichendiskussion: Kraft wirk immer bremsend. Beide Vorzeichen sind wichtig!

- In Normalform bringen, dann nur noch zwei Systemparameter:)

  $$\boxed{\ddot{x}(t)=-\omega_0^2x(t)-2\rho\dot{x}(t)}$$

  Die beiden Zahlen ω_0 und ρ legen das System fest.

- Wie sehen die Lösungen dieser Bewegungsgleichung aus? Wir verschaffen sie uns durch Raten uns überlegen.

  Start: Die Lösung $A_0 \sin(\omega_0 t)$ des ungedämpften Oszillators. Was könnte die Dämpfung bewirken? Sicher eineAbnahmen der Amplitude. Da wir mehrfach gesehen haben dass solche Abnahme durch ein Exponentialgesetz erfolgt, ersetzen wir A_0 versuchsweise durch einen Faktor $A_0 e^{-\rho t}$. Wieso nicht $e^{-2\rho t}$? Dann würde es nicht ganz klappen und wir hätten neu mit $e^{-\rho t}$ zu beginnen. Außerdem argumentiern wir: Die Reibung sollte die Bewegung verlangsamen. Das würde T vergrößern und das beutet ω verkleinern. Also versuchen wir es mit ω statt ω_0. Und das heißt insgesamt, dass wir es mit folgender Funktion versuchen

  $$x_s(t) = e^{-\rho(t-t_1)} \sin(\omega(t-t_1)).$$

  Dabei sollte t_1 wieder beliebig sein - Zeitpunkt für den wir über Information über die Bewegung verfügen. ω dagegen sollte so gewählt werden, dass wir eine Lösung der Bewegungsgleichung erhalten. ω müsste durch die Systemkonfiguration festgelegt sein!

Was ist jetzt zu tun? Wir müssen prüfen, ob und wann diese Funktion die Bewegungsgleichung erfüllt. Wir müssen also beide Seiten $\boxed{\ddot{x}(t)}$ und $\boxed{-\omega_0^2 x(t) - 2\rho\dot{x}(t)}$ dieser Gleichung für unser $x_s(t)$ ausrechnen. Das machen wir schematisch buchalterisch. Und wir benutzen die erste Zeile (*) zum Abkürzen.

$$\begin{aligned}
x_S(t) &= e^{-\rho(t-t_1)} \sin(\omega(t-t_1)) \qquad (*)\\
\dot{x}_S(t) &= (-\rho) x_S(t) + e^{-\rho(t-t_1)} \omega \cos(\omega(t-t_1))\\
\ddot{x}_S(t) &= (-\rho)^2 x_S(t) + 2(-\rho) e^{-\rho(t-t_1)} \omega \cos(\omega(t-t_1)) - \omega^2 x_S(t)
\end{aligned}$$

Die dritte Zeile gibt bereits die linke Seite der Bewegungsgleichung. Die rechte erhalten wir, wenn wir die erste Zeile mit $-\omega_0^2$ multiplizieren, die zweite mit -2ρ und beides addieren. Also

$$\begin{aligned}
& -\omega_0^2 x_S(t) - 2\rho \dot{x}_S(t)\\
= \; & -\omega_0^2 x_S(t) + 2\rho^2 x_S(t) - 2\rho e^{-\rho(t-t_1)} \omega \cos(\omega(t-t_1))
\end{aligned}$$

Wir sehen: Die beiden Terme mit cos stimmen überein und heben sich weg. Wie steht es mit den Vorfaktoren vor $x_s(t)$. Sammeln gibt:

$$-\rho^2 - \omega^2 = -\omega_0^2 + 2\rho^2 \quad \text{oder}$$
$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \rho^2.}$$

Ist diese Gleichung erfüllt, dann ist auch unsere Bewegungsgleichung erfüllt. Erwartungsgemäß legen die Systemgrößen ω_0 und ρ die neue Beobachtungsgröße ω fest. Das Ganze klappt allerdings nur für $\boxed{\omega_0^2 \geq \rho^2}$. Ist das nicht erfüllt ("starke Dämpfung"), dann müssen wir neu und anders beginnen.

Man sieht jetzt sofortm dass wir statt Sinus auch den Cosinus hätten nehmen können:

$$x_C(t) = e^{-\rho(t-t_1)} \cos(\omega(t-t_1)).$$

Und dann erhalten wir weitere Lösungen per Superposition! Also

$$\boxed{x_{AB}(t) = e^{-\rho(t-t_1)} \left(A \sin(\omega(t-t_1)) + B \cos(\omega(t-t_1))\right)}.$$

Hiermit löst man wieder recht leicht das physikalische Anfangswertproblem, was wir aber nicht weiter ausführen.

Bilder!!