

Nr. 2:

Hier war die Aufgabeninformation in einer Skizze zusammenzufassen (wie immer wieder vorgeführt und erläutert) und dann war die Linsengleichung verständlich anzuwenden. Dazu hatte es entsprechende Übungen gegeben. Am Ende erhielt man bei richtiger Rechnung (einfachstes Rechnen gehört zu den elementaren Kulturtechniken und das müssen Sie bei Ihrem desolaten Status üben, nicht nur immer fertige Rechnungen abschreiben wollen!)

Nr. 3. und 5: Forderte ausführlich im Kurs besprochene Leistungen. Mit wenig Konzentration und vorheriger Arbeit wäre das leicht gewesen.

Nr.4 Umgang mit Daten und konzentriertes Lesen der Aufgabe. Das war wieder schwer.

■ 1) (8 Pkt.) Ein Lichtstrahl wird in einem Punkt P (Ortsvektor \vec{x}_P) reflektiert. Der einfallende Strahl hat den Richtungsvektor \vec{e} . Ein Normalenvektor der reflektierenden Fläche sei \vec{N} .

$$\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie einen Richtungsvektor des reflektierten Strahles.
- b) Geben Sie eine Parametrisierung der reflektierten Geraden.
- c) Wie groß ist der Einfallswinkel (zwischen \vec{e} und \vec{N})

▼ a) Die Formel für den **Richtungsvektor des reflektierten Strahles** war $\vec{r} = \vec{e} - 2\vec{p}$ mit $\vec{p} = \vec{N} \frac{(\vec{e} \cdot \vec{N})}{\vec{N}^2}$. Das gibt (ohne Zwischenrechnung) sofort

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{(-3)}{3}. \quad \text{Also } \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2(-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor des reflektierten Strahles.

b) Die reflektierte Strahl geht durch P mit Koordinatenvektor \vec{x}_P . Also hat man folgende Parametrisierung der Bahn des reflektierten Strahles:

$$\vec{x}_g(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beobachtung: Der reflektierte Stahl verläuft in der x-y-Ebene!

c) Die Formel für den Winkel war Ihrer mathematischen Allgemeinbildung zu entnehmen. Alternativ haben viele mit einem rechtwinkligen Dreieck gearbeitet. Sei θ der gesuchte Winkel. Dann ist

$$\cos \theta = \frac{(\vec{e} \cdot \vec{N})}{|\vec{e}| |\vec{N}|} = \frac{-3}{\sqrt{15}} \quad \boxed{\theta=2.457}$$

Das ist der gesuchte (stumpfe) Winkel im Bogenmaß. Alternativ haben Sie im Dreieck $\cos \theta' = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{e}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Also $\theta' = \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = 0.684$. Erwartungsgemäß ist $\theta + \theta' = \pi = (3.141..)$.

▲

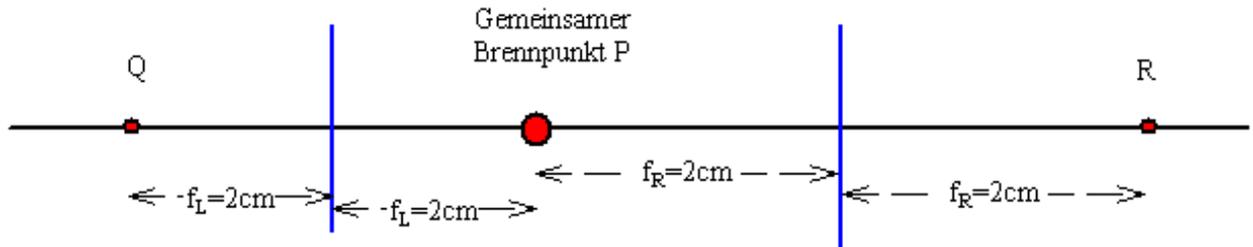
■ 2) (12 Pkte) Auf einer optischen Achse sind 2 (dünne) Linsen montiert mit Brennweiten f_L (links) und f_R (rechts). Und zwar so, dass der rechte Brennpunkt der linken Linse mit dem linken der rechten zusammen fällt. Es sei $f_L = 2$ und $f_R = 3$.

a) Fertigen Sie eine Skizze der Konfiguration. (Lineal!)

b) Was geschieht mit einem achsennahen achsenparallelen Bündel von Lichtstrahlen, das von links einfällt? (Rechts nach Verlassen der zweiten Linse?) (Verbale Begründung, neue Skizze)

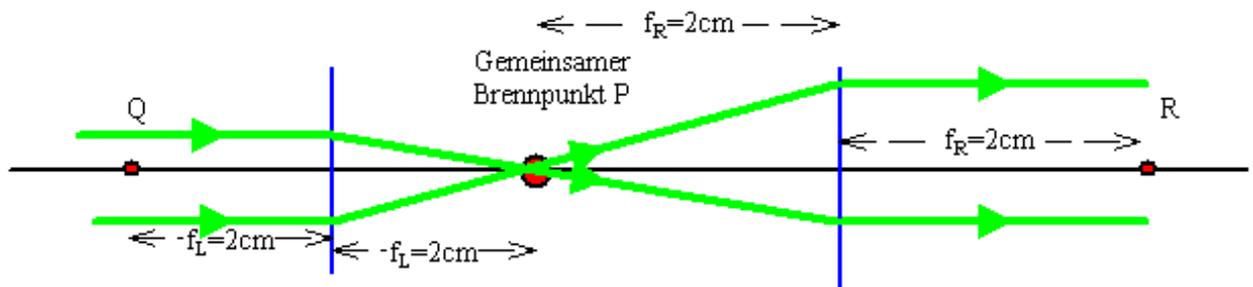
c) Im Abstand $g=5$ links von der linken Linse beginnt auf der Achse ein Büschel achsennaher Lichtstrahlen. Wie verhalten sich diese Strahlen nach dem Verlassen der rechten Linse? (Ergänzen Sie die Rechnungen erneut durch eine Skizze)

▼ a) (Was es hier für unvollständiges Gesudel gab!!!)



($f_R = 3\text{cm}$ korrigieren)

b) Von links kommt achsenparalleles Licht. (Einige scheinen nicht zu wissen, was achsenparalleles Licht ist. Das wurde immer wieder in der Vorlesung benutzt. Wieso sind die sich zu fein, um zu fragen??). Die linke Linse vereinigt die Lichtstrahlen im Brennpunkt ($g=\infty$ gibt $b=f_L$). Die rechte Linse macht aus Brennpunktstrahlen wieder ein achsenparalleles Bündel ($g=0$ gibt $b=\infty$). Der Durchmesser des Bündels verändert sich dabei wie 2:3.



($f_R = 3\text{cm}$ korrigieren)

c) Das von $g=5\text{cm}$ links von der Linse L ausgehende Lichtbündel vereinigt sich nach dem Linsengesetz in einem Punkte B mit der Koordinate b ($\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{b}$ gibt $b = \frac{10}{3}$. Positiv, also rechts von L, auch rechts von P!). Dieser Punkt B liegt ($f_L + f_R - b = \frac{5}{3}$) $\frac{5}{3}$ links von der rechten Linse. Das ist die neue Gegenstandsweite. ($\frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{b}$ gibt $b = -\frac{15}{4}$). Also $b = -\frac{15}{4} = -3.75$. Das gibt ein **virtuelles Bild** links von der rechten Linse.

▲

■ 3) (6 Pkt.) Ein Vektorfeld mit Quelle im Ursprung werde durch folgende Formel gegeben:

$$\vec{F}(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

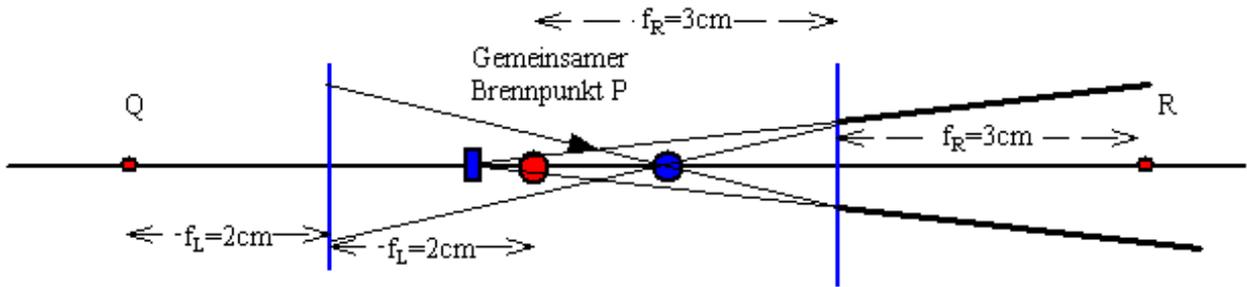


Figure 1:

- a) Nun werde die Feldquelle vom Ursprung nach $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschoben. Das ergibt eine neues Feld $\vec{G}(x, y, z)$. Geben Sie \vec{G} an.
- b) Sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wie groß ist der Unterschied der beiden Felder \vec{G} und \vec{F} an diesem Punkt \vec{x}_0 ?
 Oder auch: Wie ändert sich der Feldwert in \vec{x}_0 , wenn man die Quelle von $\vec{0}$ nach \vec{a} verschiebt?

Nach dem Kommentar zur Probklausur hätte man erwartet, dass die Konstruktion von $\vec{F}(\vec{x} - \vec{a})$ klar sein sollte. Aber nein! Erneut wird mit $\vec{F}(\vec{x}) - \vec{a}$ gearbeitet bzw. bei Ersetzen die Hälfte der x übersehen. Elementare Kulturtechnik: Eine einfache Regel ein oder zwei Minuten konzentriert anwenden können!

- ▼ a) Wegen $\vec{x} - \vec{a} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z \end{pmatrix}$ gibt das

$$\vec{F}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{G}(x, y, z) = \vec{F}(x - 1, y + 1, z) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z \end{pmatrix}$$

- b) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also $\vec{F}(2, -1, 0) = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{G}(2, -1, 0) = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der "Unterschied" ist ein **Vektor**. Denken Sie daran wie oft der Unterschied von Geschwindigkeiten oder Orten besprochen wurden. Das waren **immer** Vektoren. Also

$$\vec{G}(2, -1, 0) - \vec{F}(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch $|\vec{G} - \vec{F}|$ geht die Information über die Richtung verloren. $|\vec{G}| - |\vec{F}|$ ist Quatsch, trat aber auf. *Es gab hier auch bei den Besseren erstaunlich viele Rechenfehler. Un die Gier statt des exakten einfachen Endwertes möglichst rasch mit Dezimalbrüchen zu arbeiten. Das ist - wie mehrfach gesagt - nicht zu empfehlen!*

▲

■ 4) Gegeben seien die folgenden beiden Datensätze vom Auszählungstyp.

a ₁	a ₂	a ₃	a ₄
2.7	3.5	2.1	4.0

und

b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅
2.3	3.5	3.1	4.3	4.2

a) Berechnen Sie für beide Datensätze Mittelwert und Streuung. Was werden Sie als Endergebnis angeben (Form $\bar{a} \pm \dots$ und $\bar{b} \pm \dots$). für die Streuung dürfen Sie die $1/N$ -Formel verwenden.

b) Sie sind sich nicht sicher, ob bei den Messungen des Datensatzes b dieselbe Größe wie bei a gemessen wurde, oder ob eine Einstellung geändert wurde. Tragen Sie dazu die Mittelwerte samt den zugehörigen Streuungen geeignet graphisch auf, so dass Sie eine vernünftige Vermutung äußern können. Wie lautet ihr Urteil?

c) Angenommen beide Datensätze messen dasselbe. Dann steht man vor folgendem Problem:

Man hat zwei Datensätze a und b mit N_1 bzw N_2 Elementen. Man hat bereits die beiden Mittelwerte \bar{a} und \bar{b} berechnet. Nun vereinigt man beide Datensätze zu einem einzigen c mit jetzt $N_1 + N_2$ Elementen. Gesucht ist eine Formel für den Mittelwert \bar{c} des großen Datensatzes: $\bar{c} = \dots$. (Auf der rechten Seite sollen die Eingabegrößen N_1, N_2, \bar{a} und \bar{b} stehen. Aus denen ist der neue Mittelwert zu berechnen.)

Wieder Textkonzentration: Warum stan zu Anfang "Auszählungstyp"? Das war wichtig für die Datendarstellung. Und c) verlangte eine neue allgemeine Regel, nicht die Berechnung des konkreten Beispiels!

▼ a) Die Größen konnte man über die Formeln zu Fuß bestimmen oder mit Hilfe des Taschenrechners! Ergebnis für a ist 3.075 ± 0.73 und für b ist es 3.48 ± 0.79 für den Datenbereich.

b) Hier war etwas verständig zu denken und das gab Probleme. Wenn dasselbe gemessen wurde (ohne Relevanz der Reihenfolge - Auszählungstyp), dann ist das Problem: Unterscheiden sich die Mittelwerte oder liegen sie im Bereich zufälliger Streuung? Für die Mittelwerte ist der Streubereich: $3.075 \pm \frac{0.73}{\sqrt{4}} = 3.075 \pm 0.365$ bzw. $3.48 \pm \frac{0.79}{\sqrt{5}} = 3.48 \pm 0.353$. Das gibt noch immer eine deutliche Überlappung der $1-\sigma$ - Bereiche. D.h. in beiden Fällen dürfte dieselbe Größe gemessen sein, man hat es mit rein staitrischen Schwankungen zu tun. Bei der anderen Gruppe war der zweite Zahlwert dagegen 4.48 ± 0.353 . So dass die obere Grenze 3.43 von a und die untere 4.13 von b weit voneinander entfernt sind. hier wurde offensichtlich Unterschiedliches gemessen. *Einige wenige haben an die Mittelwertstreuung gedacht und dafür Sonderpunkte erhalten. Hier sollten übrigens ganze sinnvolle Sätze formuliert werden, was vielfach Probleme bereitete. Das sollte man aber können!*

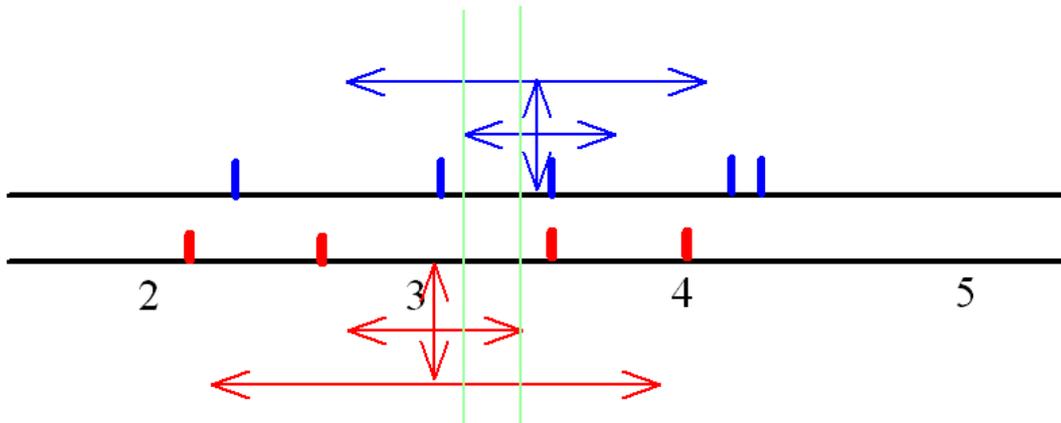
c) Die Aufgabenstellung verlangte eindeutig die allgemeine Regel, nicht die Behandlung des speziellen Falles. Wenn man den doch diskutieren wollte, muss man das sprachlich kenntlich machen. Etwa: "Wendet man die Formel auf unser Beispiel an, dann ergibt sich:...."

Die gesuchte Formel war

$$\bar{c} = \frac{N_1 \bar{a} + N_2 \bar{b}}{N_1 + N_2}.$$

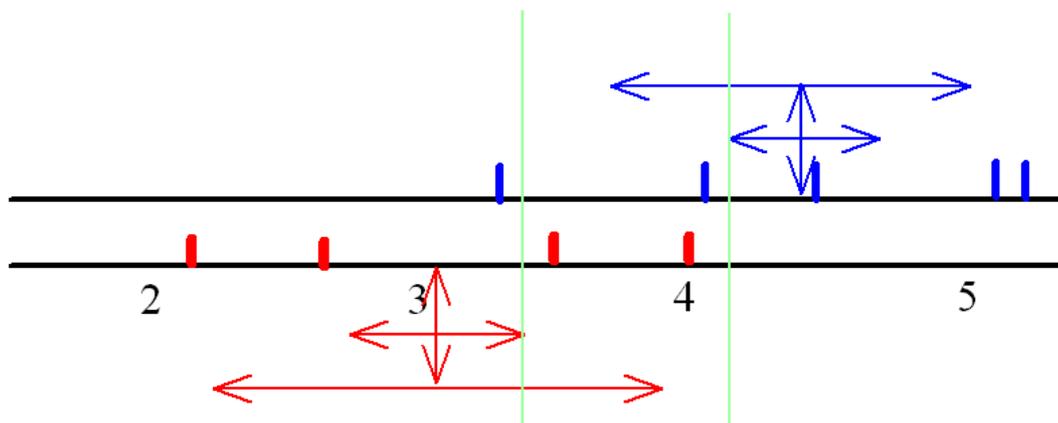
Vielfach richtig, aber daneben auch Quatsch wie $\bar{c} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$.

Jetzt zur sinnvollen auftragung der Daten:



Auf den beiden (schwarzen) Zahlengeraden sind die beiden Datensätze aufgetragen. Sie waren vom auszählungstyp, d.h. die Reihenfolge ist unwichtig. Rot der Datensatz a. Die vertikalen Pfeile geben die Lage der beiden Mittelwerte. Im Messungsfall wären das die Schätzwerte für den wahren Wert. Der breite horizontale Fall gibt die Datenstreuung. Einfach die uncodierte Beschreibung, dass die Daten über diesen Bereich streuen. Der schmale Pfeil gibt die zu erwartende Streuung des Mittelwertes. D.h. rein zufällig wird der Mittelwert bei neuen Messreihen in diesem Bereich streuen. Die grüne Markierung zeigt einen breiten Überlappungsbereich. Somit gibt es keinen Grund anzunehmen, dass die beiden Datensätze Unterschiedliches messen.

Ganz anders sah es mit den Datensätzen aus, die auf dem zweiten Klausurettel standen. Hier ergab sich folgendes Bild:



Die Mittelwerte sind weit voneinander entfernt. Rot müsste etwa um $2\sigma_{Mittel}$ nach rechts gehen und blau um $2\sigma_{Mittel}$ nach links. Dass beides der Fall ist, ist sehr unwahrscheinlich. Hier dürften die beiden Datensätze Unterschiedliches gemessen haben.

Falsch ist übrigens folgende Idee: "Die Streuungen der Datensätze sind ungefähr gleich. Also messen beide dieselbe Größe" So wurde mehrfach argumentiert. Es kommt aber auf die Lage der Mittelwerte und auf die dafür geschätzte Ungenauigkeit an. Ganz verschiedene Dinge können dieselbe Ungenauigkeit besitzen!

▲

■ 5) Eine physikalische Größe G hänge von der Zeit t ab. Also $G(t)$. Sie finden (mit physikalisch inhaltlichen Überlegungen), dass für die Änderungsrate $\dot{G}(t)$ gelten muss $\dot{G}(t) = \alpha t - \beta G(t)$. Außerdem wissen Sie, dass $G(1)=G_0 = 2$ ist. Jetzt soll näherungsweise $G(1.3)$ berechnet werden mit einer Schrittweite $\Delta t = 0.1$.

a) Falls wir mit Einheiten arbeiten und G eine Einheit $[G]$ hat: Welche einheiten haben dann die Konstanten α und β . (Denken Sie daran $\dot{G}(t)=\frac{dG}{dt}$ ist Rate, hat also welche Einheit?)

b) Jetzt für die Bestimmung von $G(1.3)$ können und sollen alle Einheiten fortgelassen werden. Nochmals $\Delta t = 0.1$, also drei Schritte. Weiter sei $\alpha = 1.1$ und $\beta = 0.5$. (Eine Tabelle ist angebracht!)

▼ Zunächst a). Das war überraschend schwach. Ich hatte ein ähnliches Beispiel einige Tage zuvor noch behandelt, einen Fehler eingebaut, was sofort Protest aus dem Auditorium hervorrief. *Wieso fragen die nicht, die das nicht verstehen? Es kamen plötzlich Argumente wie: Eine Konstante hat keine Einheit! Wozu hatten wir dann diese Sache für den Absorbtionskoeffizienten besprochen? Oder: Eine Rate hat dieselbe Einheit wie die Größe.*

Also: $[G]$ Einheit von G . Dann hat die Rate $\frac{dG}{dt}$ die Einheit $[G]s^{-1}$. Beide Summanden der rechten Seite αt und $\beta G(t)$ müssen daher auch diese Einheit haben. Also $[\alpha] = [G]s^{-2}$ und $[\beta] = s^{-1}$. Fertig.

Nun b). Das (Verstehen, wie die Lösung einer Differentialgleichung funktioniert, wie man sie näherungsweise erhält) war etwas, was über die Vorlesung zu verstehen war. Und ich werde den verständigen Umgang damit von allen Nachzählern verlangen.

Ausgehend von der Näherungsgleichung $G(t_0+\Delta t) = G(t_0) + \dot{G}(t_0)\Delta t$ war nur nachfolgendes Schema auszufüllen:

\	t=1	1.1.	1.2	1.3
G(t)	2	2.01	2.0305	2.061
$\dot{G}(t)$	0.1	0.205	0.305	
$\Delta G = \dot{G}(t)\Delta t$	0.01	0.0205	0.0305	

Starte mit $G(1)=2$. Dann die erste Spalte füllen. $\dot{G}(1)$ folgt über die Formel

$$\dot{G}(t) = 1.1t - 0.5G(t)$$

da man ja $t=1$ und $G(1)=2$ kennt. Das gibt dann ΔG . Jetzt kann man $G(1.1)$ eintragen und entsprechend die 2. Spalte füllen. Usw.

Am Ende steht die gesuchte Näherung für $G(1.3)$.

■ 6) Auf einer Bahn (x-Achse zwischen $x=0$ und $x=E$) findet ein Wettlauf zwischen einem Massenpunkt und einem Wellenpaket statt. Der Massenpunkt läuft von $x=0$ bis $x=z$ mit der Geschwindigkeit v_1 und danach von z bis e mit der Geschwindigkeit v_2 . Für das Wellenpaket gelte Gruppengeschwindigkeit = Phasengeschwindigkeit und die zugehörige Grundschwingung sei $A\sin(\omega t - kx)$.

Zahlenwerte: $v_1 = 5\frac{m}{s}$ und $v_2 = 8\frac{m}{s}$ und $\omega = 3.5s^{-1}$ und $k=0.5m^{-1}$. Schließlich sei $E=20m$ und $z=12m$. Wer kommt zuerst an bei gleichzeitigem Start?

▼ Wer das nicht hinkriegte.....▲

■ ■ Die Listen

Die Punktzahlen sind nicht ganz endgültig, können sich noch um 1-3 Punkte ändern.

30 Punkte und mehr

S.H	422350	30.5	
S.J	422977	40	
R.H	434190	33.5	
D.M.	335890	32.5	
M.H.	42073	32	
T.M	024183	38.5	
M.I.	230950	37.5	
D.K.	424004	34.5	
M.F.	422832	31	
D.D.	427820	33.5	
C.G.	139833	39.5	
M.B.	512760	29	

Zwischen 23 und 29 Punkte

M.H.	421380	28.5	
M.D.	510256	25	
A.S.	123539	24	
C.	413127	23	
S.V.	313490	24.5	
C.S.	324770	28	
J.M.	9829077	27.5	
K.S.	122872	25	
O.S.	230898	27	
D.K.	429092	25.5	
T.G.	426330	23	

D.	430932	26.5	
N.R.	445686	24	
H.P.	413997	24.5	
C.L.	428540	26.5	
R.D.	425683	25.5	
A.H.	420186	26.5	
S.I.	126254	27	
T.S.	331658	25.5	

Und nun die Liste mit denen, die es vermutlich mit Arbeit noch schaffen können, weil bereits etwa vorhanden ist:

L.B.	422940	16.5	
R.M.	327655	20.5	
D.P.	410116	19	
J.S.	410582	18	
M.S.	429539	14.5	
R.R.	228540	16	
S.K.	421263	21.5	
D.K.	232050	19	
A.K.	429682	16	
M.P.	0231504	21	
C.V.	231232	19	

S.L.	412273	20.5	
S.H.	9728950	16.5	
S.S.	512054	13.5	
M.M.	422494	19	
C.A.	424452	20	
N.S.	424309	19	
M.L.	422449	13.5	

Ich hoffe, keinen vergessen und auch keinen Fehler eingebaut zu haben und keinem Unrecht getan zu haben.

■ Noch eine Information zur **Probeklausur**: Das folgende Bild zeigt, dass diese sich z.T. recht günstig ausgewirkt hat. Horizontal die Punktezahl der Probeklausur, Vertikal die der Hauptklausur. Eine große Gruppe derjenigen, die ich damals ermahnt habe, hat sich nach verbessert! Ist nach oben gerutscht weg von der Geraden gleicher Punktezahl. Man hätte sich das auch von den Besseren gewünscht, aber die sagten sich wie üblich: Für mich reicht es. Blau am Rande sieht man die Verteilung der ganz Schwachen (Unter 14 Punkte). Diese haben meist an der Probeklausur nicht teilgenommen!

