Das **Ergebnis der bisherigen Überlegungen zu Mechanik** sieht wie folgt aus:

Gegeben ein physikalisches System, das sich idealisieren läßt als

$$\boxed{\text{Massenpunkt + darauf wirkende (resultierende) Kraft .}}$$

Für ein solches System gilt die **Newtonsche Bewegungsgleichung**. Diese legt fest, was für Bewegungen des Massenpunktes in diesem System vorkommen, dort physikalisch sind. Die physikalischen Bewegungen werden durch die (vielen) Lösungen dieser Differentialgleichung gegeben. Nimmt man ein System mit anderer Kraft, dann erhält man andere Lösungen, andere physikalische Bewegungen.

Wähle man weiter $(\mathrm{t}_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0)$, also einen Zeitpunkt, einen Ortsvektor und einen Geschwindigkeitsvektor, dann gibt es dazu im System genau eine physikalische Bewegung $\vec{r}(t) = ...$ (Bahnkurve) die $\vec{r}(t) = \vec{r}_0$ und $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ erfüllt. Die sich also zum Zeitpunkt $\mathrm{t}_0$am Orte $\vec{r}_0$ befindet und dann dort die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ hat! Die momentane Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit erhält man rein mathematisch durch Ableiten von $\vec{r}(t)$ nach der Zeit. Sie wird daher auch vorhergesagt.

Und das heißt: Kennt man das Kraftgesetz und die Anfangswerte, dann liegt die Bewegung im System eindeutig bestimmt für alle Ewigkeit fest!!

Die Bahnkurve $\vec{r}(t) = ...$ und ebenso $\vec{v}(t) = ...$ erhält man

- entweder durch explizites Lösen der zugehörigen Bewegungsgleichung
- oder über eine numerische Methode

★ Die **Zugänglichkeitsfrage**

Vielfach ist es so, dass die gesamte Bahnkurve nur schwer zugänglich ist und selbst wenn man über sie verfügt, dass die gerade gesuchte Information daraus nur mühsam zu erlangen ist. Man sucht daher nach Methoden, mit denen man Information über die physikalisch stattfindenden Bewegungen u.U. leichter erlangen kann. Erhaltungssätze haben sich dazu als ein wichtiges und nützliches Mittel erwiesen. Während die Bahnkurve selbst angibt, wie sich der Ort mit der Zeit **ändert,** liefert ein Erhaltungssatz Information darüber, dass sich bestimmte verborgene Größen während der Bewegung nicht ändern, dass ihr Wert während der Bewegung erhalten bleibt.

Als Beispiel eines Erhaltungssatzes betrachten wir den Energiesatz in der Mechanik. Er liefert einerseits die gesuchte rechnerische Unterstützung. Er hat aber auch noch viel weitergehenden Nutzen, weil er analog in anderen System gilt und weil er zeigt, wie man das System, das Modell erweitern und ausdehnen kann.

Der Energiesatz in der Punktmechanik

Der Enegiesatz ist in der Punktmechanik eine **Folge** der Newtonschen Bewegungsgleichung. Es zeigt sich, dass er hier auch **nur unter bestimmten Voraussetzungen** gilt. Neben dem Energiesatz gibt es in der Punktmechanik noch weitere Erhaltungssätze mit entsprechenden Nutzen. Das sind speziell der Impulssatz und der Drehimpulssatz. Nochmals: All das sind (mathematische) Folgen der Newtonschen Bewegungsgleichungen sowie jeweils gewisser Zusatzbeingungen.

★★ Wir betrachten das ideale System: $\boxed{\text{Massenpunkt im (gegebenen) Kraftfeld } \vec{F}(\vec{x})}$.

Zunächst wollen wir zwischen einer **physikalischen und einer geführten Bewegung** des Massenpunktes unterscheiden. Erstere ist wie beschrieben Lösung der zugehörigen Bewegungsgleichung und Konsequenz der ausschließlichen Einwirkung des Kraftfeldes $\vec{F}$. Wir können aber auch von Außen in geeigneter Weise auf den Massenpunkt einwirken und ihn entlang einer Bahn führen, eine andere Bahn erzwingen. Dazu müssen wir die Feldkraft geeignet kompensieren, was im Prinzip auch durch eine Kraft erfolgt, die wir aber nicht genauer festlegen wollen.

Überlegt man sich einfache Beispiele dieser Art, dann ist eine derartige Bahnführung immer mit etwas verbunden, was man naiv und intuitiv als "Arbeit" interpretiert. Führt man eine Masse im konstanten Kraftfeld auf einer vorgegebenen Bahn, so geht es meist um die dabei geleistete Arbeit. ("Den Sack in den dritten Stock schaffen".) Natürlich muss das noch abstrahiert und idealisiert werden.

Wir wollen damit unser System "Massenpunkt und Kraftfeld" erweitern und gewisse "Eingriffe von außen" zulassen.

Die Idealisierung im konstanten Kraftfeld liefert für die Arbeit die folgende formale Beschreibung:

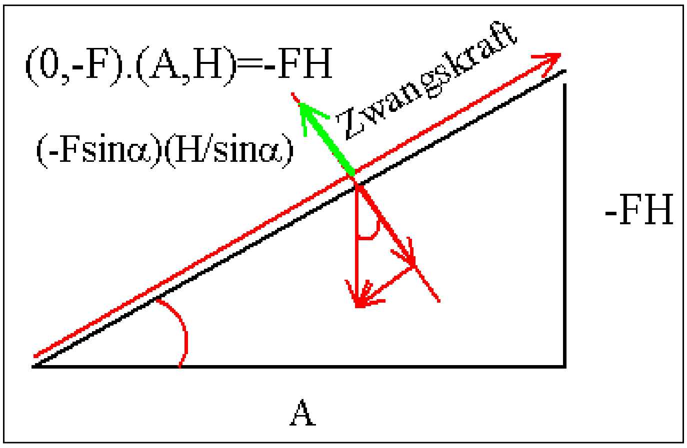
$$\boxed{\boxed{\text{Arbeit}=\vec{F}\cdot\Delta\vec{x} = |\vec{F}||\Delta\vec{x}|\cos\theta}}$$

Arbeit ist daher eine der ersten und nützlichsten Anwendungen des vektoriellen Skalarproduktes.

Einführende Formeldiskussion und Auswertung.....

★ Eine wichtige Eigenschaft der so definierten Arbeit wird als "Wegunabhängigkeit" bzeichnet. Das folgende Gedankenexperimet mit der schiefen Ebene zeigt, was damit gemeint ist, und wie dieser Sachverhalt zustande kommt.

★ Wichtige Eigenschaft in der Mechanik:
Wegunabhängigkeit : Beispiel *Schiefe Ebene*



Über die Weiterentwicklung des mathematischen Apperates (Integration) zeigt man, dass diese Eigenschaft der Wegunabhängigkeit auch für nicht konstante Felder gilt.

Die bei einer geführten Bewegung gegen das Kraftfewld $\vec{F}$ zu leistende Arbeit hängt nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges ab, auf dem man führt. Überdies sollte der Punkt an diesen beiden Pukten ruhen.

★ Nach diesen Vorbemerkungen, insbesondere der Einführung der Arbeitsgröße $(\vec{F}\cdot\Delta\vec{x})$ kehren wir zu unserem Problem zurück, der Frage nach der Herleitung des Energieerhaltungssatzes aus der Newtonschen Bewegungsgleichung. Das ist eine Aussage über eine physikalische Bewegung. D.h. das zugehörige $\vec{r}(t)$ erfüllt die Newtonsche Bewegungsgleichung. Mit dieser dann gültigen Gleichung führen wir folgende rechnerische Manipulationen aus:

$m\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=\vec{F}(\vec{r}(t))$	Skalar mit $\vec{v}(t)$ multiplizieren!
$m\vec{v}(t)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))$	Nur noch skalare Gleichung!
$\frac{m}{2}\frac{d}{d}(\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t))=(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))....$	Produktregel
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)\right]\overset{??}{=}\frac{d}{dt}\left[.xxxx(t)...\right]$	
$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t)-....xxxx(t)...\right]=0$	Angestrebtes Ziel

Falls es uns gelingt, das rechts stehende Skalarprodukt $\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))$ als zeitlich Ableitung einer anderen - hier mit xxxx(t) bezeichneten Größe zu schreiben, sind wir fertig. Denn die dann in der eckigen Klammer stehende Zeitfunktion (entlang der physikalischen Bewegung) hat die Ableitung Null und ist daher zeitlich konstant. Ihr Wert bleibt für alle Zeiten erhalten, ändert sich nicht.

Beachten Sie übrigens schon jetzt, dass die rechts stehende Größe mit der oben eingeführten Arbeit in Verbindung steht:

$$(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t))\Delta t=(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t)\Delta t)=(\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\Delta\vec{r})$$

Nur dass $\Delta\vec{r}$ hier die Ortsänderung entlang einer physikalischen Bahn sein muss.

Um die gesuchte noch hypothetische Größe zu finden, müssen wir etwas ausholen:

★★ Zwischenüberlegung: Was ist ein Skalarfeld?

☐ s($\vec{x}$) = ...Skalarfeld. Jedem Ort, beschrieben durch seinen Ortsvektor, wird eine Zahl zugeordnet.

Physik: Temperatur, Dichte, Druck, Konzentration,.... Das sind unter bestimmten Bedingungen alles ortsabhängige Größen.

☐ Beispiele für möglich Rechenausdrücke: s($\vec{x}$) $=\vec{x}^2$ oder s($\vec{x}$) $=(\vec{a}\cdot\vec{x})$ oder s($\vec{x}$) $=2\vec{x}^2+3(\vec{a}\cdot\vec{x})$

$$\vec{a}=(1,-1)\qquad\vec{x}=(x,y)\quad\vec{a}\vec{x}=x-y$$

☐ Veranschaulichung von Skalarfeldern durch Niveaumengen, also durch alle Punkte die zu einem bestimmten Fedwert ("Temperatur") gehören.

★ **Das physikalische mit einem Skalarfeld verbundene Hauptproblem: Bestimme die Feldänderung Δs , wenn man den Ort von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}_0+\Delta\vec{x}$ verändert. Dies Änderung ist offensichtlich richtungsabhängig.**

★ **Einführung des Vektorfeldes Gradient(s($\vec{x}$)) , das diese Frage beantwortet.**

Und zwar mit Hilfe der folgenden zentralen Formel;:

$$\boxed{\Delta s=\left(grad\,\boxed{s(\vec{x})}\cdot\Delta\vec{x}\right)=|grads(\vec{x}_0)||\Delta\vec{x}|\cos\theta}$$

★ Geometrische Interpretation des Gradienten, Beispiele und Veranschaulichung.

★ Ende der Zwischenüberlegung★

★★ Jetzt führen wir die Rechnung zur Herleitung des Energiesatzes fort. Und zwar nehmen wir an, dass unser Kraftfelde $\vec{F}$ sich als Gradient eines Skalarfeldes darstellen läßt. Genauer nehmen wir an, dass s ein Skalarfeld U gibt, für das gilt:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})} \quad \text{Das negative Vorzeichen beachten!}$$

Kraftfelder, für die man ein solches U findet, heißen *konservativ.* Beachten Sie: Es gibt durchaus nicht konservative Kraftfelder. Die für uns wichtigen Felder sind konservativ und wir geben für jedes ein zugehöriges Skalarfeld (auch Potentialfeld genannt) an.

Nun rechnen wir mit Hilfe der Kettenregel wie folgt. Dabei sei $\vec{r}(t)$ eine Bahnkurve, physikalisch oder auch geführt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathrm{U}(\vec{r}(\mathrm{t}))=\left(gradU(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right)=\text{-}\left(\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)\right)}$$

Damit sind wir am Ziel, haben unsere Wunschgröße ....xxxx(t)... gefunden.

Einsetzen in die oben hergeleitete Gleichung, die wir nochmals aufschreiben, gibt, für **physikalische** Bewegungen:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\frac{d}{d}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) &= (\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)) \\
\frac{m}{2}\frac{d}{d}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) &= -\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t)) \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\vec{v}^2(t) + U(\vec{r}(t)\right] &= 0 \\
& \boxed{\frac{m}{2}\vec{v}^2(\mathrm{t})+\mathrm{U}(\vec{r}(\mathrm{t})=\mathrm{E}} \quad \text{fest für alle t.}
\end{aligned}$$

Das ist der angestrebte Erhaltungssatz:

★★ Die Summe von kinetischer ($\frac{m}{2}\vec{v}^2$(t)) und potentieller Energie U($\vec{r}$(t)) ist konstant und ändert sich entlang einer physikalischen Bahn nicht!

Natürlich können zu verschiedenen Bahnen auch verschiedene Energiewerte gehören. Aber entlang ein und derselben Bahn ergibt sich immer auch dieselbe Summe oder Gesamtenergie!

★★ Wie nutzt man nun diesen Energiesatz? Wie sieht die hauptsächliche Anwendungsstrategie aus?

Suche zwei verschiedene Zeiten t_1 und t_2, für die Systemkonfiguration und damit die beiden Summanden gut kennt. Dazu sollte auch eine gesuchte Größe gehören. Dann muss gelten:

$$\boxed{\boxed{\frac{m}{2}\vec{v}^2(t_1) + U(\vec{r}(t_1)) = \frac{m}{2}\vec{v}^2(t_2) + U(\vec{r}(t_2))}}$$

Und das löst man nach der gesuchten Größe auf!

★ Zunächst noch die Liste der für uns wichtigen Potentiale

	$\vec{F}(\vec{x}) = -gradU(\vec{x})$	U($\vec{x}$)	
Konst. Feld	m$\vec{g}$	-m($\vec{g} \cdot \vec{x}$)	
Coulomb	$\varepsilon\alpha\frac{\vec{x}}{r^3}$	$\varepsilon\frac{\alpha}{r}$ +U_0	grad($\frac{1}{r}$)=-$\frac{\vec{x}}{r^3}$
Oszillator	-k$\vec{x}$	$\frac{k}{2}\vec{x}^2$	

★ 1. Beispiel: **Senkrechter Fall** im konstanten Feld:

- 1. Konfiguration: Zur Zeit t_1 wird der Körper in der Höhe z=H losgelassen., also Geschwindigkeit Null.

- 2. Konfiguration: Zur Zeit t_2 erreicht er den Boden z=0 mit einer Geschwindigkeit v.

Mit $\vec{g} = (0,0,-g)$ und $\vec{r} = (0,0,z)$ folgt aus unserer Tabelle U(0,0,z)=mgz. Damit sagt der Energiesatz

$$0 + mgH = \frac{m}{2}v^2 + 0.$$

Und das bedeutet

$$\boxed{\mathrm{H}=\frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad \mathrm{v}=\sqrt{2gH}}$$

Man erhält (mühelos) die Fallhöhe als Funktion der Aufschlageschwindigkeit oder die Aufschlageschwindigkeit als Funktion der Fallhöhe.

★ Die **Fluchtgeschwindigkeit von der Erdoberfläche.**

Jetzt betrachten wir das Gravitationsgesetz. Die zugehörige anziehende Kraft wird mit zunehmender Entfernung immer schwächer. Wir fragen: Kann man einem Projektil auf der Erdoberfläche eine solche Anfangsgeschwindigkeit geben, dass es nicht auf die Erde zurückstürzt? Reibung soll dabei natürlich vernachlässigt werden. Das Potential ist in diesem Fall U($\vec{x}$) $= -\frac{GM_{erde}}{r}$. Wieder sei $\vec{x} = (0,0,z)$. Also r=z>0.

Woran erkennt man, dass der Massenpunkt nicht zurückkehrt? Er muss bis nach r=∞ fliegen, muss sich immer weiter von der Erde Entfernen. Und dort, nur im Unendliche - ist das Potential in diesem Fall Null. Für jedes endliche r kommt ein echt negatives U heraus.

Jetzt wieder die beiden Konfigurationen:

- Zur Zeit t_1 werde der Punkt auf der Erdoberfläche mit Geschwindigkeit v abgeschossen.
- Zur Zeit t_2 komme er nach z=∞, d.h. an einen Ort mit Potentialwert Null.

Das gibt die folgende Gleichung für den bewegten Punkt der Masse m:

$$\frac{m}{2}V^2 - m\frac{GM_{Erde}}{R_{Erde}} = \frac{m}{2}v_\infty^2 + 0$$

Im Grenzfall kommt m mit der Geschwindigkeit Null im Unendlichen an. Dazu sollte die geringste Startgeschwindigkeit gehören. Dann ist die rechte Seite Null und es folgt

★ 3. Beispiel: Eine punktförmig idealisierte Schiffsschaukel der Masse M bewegt sich mit mit Überschlag. Der Kabinenpunkt hat den Abstand L von der Drehachse. Wie groß ist der Unterschied der Geschwindigkeit ganz oben und ganz unten?

▼ Unten: v_u h_u . Oben v_o $\mathrm{h}_o = h_u + 2L$

Der Energiesatz gibt:

$$\frac{1}{2}v_u^2 = \frac{1}{2}v_o^2 + g2L \quad \text{Aufgelöst} \quad v_o = \sqrt{v_u^2 - 4gL}$$

Das gibt für den absoluten Unterschied:

$$\boxed{\Delta v = v_u - v_o = v_u - \sqrt{v_u^2 - 4gL}}$$

oder den relativen

$$\boxed{\frac{\Delta v}{v_u} = \frac{v_u - v_o}{v_u} = \frac{v_u - \sqrt{v_u^2 - 4gL}}{v_u} = 1 - \sqrt{1 - \frac{4gL}{v_u^2}}}$$