Brückenkurs Physik 2005

Übung 13. 2. 2005

☐ (1.1): Im Zusammenhang mit dem Stichwort "Vergrößerungsleistungen optischer Instrumente" findet man drei herausgearbeitete Begriffe, die unterschiedliche Aspekte des Themas quantitativ erfassen. Es handelt sich dabei um folgende Begriffe:

- Vergrößerungsfaktor
- Abbildungsverhältnis
- Auflösungsvermögen (eines Gerätes, einer Methode...)

Zu jeder dieser "Bezeichnungen" gehört eine den Sachverhalt quantifizierende Zahlangabe. Überlegen Sie sich vermittels der **sprachlichen** Bedeutung dieser Worte, worum es dabei physikalisch inhaltlich gehen wird.

☐ (1.2) *Herausarbeiten des Wesentlichen*

Welche Eigenschaften sind im Zusammenhang mit der Beschreibung des Verhaltens von Licht wesentlich und voneinander weitgehend unabhängig ? Was sollte man messend erfassen und quantifizieren?

> **(Versuchen Sie eine Analogie zum Schall herzustellen!** Es kann günstig sein, die Antwort in Form von circa fünf Fragen zu geben! Die Antworten sollten prüfbar sein und Erklärungen und korrekte Vorhersagen sowie technische Hilfsmittel erlauben)

▼

a) Wie breitet sich Licht aus?
b) Was ist "Farbe (des Lichtes)"?
c) Was die Stärke oder Intensität des Lichtes und
d) Welche Wechselwirkungen hat Licht mit Materie?
e) Wie entsteht Licht

★ Zu a) **: Die Idealisierung der Lichtausbreitung (für einen bestimmten Gültigkeitsbereich) erfolgt durch Lichtstrahlen. Die Gültigkeitsgrenzen sind zunächst vage, aber in vielen (alltäglichen) Fällen unproblematisch. Technisches Hilfsmittel zur Herstellung von Lichtstrahlen sind etwa Blenden. In homogenen Medien (Licht, Wasser Vakuum) breiten sich die Lichtstrahlen geradlinig aus.**

Benötigte Mathematik: Elementare Vektorrechnung.

Diese "geometrische Optik" wird unser erstes Kursthema sein.

★Zu b): Mit einem Prisma (Gitter) läßt sich Licht in solches reiner Farben zerlegen und das "reine" zerlegte Licht kann durch eine Zahlangabe ("Wellenlänge") charakterisiert werden. Das erweist sich als Spezialfall einer elektromagnetischen Welle. Aus dem reinen Licht kann man dann durch Überlagerung beliebiges Licht zurückgewinnen (Benötigte Mathematik: Vektorrechnung und Integration/Fouriertransformation)

Bei Besprechung dieses Punktes sind wir etwas auf das elektromagnetische Spektrum eingegangen und die Darstellung auf einer logarithmischen Skala. Beides wird im Kurs weiterhin benötigt

★ Zu c): Lichtstrahlen enthalten Energie, die man auf unterschiedliche Weise in andere Energieformen umwandeln und in dieser anderen Form messen kann (Photozelle).

Es zeigte sich, dass Ihnen das wichtige und nützliche Energiekonzept noch sehr fremd zu sein scheint. Hier sind Anstrengungen erforderlich.

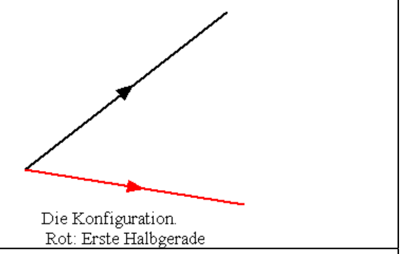
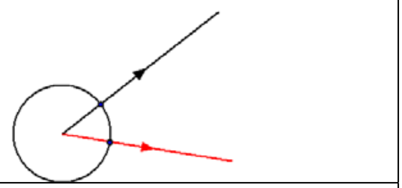
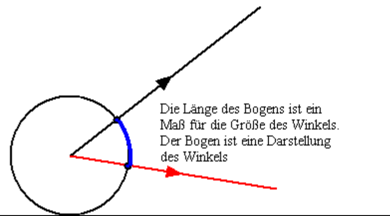
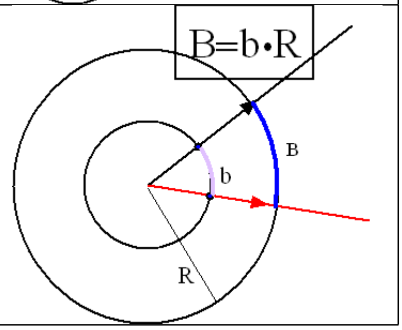
★ Zu d): Nach viel Erfahrung: Die Wechselwirkung ist nach Idealisierung weitgehend reduzierbar auf "Reflexion und Streuung" / "Brechung" / "Absorbtion".

Hierzu behandeln wir: Reflexion, Brechung und Absorbtion!

Zu e) Hier wird es schwierig.

☐ (1.3) "Winkel" und "Bogenmaß des Winkels. Geben Sie eine tragfähige Definition, die eine Verallgemeinerung auf den "Raumwinkel" zuläßt oder besser "einfach macht" . Wie lautet die Derfinition?

▼

Die Figur (Konfiguration) zweier von einem Punkt ausgehender Halbgeraden sowie aller dazwischen liegenden bildet einen **Winkel.**	
Lege einen Kreis mit Radius 1 um den Scheitel. Der Winkel schneidet aus diesem Kreis ein Bogenstück heraus. (Dies Bogenstück ist eine alternative Darstellung des Winkels.	
Unterscheide: Winkel und Größe oder *Größenmaß* des Winkels. Letzteres ist die Bogenlänge. Sie ist einheitenfrei.	
Legt man einen zweiten Kreis mit Radius R um den Scheitel, dann schneidet der Winkel auch daraus eine Bogen. Hat der Winkel die Größe b (im Bogenmaß), dann hat der Bogen im zweiten Kreis die Länge B=b·R.Das kann allgemein als Def. der Bogenlänge benutzt werden.	

Diese Definition kann jetzt schrittweise auf den dreidimensionalen Fall übertragen werden. Aus Einheitskreis wird Oberfläche der Einheitskugel. Ein Raumwinkel ist ein Büschel von Halbstrahlen, die im Ursprung beginnen und dann auf dem einheitskreis ein Flächenstück a herausschneiden. Die Fläche (Größe) von a ist dann das Größenmaß des Raumwinkels a. Sei $\Phi(a)$ diese Größe

Legt man eine Kugel mit Radius R um den Scheitel, dann schneidet der Raumwinkel daraus ein Flächenstück A heraus. Für dessen Flächengröße $\Phi(A)$ gilt die Formel $\Phi(A) = R^2 \cdot \Phi(a)$.

Hierzu wurden einige Erläuterungen gegeben.

Achtung: Wenn keine Verwechselungsgefahr besteht, dann kann man statt "Größe des Winkels" auch einfach (sprachlich mißbräuchlich) "Winkel" sagen. Vielfach ist das jedoch problematisch, wie die Beispiele von "Definitionen" des Raumwinkels zeigten. Der Nutzen ist ein weniger aufwendiger Text. ▲

☐ (1.4) Der Wert und auch der Zahlwert der Größe einer Reihe spezieller Winkel bzw. Raumwinkel sollte einem vertraut und stets verfügbar sein. Etwa: Ein rechte Winkel (90^0) hat die Größe $\frac{\pi}{2} \approx 1.58$. Fertigen Sie eine kleine zugehörige Liste und überlegen Sie sich, was man sich konkret merken muss, um den Rest stets reproduzieren zu können! (Das ist sehr wenig!)

▼ ▲

☐ (1.5) *Diese Frage hängt eng mit der vorigen zusammen.*

Welche Formeln sollte man zur Geometrie von Kreis, Kugel und ähnlichen Figuren vornehmlich erwarten? Was kann man vorab über sie sagen und was ist jeweils zusätzlich zu merken?

☐ (1.6) *Herkunft und Bedeutung der folgenden Frage wurde besprochen: Einem Rechenkünstler wurde eine 100-stellige Zahl genannt und er berechnete dazu im Kopf innerhalb von 12 Sekunden die 13. Wurzel.*

Wieviel 100-stellige Zahlen gibt es etwa, aus denen man die 13. Wurzel ziehen kann, d. h. für die diese Wurzel eine ganze Zahl ist? (Zum Verständnis: $\sqrt{64} = 8$ ist ganz, $\sqrt{65}$ nicht. Wieviel zweistellige Zahlen gibt es mit ganzer Wurzel?)

▼ Die kleinste 100-stellige Zahl ist 10^{99}. Siehe die Vorüberlegung. Sie liefert auch die kleinste Wurzel, nennen wir sie w_k. Die größte dagegen ist 10^{100}. Sie liefert die größte Wurzel, die wir w_g nennen. Alle ganzen Zahlen zwischen diesen beiden Wurzelwerten liefern daher 100-stellige Zahlen der gesuchten Art! (Notfalls am Beispiel der zweistelligen Zahlen nachvollziehen!)

Jetzt berechnen wir w_k und w_g :

$$
\begin{aligned}
w_k &= \sqrt[13]{10^{99}} = 10^{\frac{99}{13}} \approx 4.1 \times 10^7 \\
w_g &= \sqrt[13]{10^{100}} = 10^{\frac{100}{13}} \approx 4.9 \times 10^7
\end{aligned}
$$

Dazwischen liegen etwa 8×10^6, also 8 Millionen ganze Zahlen, aus denen der Computer für den Rechenkünstler eine zufällig auswählte.

Eine größere Genauigkeit ist im Zusammenhang mit der Fragestellung hier nicht sinnvoll. (Beachten Sie das Wörtchen "etwa" in der Frage ▲

☐ (1.7) Wie groß ist etwa die (skalare) Umlaufgeschwindigkeit der Erde um die Sonne in m/s? Verwenden Sie hierzu die folgenden Angaben:

(Vereinfachte) Bewegung: Erfolgt auf einer Kreisbahn mit Radius $R = 149.6 \cdot 10^6$ km

Umlaufsdauer T: Ein Jahr mit 265 Tagen

Formel für Umfang des Kreises $U = 2\pi r$

a) Wieviel mal schneller als ein 100-Meterläufer bewegt sich die Erde etwa?

▼

Inspektion

1) Die zu verwendende Formel für die (skalare) Geschwindigkeit ist:

$$v = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{benötigte Zeit}}$$

2) Auswertung in 3 Schritten: Die benötigten Größen bestimmen und mit Einheiten Einsetzen/ Sortieren / Auswerten und Endform . Dabei auf sinnvolle Genauigkeit des Ergebnisses achten.

3) Die Zusatzfrage:

Bezeichnung einführen, so dass das Endergebnis als Gleichung formuliert werden kann. Wie wollen das (gefragte) Verhältnis mit a bezeichnen. Dann hat das Ergebnis die Form einer Gleichung a=.... Als Formel (zu der Formulierung " ... Wieviel mal schneller...") haben wir die Beziehung:

$$v_{Erde} = a \cdot v_{100Meter}$$

Lösung

$$v=\frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{benötigte Zeit}} = \frac{2\pi R}{T} \approx \frac{6.3\cdot 149.6\cdot 10^6\cdot 10^3 m}{(3.65\cdot 10^2)\cdot 2.4\cdot 3.6\cdot 10^4 s} \approx \frac{6.3\cdot 149.6}{3.65\cdot 2.4\cdot 3.6}\cdot \frac{10^9}{10^6}\frac{m}{s} \approx 29.9\cdot 10^3\frac{m}{s}$$

Für das gesuchte Verhältnis a ergibt sich:

$$a=\frac{30\cdot 10^3\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s}} = 3\cdot 10^3 \quad \text{Nicht genauer!}$$

Kommentare

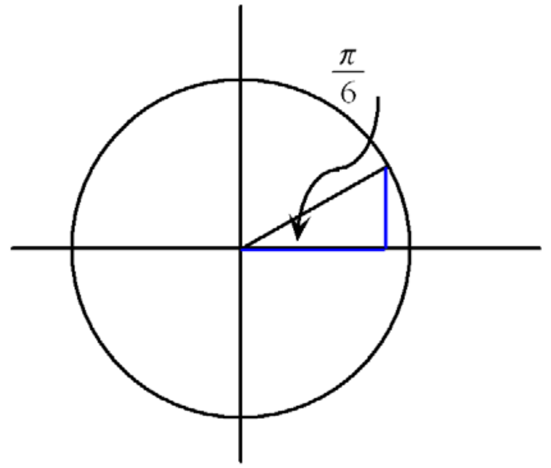
♦ Hier ist offensichtlich "skalare" Geschwindigkeit gemeint.
♦ "$\approx$" angenähert wird vielfach stillschweigend durch "=" ersetzt.
♦ Zur Bewertung des Größenunterschiedes einige Analogiebildungen: Der Unterschied ist etwa genausogroß wie eine Stunde größer als eine Sekunde ist!
Oder: Das wären 33 cm von 100 Metern! ▲

14.2.2004

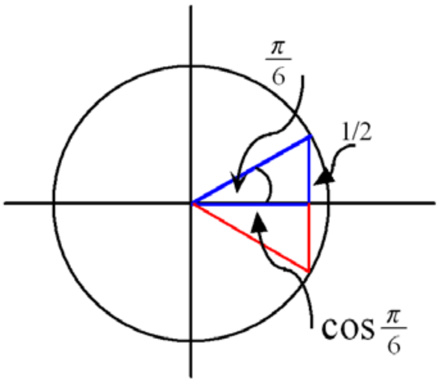
☐ (1.8) Bestimmen sie den Wert von sin(x) und cos(x) für x=$\frac{\pi}{3}$.
▼ Man geht derartige Aufgaben in mehreren Schritten an:

- Vertrautmachen mit dem Inhalt.
- Möglichst eine Skizze, daraus Lösungsidee entwickeln
- Lösung
- Ergebnis und Kommentar.

Wie war sin und cos definiert? In der zugehörigen Figur den Winkelwert $\frac{\pi}{3}$ wählen.

	Gesucht: Die Längen der beiden blauen Strecken. **Idee: Spiegele Dreieck** nach unten. Dann erhält man ein gleichseitiges Dreieck! Alle drei Winkel sind dann $\frac{\pi}{3}$ groß, die Seitenlänge ist 1

Das gibt folgendes Bild:



Für das blaue rechtwinklige Dreieck gibt der Pythagoras
$\cos^2\frac{\pi}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$
Also

$\boxed{\cos\frac{\pi}{6} = +\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}}$

$\boxed{\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}}$

Da der gesuchte cos-Wert positiv ist, ist die positive Wurzel zu nehmen. Den Sinuswert list man aus der Zeichnung ab. Alle drei Seiten des gleichseitigen Dreiecks haben ja die Länge 1!

(1.9) Die vektoriellen Parametrisierungen einer Reihe von Figuren im Raum wurden besprochen. In allen Fällen war das zu interpretieren als aus Stücken zusammengesetzter Weg, der vom Ursprung zum betrachteten Punkt auf der Figur führt. In der Ortsvektorbeschreibung ist der Weg geometrisch zu konstruieren, im Koodinatenfall liegt ein achsenparalleler Weg vor.

Figuren vom Kurventyp. Ein Parameter bzw. Freiheitsgrad

$\underbrace{\vec{x}_g(a)}_{\text{Bezeichnung}} = \underbrace{\vec{x}_p + a\vec{d}}_{\text{Berechnung}}$	**Gerade** g	Gehe mit $\vec{x}_P$ zu einem Punkt P auf der Geraden und von da in Richtung $\vec{d}$ weiter. Wie weit, wird durch a festgelegt.

$$\underbrace{\vec{x}^K_{Kreis}(\varphi)}_{\text{Bezeichnung}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Berechnung}}$$

Kreis (um Ursprung) mit Radius r in der 1-2-Ebene!

Gehe $\cos(\varphi)$ in 1-Richtung, dann $\sin(\varphi)$ in 2-Richtung. Das gibt Punkt auf Kreis mit Radius r

2 leichte Änderungen dieser Parametrisierung:

$\underbrace{\vec{x}^K_{\text{Si}\,rale}(\varphi)}_{\text{Bezeichnung}} = \underbrace{\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ H\frac{\varphi}{2\pi} \end{pmatrix}}_{\text{Berechnung}}$	**Spirale** (um 3-Achse) Radius r H ist Höhendifferenz pro Umlauf!	Vom Kreispunkt aus geht man um H$\frac{\varphi}{2\pi}$ weiter in z-Richtung "Direkt in die Höhe"
$\underbrace{\vec{x}^K_{Ellipse}(\varphi)}_{\text{Bezeichnung}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ b\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Berechnung}}$	**Ellipse** (um Ursprung und achsenparallel) a und b sind die Längen der beiden Halbachsen.	Gehe $\cos(\varphi)$ in 1-Richtung, dann $\sin(\varphi)$ in 2-Richtung. Das gibt Punkt auf Kreis mit Radius r

Die beiden Brennpunkte der Ellipse liegen auf der Strecke mit der großen Halbachse a. Sie erfüllen die Gleichung a$^2 = e^2 + b^2$, wenn e der Abstand Ursprung-Brennpunkt ist ("Exzentrizität")

Figuren vom Flächentyp. Zwei Parameter bzw. Freiheitsgrade

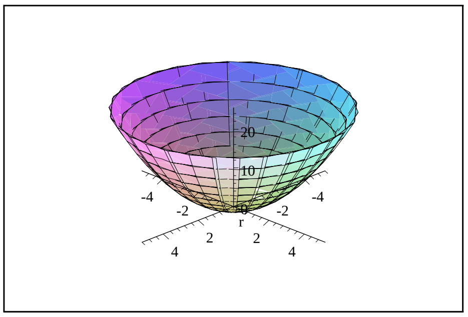
$$\underbrace{\vec{x}_E(u,v)}_{\text{Bezeichnung}} = \vec{x}_P + u\vec{e} + v\vec{d}$$

Ebene im Raum

Gehe nach P auf E, dann inRichtung $\vec{e}$ Betrag durch u fixiert und dann in Richtung $\vec{d}$, Weite durch v festgelegt.

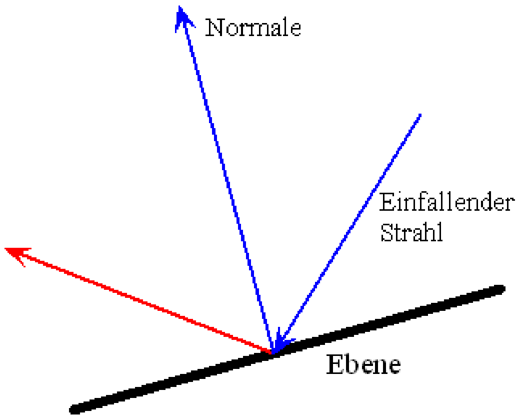
und noch ein Rotationsparaboloid:

$$\underbrace{\vec{x}^K_{RP}(r,\varphi)}_{\text{Bezeichnung}} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma r^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \sigma r^2 \end{pmatrix}$$



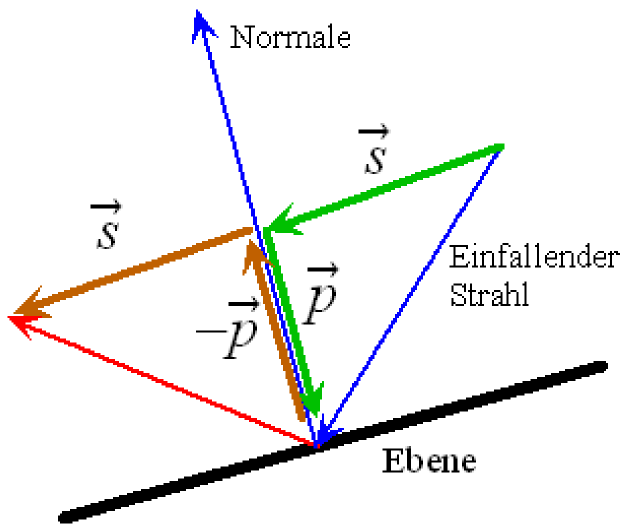
☐ (1.10) Ein Lichtstrahl werde an einer Ebene E im Punkte P reflektiert. In diesem Punkt errichten wir die Normale. $\vec{n}$ sei ein Richtungsvektor dieser Normalen.! Der einfallende Lichtstrahl habe habe den Richtungsvektor $\vec{e}$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Wegkonzeptes eine Formel für einen Richtungsvektor $\vec{r}$ des reflektierten Strahles.

Wie immer zunächst eine Skizze (wobei die Reflexionsebene senkrecht auf der Papierebene steht!)



Die beiden blauen Größen sind gegeben. Der rote Vektor ist gesucht.

Jetzt besschreiben wir den einfallendan Strahl durch einen anderen Weg, den wir durch die Formel $\vec{e} = \vec{s} + \vec{p}$ darstellen. Dabei gehört $\vec{s}$ zum Lot auf die Normale und $\vec{p}$ hat die Richtung der Normalen.(Der grüne Weg!) Mit Hilfe dieser beiden Teilwege kann man sofort einen Weg für den reflektierten Strahl aufbauen, der ja das Reflexionsgesetz erfüllen muss! (Der braune Weg!)

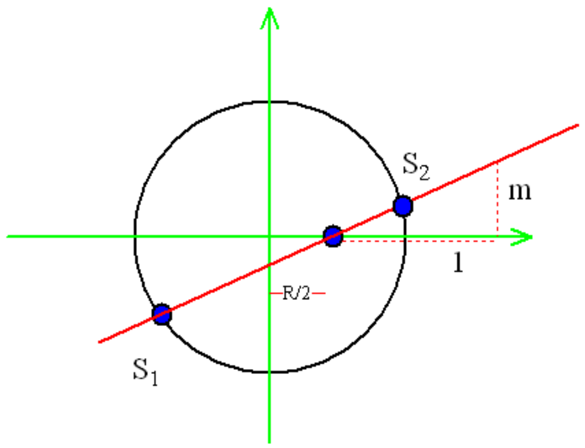


Als Formel
$\vec{e} = \vec{s} + \vec{p}$ und $\vec{r} = -\vec{p} + \vec{s}$
$\boxed{\vec{r} = -\vec{p} + \vec{s} = \vec{e} - 2\vec{p}}$
Man benötigt noch eine Methode zur Bestimmung Berechnung von $\vec{p}$.

☐ (1.11) Der Ursprungskreis mit Radius R der Ebene soll mit der Geraden g geschnitten werden. Die Gerade g gehe mit Steigung m durch den Punkt $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R \\ 0 \end{pmatrix}$.

▼ Die Konfiguration der Aufgabe gibt mit Sicherheit 2 Schnittpunkte, da $\vec{a}^K$ im innern des Kreises liegt. Deren zu bestimmende Koordinatenvektoren seien $\vec{s}_1^K$ und $\vec{s}_2^K$. R und m sind äußere Parameter, sie werden also in den Rechenausdrücken des Endresultates auftreten. Für m=0 ist die Lage der Schnittpunkte klar.

Jetzt die Skizze mit den Parametrisierungen der beiden Figuren:



$$\vec{x}_g^K(u) = \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{2} + u \\ u \cdot m \end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_{Kreis}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Die Schnittbedingung $\boxed{\vec{x}_g^K(u) = \vec{x}_{Kreis}(\varphi)}$ liefert über die Gleichheit der Wegstücke zwei Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{R}{2} + u\right) = R\cos\varphi & \text{u und } \varphi \text{ unbestimmt, gesucht.} \\ mu = R\sin\varphi & \text{R,m vorgegeben, äußere Parameter.} \end{array}$$

Wir machen daraus (mit einem Trick - Gleichungen quadrieren und addieren, Pythagoras!) eine Gleichung für u allein. Das ist eine quadratische Gleichung, die wir schematisch (Normalform, p-q-Formel) lösen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{R}{2}+u\right)^2+m^2u^2 &= R^2 \\
(1+m^2)u^2+R\cdot u-\frac{3}{4}R^2 &= 0 \\
u^2+\boxed{\tfrac{R}{1+m^2}}u+\boxed{-\tfrac{3R^2}{4(1+m^2)}} &= 0 \\
u_{12} &= -\frac{R}{2(1+m^2)}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4(1+m^2)^2}+\frac{3R^2}{4(1+m^2)}} \\
&= -\frac{R}{2(1+m^2)}\pm\frac{R}{2(1+m^2)}\sqrt{4+3m^2}
\end{aligned}$$

Setzt man diese Parameter in die Geradengleichung ein, erhält man die gesuchten Schnittpunkte. Genauer

$$\vec{s}_1=\vec{x}_g(u_2) \text{ und } \vec{s}_2=\vec{x}_g(u_1).$$

Für m=0 folgt insbesondere $u_{12}=-\frac{1}{2}R\pm R$. Das ist einzusetzen in $\vec{x}_g(u)=\begin{pmatrix}\frac{R}{2}+u\\0\end{pmatrix}$ (wegen m=0!). Also $\vec{s}_1=\vec{x}_g(-\frac{3}{2}R)=\begin{pmatrix}-R\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{s}_2=\vec{x}_g(\frac{1}{2}R)=\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}$ wie es sein muss! Auf das einsetzen im allgemeinen Fall verzichten wir.

Bei Bedarf können wir durch Rückeinsetzen auch den Winkel φ bestimmen. Am besten bestimmt man dazu einfach cosφ und sinφ. Daraus folgt dann φ.

Übung 14.2,2005

☐ (1.11) Von einem Punkt P auf der (positiven) x-Achse geht ein Lichtstrahl in Richtung $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ aus. Sein Abstand zum Ursprung sei 4. Wo trifft der Strahl die y-z-Ebene (d.h.x=0 muss gelten). Den Treffpunkt bezeichnen wir mit Q. Fertigen Sie eine Skizze der Konfiguration, die den räumlichen Verlauf des Strahles verdeutlicht. Wie sieht der achsenparallele Weg von P nach Q aus? (Differenzvektor)

▼ Die Gerade läßt sich wie folgt parametrisieren:

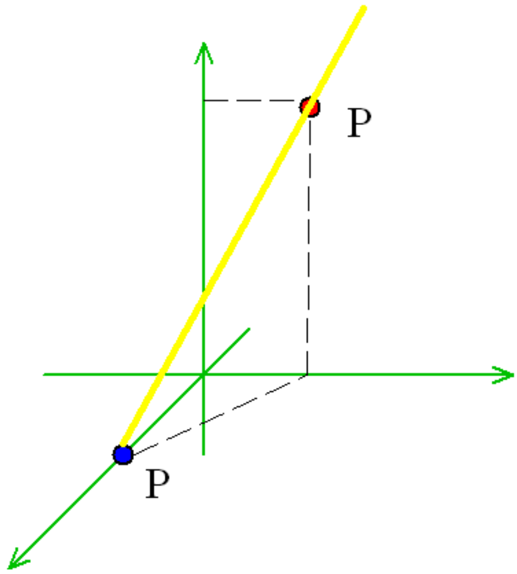
$$\vec{x}_L(u)=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2u\\u\\3u\end{pmatrix}$$

(x-Weg)=0 verlangt u=2. Das gibt eingesetzt den Koordinatenvektor von Q zu

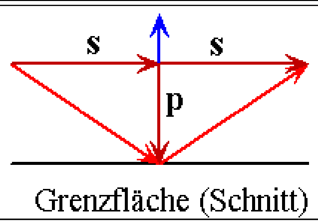
$$\vec{x}_Q=\vec{x}_L(2)=\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}$$

Der Weg von P nach Q wird durch die Differenz $\vec{x}_Q-\vec{x}_P$ gegeben. Also

$$\vec{x}_Q-\vec{x}_P=\begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix}$$



Das Schema zur Berechnung des reflektierten Richtungsvektors:



$\vec{e} = \vec{s} + \vec{p}_{\vec{n}}$
$\vec{r} = -\vec{p}_{\vec{n}} + \vec{s} = \vec{e} - 2\vec{p}_{\vec{n}}$
$\boxed{\vec{p}_{\vec{n}} = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{n})}{\vec{n}^2}\vec{n}}$

$\vec{n}^K = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \vec{e}^K = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$
$(\vec{e}\cdot\vec{n}) = e_1 n_1 + e_2 n_2 + e_3 n_3$
$\vec{n}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ mit $n_1^2 = (n_1)^2$ usw.

▼⧫ $\vec{r}$ ist hiermit zu bestimmen.

⧫ Zunächst $\vec{p}_{\vec{n}}$ bestimmen über $\vec{p}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \frac{ZZZ.}{NNN}$ und jetze Zähler und Neener berechnen und einfügen .

⧫ Dann $\vec{r} = \vec{e} - 2\vec{p}_{\vec{n}}$ berechnen. (Häufig Bruchrechenprobleme beim Zusammenfassen)

⧫ Bei Bedarf kann jetzt $\vec{s}$ über $\vec{s} = \vec{e} - \vec{p}_{\vec{n}}$ berechnet werden.

▼ (1.12) Beispielaufgabe:

Gebeben: $\boxed{\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ Dann folgt

$$\boxed{\vec{p}_{\vec{n}}=\left(\frac{-1}{6}\right)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}}$$

$$\vec{r} \;=\; \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} - 2\cdot\left(\frac{-1}{6}\right)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}3\\-6\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{\vec{r}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\\10\end{pmatrix}}$$

Der gesuchte Vektor.
Test : $|\vec{r}| = |\vec{e}|$.

Und weiter die senkrechte Komponente:

$$\vec{s} \;=\; \vec{e}-\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} - \left(\frac{-1}{6}\right)\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix}6\\-12\\18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{\vec{s}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-11\\19\end{pmatrix}}$$

Test $(\vec{s}\cdot\vec{p}) = 0$

(1.13) Rechenschema Vektorprodukt: Komponentenform: (zyklisch 123 / 231 / 312 legt die Reihenfolge der +Beiträge fest.)

$$\begin{pmatrix}(a\times b)_1\\(a\times b)_2\\(a\times b)_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}?\\?\\?\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

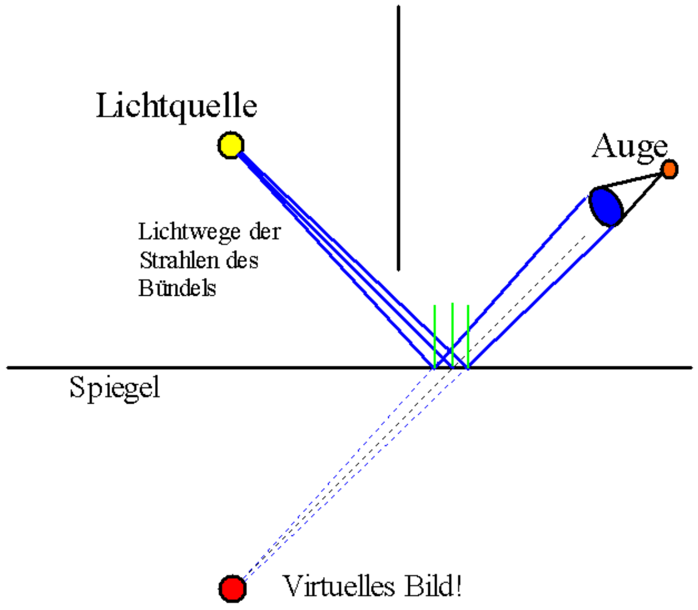
$$\begin{pmatrix}3\cdot1-(-2)(-3)\\(-2)2-1\cdot1\\1(-3)-3\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-3\\-5\\-9\end{pmatrix}}}$$

Dazu: **Das Vektorprodukt steht auf beiden Faktorn senkrecht. D.h., wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unabhängige Richtungsvektoren einer Ebene sind, dann ist $\vec{a}\times\vec{b}$ ein Richtungsvektor der Normalen dieser Ebene!**

□ (1.14) Wie versteht man mit Hilfe des Lichtstrahlmodelles das " **Sehen von Gegenständen"**
Hierbei wurde das Konzept der Fokussierung eines Bündels von Lichtstrahlen eingeführt!

Anwendungen der **Vektorrechnung und des Reflexionsgesetzes** :

(1) Die von der Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen des Strahlenbündels werden nach dem Brechungsgesetz reflektiert und gelangen zum Auge. Geometrisch ist das ein Bündel, das vom "virtuellen" Spiegelbild der Quelle ausgesandt wird. Die Augenlinse fokussiert diese Bündel in einem Punkt auf der Netzhaut.



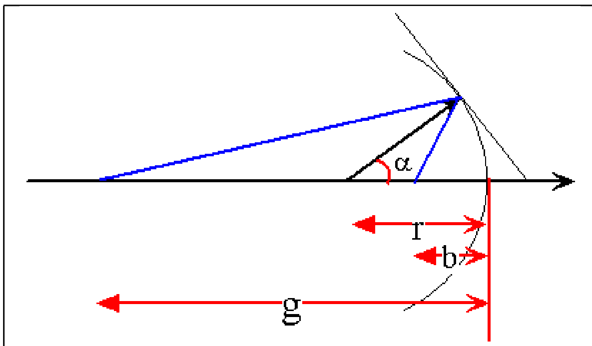
☐ (1.15) Konstruiere alle Bildpunkte zu zwei Spiegeln, die einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ bzw von $\frac{\pi}{4}$ miteinander bilden.

Das Ergebnis der **Suche nach Fokuspunkten** beim Kugelspiegel sieht (nach längerer Rechnung und nach angemessener Näherung) wie folgt aus.

Ein achsennahes Strahlenbündel, das im Punkt $\begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der Achse startet fokussiert im Punkte $\begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$. Dabei soll der Mittelpunkt des Kreises / der Kugel bei $\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen.

Zwischen diesen drei Größen besteht dann die folgende Beziehung:

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}}$$

	$\boxed{\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}}$ $\frac{2}{r} = \frac{1}{(\frac{r}{2})}$ *Modular einsetzen .*	Vorzeichen? konkaver Sp. Optikn/Kaustik

☐ (1.15) Vertrautmachen mit der Formel: Was bedeutet g=r?, Was g oder b sehr groß bzw∞ ? Was bedeutet negatives r?

☐ (1.16) Löse die Formel nach b auf: ▼

$$\boxed{b=\frac{rg}{2g-r}}$$

▲

☐ (1.17) Die Erde habe eine reflektierende Oberfläche. Wo spiegelt sich der Mond? (Welche Zahlwerte werden benötigt? Verallgemeinerungsfähige Präsentation der Antwort!)

▼Wir finden (etwa über Hyperphysics) Erdradius =6400km=6.4·$10^6 m$. Und für den Abstand Erde-Mond 384·$10^6 m$. Da der Spiegel konkav ist, ist $\boxed{r = -6.4 \cdot 10^6 m}$ zu nehmen und g=(384 − 6.4) $10^6 m \approx 3.8 \cdot 10^8 m$. Auflösen der Formel $\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}}$ nach b gibt

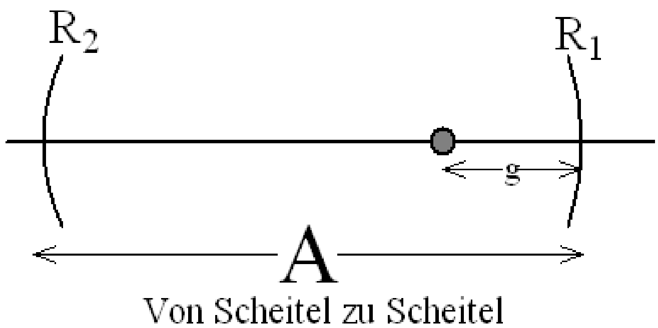
$$b = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{g}} \quad \text{mit Zahlenwerten} \quad \frac{1}{\frac{2}{-6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{378 \cdot 10^6}} m = -3.2 \cdot 10^6 m \approx -\frac{1}{2} Erdradius$$

Das negative Zeichen zeigt, dass das gespiegelte Bild im Innern der Kugel liegt, etwa am halben Erdradius. Der Mond ist soweit entfernt, dass seine Strahlen ungefähr parallel eintreffen, so dass sein Bild etwa im Brennpunkt liegt! . ▲

☐ (1.18) Aufgaben des folgenden Typs sollten Sie verstehen und beherrschen. Mit dem angegebenen Lösungschema sollte das nicht zu schwer sein..

Auf einer optischen Achse befinden sich zwei reflektierend Kugelspiegel mit den Angaben der Skizze. Dazwischen ein Gegenstand. Dieser erzeugt im ersten Spiegel (Radius R_1) ein Bild. Wo liegt das Bild des ersten Bildes, das von der Reflexion am zweiten Spiegel (Radius R_2) erzeugt wird?

▼ Dazu zunächst unbedingt eine Skizze mit dem Gegenstand



Jetzt wenden wir die "Linsengleichung" auf die beiden Konfigurationen an und finden mit entsprechender Rollenzuweisung

Allg. Formel	r	g	b	posit. Richtung
1.Spiegelung	+R_1	g	b_1	nach links
Spiegelung Bildes	R_2	A-b_1	b_2	nach rechts

Nach früherer Aufgabe ist b=$\frac{rg}{2g-r}$. Also

$$b_1 = \frac{R_1 g}{2g - R_1}$$

Damit folgt

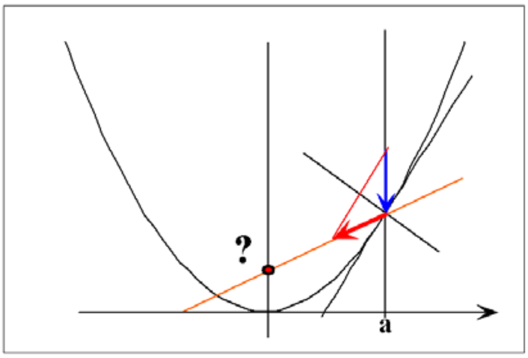
$$b_2 = \frac{R_2 \cdot \left(A - \frac{R_1 g}{2g-R_1}\right)}{2\left(A - \frac{R_1 g}{2g-R_1}\right) - R_2} = \frac{(2Ag - AR_1 - R_1 g) R_2}{4Ag - 2AR_1 - 2R_1 g - 2R_2 g + R_2 R_1}$$

Das ist das gesuchte Resultat. ▲.

□ (1.19) Die folgende Rechnung war nachzuvollziehen und zu verstehen. Nicht als Ganze selbst zu finden!

Der Nachweis der Brennpunktseigenschaft der Parabel!

⧫ Wir wählen die Parabel y=σx^2. Die Koordinaten y und x mögen dieselbe Einheit haben. Dann ist σx einheitenfrei, eine Zahl. Die Strahlen sollen parallel zur y-Achse verlaufen. Die Skizze fasst die Konfiguration zusammen.



◊ Die Einfallsgerade hat die Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt $\begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix}$. Dann ist a äußerer Parameter. Jede Wahl von a ein Lichtweg!

◊ Die Richtung der Tangente an $\begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix}$ ist durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sigma a \end{pmatrix}$ gegeben. (y=σx^2, dann y$' = 2\sigma x$!)

◊ Die dazu senkrechte Richtung ist durch $\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} -2\sigma a \\ 1 \end{pmatrix}}$ gegeben. (Ins Innere zeigend! Skalarprodukt!)

⧫ Jetzt kann die zu $\vec{n}$ parallele Komponente von $\vec{e}$ bestimmt werden. Vgl das Schema. Es ist

$$\vec{p} = \frac{-1}{1+4\sigma^2 a^2}\begin{pmatrix} -2\sigma a \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4\sigma^2 a^2}\begin{pmatrix} +2\sigma a \\ -1 \end{pmatrix}$$

⧫ Das gibt für den reflektierten Strahl folgenden Richtungsvektor:

$$\vec{e} - 2\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1+4\sigma^2 a^2}\begin{pmatrix} +2\sigma a \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4a^2\sigma^2}\begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Da es nur auf die Richtung ankommt, können wir den Faktor $\frac{1}{1+4a^2\sigma^2}$ fortlassen und finden als Richtungsfvektor des reflektierten Strahles:

$$\vec{r} = \vec{r}(a) = \begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

⧫ Das gibt als Parametrisierung der reflektierten (zum Parameter a gehörigen) Geraden:

$$\vec{x}_{r,a}(\alpha) = \begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{a-}4\alpha\sigma\text{a}} \\ \sigma a^2 + \alpha\left(1-4a^2\sigma^2\right) \end{pmatrix}$$

⧫ **Wo trifft der reflektierte Strahl die y-Achse?** Dazu muss der eingrahmte x-Weg den Wert Null haben. Das bestimmt den $\alpha - Wert$ des Schnittpunktes zu

$$\alpha_S = \frac{1}{4\sigma} \qquad \text{Unabhängig von a! Alle Lichtwege}$$

Einsetzen dieses Wertes in die zweite Koordinate gibt die gesuchte y-Koordinate, aus der erneut die a-Abhängigkeit herausfällt:

$$\boxed{y_S=\sigma a^2+\frac{1}{4\sigma}\left(1-4a^2\sigma^2\right)=\frac{1}{4\sigma}}$$

♦ Also: Alle (an der Parabel y=σx^2) reflektierten achsenparallelen Geraden schneiden sich im Brennpunkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4\sigma} \end{pmatrix}$.

Hier kommt der Fokuspunkt zufällig heraus. Man benötigt keine spezielle Methode mit Infinitesimalrechnung zu seiner Bestimmung. Das ist also untypisch einfach!

♦ Ein Test: Zu y=$\frac{1}{4\sigma}$ gehört x=$\frac{1}{2\sigma}$ auf der Parabel. Für dieses x ist die Steigung 1. Und das heißt, der reflektierte Strahl verläuft horizontal durch den Brennpunkt!

□ (1.20) Konzipieren Sie einen Computerbefehl, der (in der Ebene) das Problem der Strahlreflexion löst. Was muss man eingeben? Was soll herauskommen? Welche Formel benötigt man?

▼ Was benötigt der Computer (typischerweise) an Eingabegrößen, um den reflektierten Lichtstrahl zu bestimmen? Wir nehmen an, dass ihm ein physikalisches Koordinatensystem für den Bildschirmbereich zur Verfügung steht. Was benötigt er dann? Zunächst den Reflexionsort, den wir für die Richtungsbestimmung nicht enötigen. Dann die Richtung des einfallendens Strahles und die Richtung der reflektierenden Geraden. Beide geben wir in Form von Koordinatenvektoren (achsenparallelen Wegen) an. Wir suche den Koordinatenvektor des reflektierten Strahles

Seien $\vec{e}=\begin{pmatrix} c_e \\ s_e \end{pmatrix}$ und $\vec{t}=\begin{pmatrix} c_t \\ s_t \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren des einfallenden Strahles bzw. der reflektierenden Geraden. Dann ist $\vec{n}=\begin{pmatrix} -s_t \\ c_t \end{pmatrix}$Normalenrichtung. (Günstiger als das andere Vorzeichen! Die Formel $\vec{r}=\vec{e}-2\vec{p}$ gibt hier

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \begin{pmatrix} c_r \\ s_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_e \\ s_e \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -s_t \\ c_t \end{pmatrix}\frac{-c_e s_t+s_e c_t}{s_t^2+c_t^2} \\
&= \frac{1}{c_t^2+s_t^2}\begin{pmatrix} c_e(c_t^2+s_t^2)+2s_t(-c_e s_t+s_e c_t) \\ s_e((c_t^2+s_t^2)-2c_t(-c_e s_t+s_e c_t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{c_t^2+s_t^2}\begin{pmatrix} c_e(c_t^2-s_t^2)+2s_e s_t c_t \\ s_e(-c_t^2+s_t^2)+2c_e c_t s_t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Den Vorfaktor darf man noch fortlassen. Das gibt folgendes einfaches Programm:

```
PROCEDURE refp(ce,se,ct,st)
 // e einfallener Strahl, t Reflektorrichtung
 sr = se * (-ct ^ 2 + st ^ 2) + 2 * ce * ct * st
 cr = ce * (ct ^ 2 - st ^ 2) + 2 * se * ct * st
RETURN
```

▲

☐ Was hat man sich zu merken, um Winkel in Gradangabe ins Bogenmaß umzurechnen und umgekehrt. Rechnen Sie einige Beispiel.

▼ Eine Formel, aus der man durch Umstellen die Umrechnungen erhält

$$\frac{\alpha_{Grad}}{360} = \frac{\alpha_{Bogen}}{2\pi} \left(= \frac{\text{Winkelgröße}}{\text{Gesamtumfang}} \right)$$

Wegen der leichteren Interpretierbarkeit sollte man keinen Faktor $\frac{1}{2}$ herauskürzen!
Z.B. Bogenmaßwert 1 gehört zu

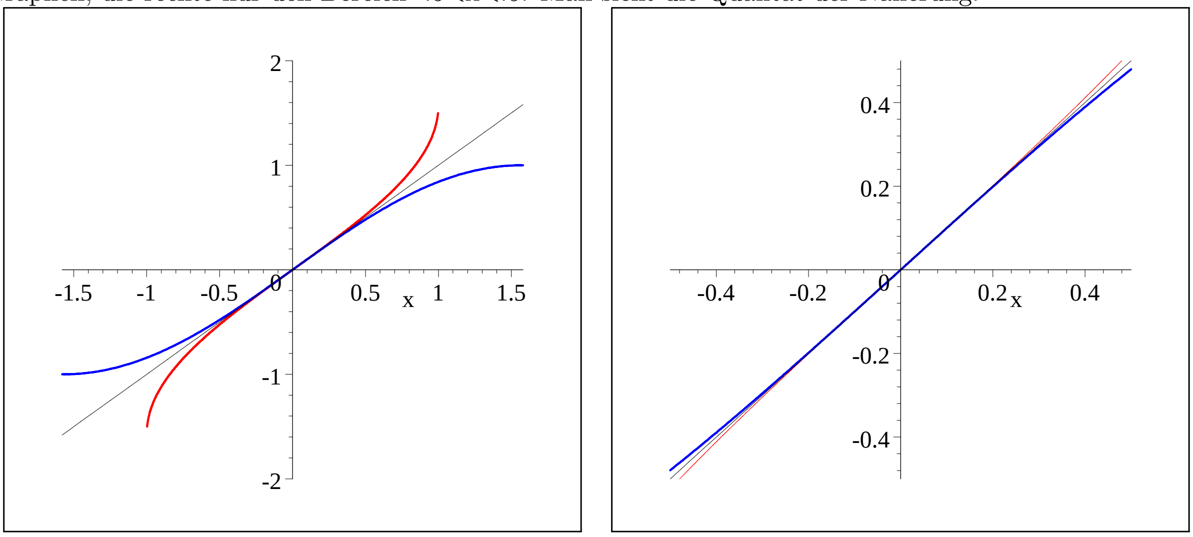
$$\alpha^0(1) = \frac{1}{2\pi} 360^0 = 57.3$$

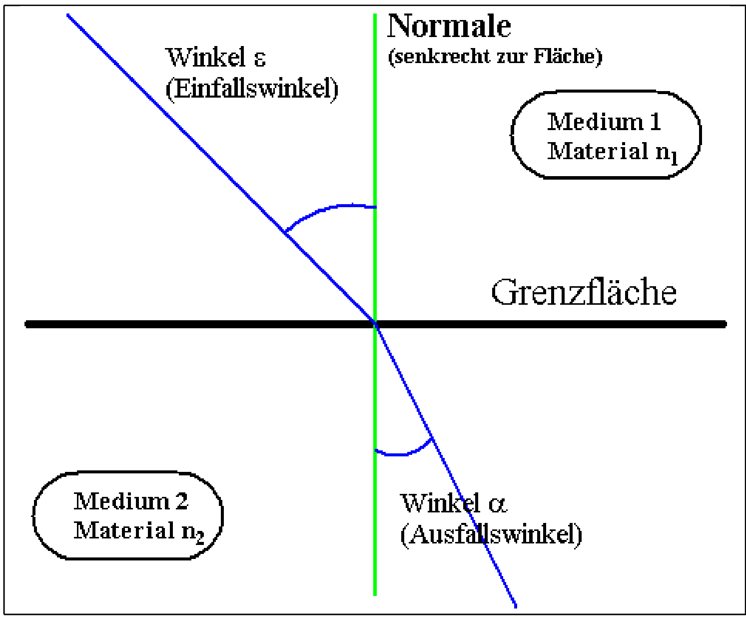
Ein Winkel der Größe 1^0 hat umgekehrt das Bogenmaß

$$\alpha_{Bogen}(1^0) = \frac{1}{360} 2\pi = 1.745\,3 \times 10^{-2}$$

☐ Die Umkehrfunktion Arkussinus. Wie erhält man den Graphen einer Umkehrfunktion?

▼ Man spiegelt den Graphen an der ersten Winkelhalbierenden (mit Gleichung y=x). Wir illustrieren das am Beispiel des Sinus. Diesen kann man im Bereich -$\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2}$ umkehren. Die linke Figur zeigt die drei Graphen, die rechte nur den Bereich -.5<x<.5. Man sieht die Qualität der Näherung.





Brechungsgestz:
Es gilt:

$\boxed{n_1 \sin(\varepsilon) = n_2 \sin(\alpha)}$

oder

$\boxed{\boxed{\sin(\varepsilon) = n \sin(\alpha)}}$ mit n=$\frac{n_2}{n_1}$.

☐ Vertrauensbildende Maßnahmen:
▼ 1) n=1 gibt $\alpha = \varepsilon$ wie zu erwarten
2) Ist n>1, dann wird der Lichtstrahl *zur Normalen hin* gebrochen, d.d der Winkel verkleinert sich. Die folgende Rechnung zeigt exemplarisch, wie die Gleichung das bewirkt:

$$\begin{aligned}
\overbrace{sin(\varepsilon)}^{\le 1} &= \overbrace{n}^{>1}\ \overbrace{\sin(\alpha)}^{noch\ kleiner..} \\
0.8 &= 1.5 \cdot \boxed{0.533..} \qquad \text{Konkretisierungsbeisp.} \\
\arcsin(0.8) &= \boxed{0.927} \quad \arcsin(0.5333) = \boxed{0.562\ \ } \quad Winkel
\end{aligned}$$

☐ Die typische Rollenzuweisung in Anwendungssituationen sieht so aus, dass der Ausfallswinkel α gesucht ist, dagegen ε und n gegeben sind. Lösen Sie dazu das Brechungsgesetz nach α auf. ▼

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin(\varepsilon)\right). \qquad ▲$$

☐ Geben Sie eine Formel für den "*Ablenkwinkel*" an.

▼ Die Bezeichnung ist selbsterklärend. Wir bezeichnen diesen Winkel mit δ. Dann folgt aus den Skizzen und dem Resultat der voherigen Aufgabe

$$\begin{aligned}
&\boxed{\delta\text{=}\varepsilon\text{-}\alpha\text{=}\varepsilon\text{-}\sin^{-1}\left(\tfrac{1}{n}\sin(\varepsilon)\right)} \\
\approx\ &\frac{n-1}{n}\varepsilon \qquad \text{für kleines } \varepsilon.
\end{aligned}$$

"Kleines ε" heißt fast senkrechter Einfall. Für n=$\frac{4}{3}$ folgt $\delta \approx \frac{1}{4}\varepsilon$.

□ (2.15) Im "optisch dichteren Medium" (das, mit dem größeren n) gibt es das Phänomen der **Totalreflexion**. D.h. der (dortige) Ausfallswinkel (mit der Normalen) kann einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten. Kommt der Lichtstrahl umgekehrt aus dem dichteren Medium, dann wird er an der Grenzfläche **vollständig reflektiert**! Wie lautet die Formel für diesen Grenzwinkel? Wie groß ist der Grenzwinkel im Fall von Wasser und von Diamant?

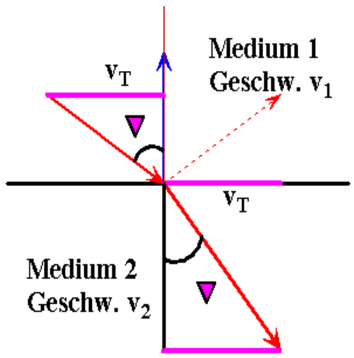
▼ Der größtmögliche Ausfallswinkel entsteht für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$. Also sin$\varepsilon = 1$. Damit folgt

$$\alpha_{Grenz} = \sin^{-1}(\frac{1}{n})$$

Mit $n_{Diamant} = 2.42$ und $n_{Wasser} = 1.33$ folgt $\alpha^{Diamant}_{Grenz} = 0.43$ und $\alpha^{Wasser}_{Grenz} = 0.85$

■ (2.17) Wir führen (ebene) Koordinaten ein. Die Grenze zwischen den beiden Medien sei y=0. Das Einfallsmedium gehöre zu y>0. Wir nehmen an, wir ein Richtungsvektor $\vec{e}^K = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ sei bekannt. Wir möchten mit Hilfe des Brechungsgestzes einen Richtungsvektor $\vec{g}^K = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ des ausfallenden Strahles konstruieren.

▼ Den Index K für das Koordinatensystem lassen wir fort. Da es nur auf die Richtung ankommt, können wir den Betrag von $\vec{g}$ beliebig wählen. Beispielsweise ist es günstig $g_1 = e_1$ zu nehmen. dann können wir eine die folgend Skizze verwenden mit $e_1 = g_1 = v_T$. (Tragen Sie selbst e_2, g_2 und ε und α ein. Und rin Hinweis: Straten Sie mit dem Tangens des Ausfallswinkels) :



▼ Wir überlegen wir folgt:

- Was ist gegeben? Der Richtungsvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ des einfallenden Strahles im Medium 1 mit y>0. Aus den Brechungsidizes n_1 und n_2 bilden wir die Hilfsgröße n=$\frac{n_2}{n_1}$.
- $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ sei **Bezeichnung** für den gesuchten Richtungsvektor des gebrochenen Strahles
- Wähle $g_1 = e_1$ (Gleiche Tangentialkomponenten, wie angegeben)
- ε Einfalls-, α Ausfallswinkel und n=$\frac{n_2}{n_1}$. Dann haben wir $\boxed{\frac{g_1}{g_2} = \tan\alpha}$. Das war der Hinweis! Also (g_2 ist gesucht!) $g_2 = g_1 \frac{1}{\tan\alpha} = e_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
- Mit dem Brechungsgesetz (und etwas **nachzuvollziehender** Zwischenrechnung) drücken wir α durch ε aus:

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}\sin\varepsilon \qquad \cos\alpha = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}$$

- Das gibt in die Formel für g_2 eingesetzt:

$$g_2 = e_1 \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}}{\sin \varepsilon}$$

- Zusammen

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}}{\sin \varepsilon} \end{pmatrix} = \frac{e_1}{\sin \varepsilon} \begin{pmatrix} \sin \varepsilon \\ \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} \end{pmatrix}$$

- Da es nur auf die **Richtung** von $\vec{g}$ ankommt, nicht auf die Länge, kann man den Vorfaktor fortlassen oder einen zusätzlichen Faktor hinzufügen. Das ergibt zwei mögliche Richtungsvektoren $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2 = |\vec{e}|\vec{g}_1$. (Beachte ($e_1 = |\vec{e}| \sin \varepsilon$ und $|\vec{e}|^2 = \vec{e}^2$). Das Resultat

$$\boxed{\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \sin \varepsilon \\ \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} \end{pmatrix}} \boxed{\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} e_1 \\ \sqrt{n^2 \vec{e}^2 - e_1^2} \end{pmatrix}}$$

Zugehörige vertrauensbildende Maßnahmen:
◊ Für n=1 folgt $\vec{g}_2 = \vec{e}$, also keine Brechung wie es sein muss!
◊ Für sin(ε)=1 haben wir Totalreflexion. Also

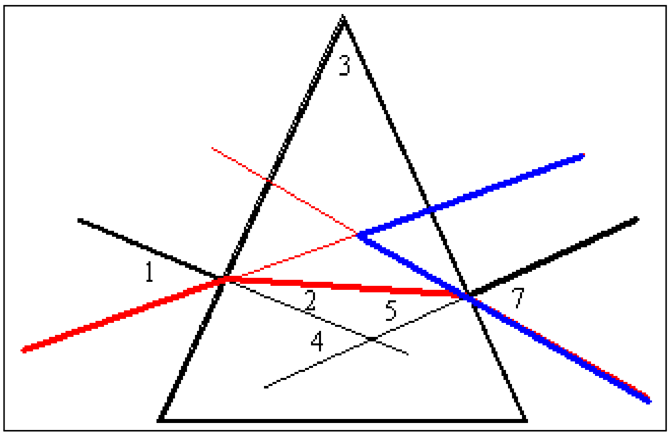
$$\vec{g}_{1,Grenz} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{n^2 - 1} \end{pmatrix}$$

Nun ist tan$\alpha = \frac{g_1}{g_2} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$. Wegen tan$\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ folgt $\boxed{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{n^2 - 1}}$.
Quadrieren gibt $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = n^2 - 1$ oder $\frac{1-\sin^2 \alpha_{Grenz}}{\sin^2 \alpha_{Grenz}} = n^2 - 1$. Das stellen wir nach sinα_{Grenz} um, denn diese Größe ist uns bekannt!

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^2 \alpha_{Grenz}}{\sin^2 \alpha_{Grenz}} &= (n^2 - 1) \\ 1 - \sin^2 \alpha_{Grenz} &= (n^2 - 1) \sin^2 \alpha_{Grenz} \\ 1 &= n^2 \sin^2 \alpha_{Grenz} \\ \sin \alpha_{Grenz} &= \pm \frac{1}{n} \quad \text{wie bereits bekannt!} \end{aligned}$$

★ Beachten Sie: Mit Hilfe von $\vec{g}_1$ oder $\vec{g}_2$ können wir den Durchgang der Strahlen durch brechende Grenzflächen vektoriell beschreiben, also unser grundlegendes Fokussierungsproblem angehen! Beispielsweise können wir den "Regenbogenlichtweg" angeben und berechnen! Natürlich ist die Ausführung aufwendig.▲

☐ Eine Konsequenz des Brechungsgesetzes ist das Verständnis des Lichtverlaufes in einem Prisma. Zunächst eine Skizze mit ersten Bezeichnungen in Form einer Durchnumerierung beteiligter Winkel .



☐ Welche Bedeutung hat der blau markierte Winkel? **Wie sollte eine Formel aussehen, die die Lichtablenkung in einem Prisma beschreibt?** Was sollte sie leisten? Genauer: Welche (abhängige) Größe sollten durch die Formel durch welche unabhängige ausgedrückt werden, was wird dabei als äußere Parameter eingehen?

▼

Blau eingezeichnet ist der "Ablenkwinkel", den wir mit δ bezeichnen wollen. Das Prisma verursacht insgesamt eine Winkelablenkung des Strahles, so dass wir δ als abhängige Variable ansehen wollen. Eingehen wird dann der (unabhängige) Einfallswinkel des Strahles α_1, **nicht aber der Eintrittspunkt auf dem Prisma. (Sonst würde das Prisma nicht funktionieren!)**. Äußere Parameter sind weiter der (relative) Brechungsindex n sowie der Öffnungswinkel $\varepsilon = \alpha_3$ des Prismas! Wir erwarten somit eine Formel der Form

$$\delta = \delta(\alpha_1; n, \varepsilon).$$

Tatsächlich sieht die resultierende Formel wie folgt aus:

$$\boxed{\boxed{\delta = \delta(\alpha_1; n, \varepsilon) = \alpha_1 + asn\left[\sin\varepsilon \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\varepsilon \cdot \sin\alpha_1\right] - \varepsilon}}$$

▲

☐Zeigen (beweisen) Sie, dass die Formel der vorangegangenen Aufgabe richtig ist.

▼ In der Skizze steht 4 für einen Winkel $\alpha_3 = \varepsilon$ (Hat nichts mit dem Einfallswinkel des Gestzes zu tun, ist der Scheitelwinkel des Prismas!) Analog die übrigen Ziffern der Figur. Zunächst ist $\alpha_4 = \alpha_3 = \varepsilon$ (Etwa Satz über die paarweise senkrechten Schenkel). Über die Winkelsumme im Dreieck folgt dann $\pi = \alpha_2 + \alpha_5 + (\pi - \varepsilon)$, also $\boxed{\alpha_2 + \alpha_5 = \varepsilon}$. Erneutes Anwenden der Winkelsumme gibt $\pi = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_7 - \alpha_5) + (\pi - \delta)$ oder $\boxed{\delta = a_1 + \alpha_7 - \varepsilon}$.

Nach der Rollenverteilung **stört** α_7. Auch haben wir bisher das Brechungsgesetz nicht benutzt! Man sieht, wobei wir in der ersten Zeile bei (1) das Additionstheorem für Sinus verwenden:

$$\begin{aligned} \sin\alpha_7 &= n\sin\alpha_5 = n\sin(\varepsilon - \alpha_2) \overset{(1)}{=} n\sin\varepsilon\cos\alpha_2 - n\cos\varepsilon\sin\alpha_2 \\ &\quad = \sin\varepsilon \cdot n\sqrt{1 - \sin^2\alpha_2} - \cos\varepsilon \cdot n\sin\alpha_2 \\ &= \sin\varepsilon \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\varepsilon \cdot \sin\alpha_1 \end{aligned}$$

Bei (2) verwenden wir den Pythagoras und das **Brechungsgesetz.**
Die angegebene Formel folgt sofort!

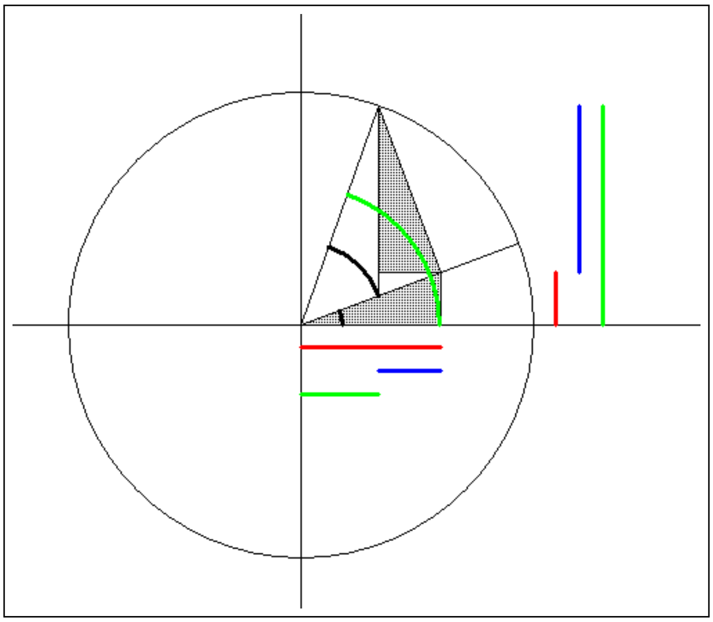
▲

Die beiden Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

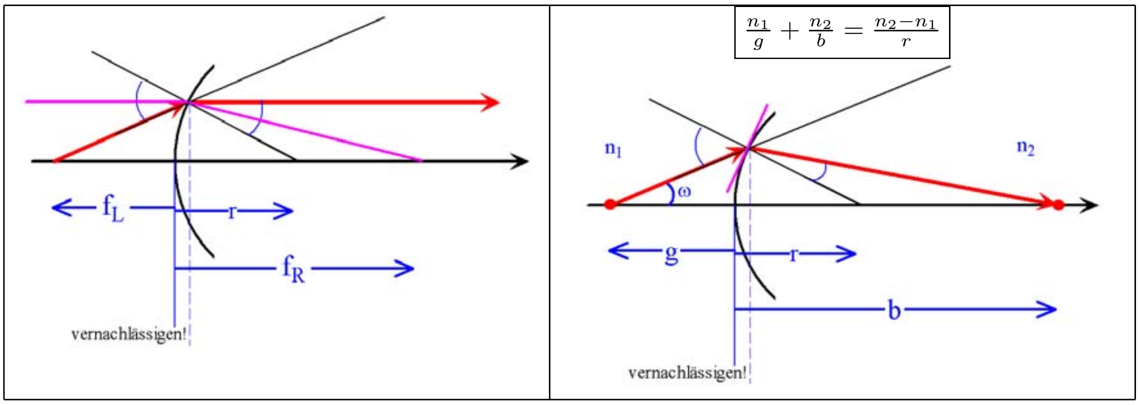
$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt sofort, indem man die erste nach x differenziert. Also genügt es, sich die erste zu merken!

☐ Bezeichnen Sie in der Figur die 6 farbigen Linien mit den zugehörigen Größen aus den beiden Additionstheoremen. Tragen Sie die Winkelbezeichnungen ein und weisen Sie mit Hilfe der Gleichheit von zwei geeigneten Wegen (einer kürzest, einer achsenparallel) die beiden Theoreme nach! Denken sie daran, dass 3 rechtwinklige Dreiecke vorliegen. Die beiden schraffierten und ein drittes, dass Sie u.U andersfarbig kennzeichnen können. Beachten Sie das Vorzeichen rechts im Theorem für den Cosinus. Wie manifestiert sich das in der Skizze? Welches sind die beiden Wege?



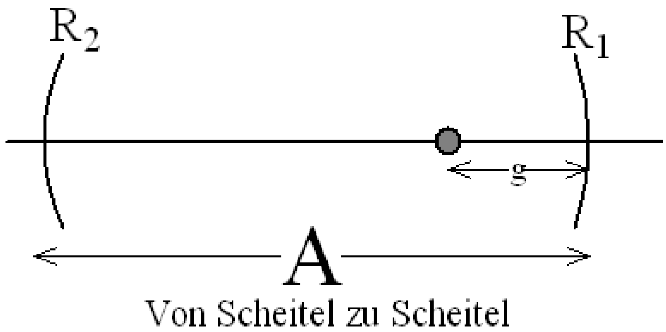
Die folgende Skizze zeigt den Durchgang von Strahlen durch eine Kugeloberfläche. Ursprung der optischen Achse ist jetzt der Scheitel. Die positive Richtung aller beteiligten Größen ist angedeutet. Für achsennahe Punkte gibt die angegeben Formel die Fokussierungsverhältnisse näherungsweise wieder:



☐ wie erhält man den kinken und den rechten Brennpunkt?

☐ Geben Sie für einen Gegenstandspunkt in der Nähe der Achse, aber nicht auf der Achse drei Lichtwege an, die vom Punkt, zum zugehörigen Bildpunkt führen. (Beschreiben und damit konstruieren können! Dazu benötigen f_L und f_R der linken Skizze!)

☐ Modifizieren sie die Skizze, die wir zum "Zwei-Kugelspiegelproblem" gefertigt haben, so dass daraus eine Skizze für das Linsneproblem wird. Denken Sie an die richtigen Vorzeichen.



Bestimmen Sie dann das Rollenschema für die beiden Durchgänge (noch mit A!). Formuliern Sie die beiden resultierenden Gleichungen, setzen Sie jetzt A=0. Das muss das Resultat der Vorlesung geben. Un leiten Sie die Linsenformel her.

▼ ▲
