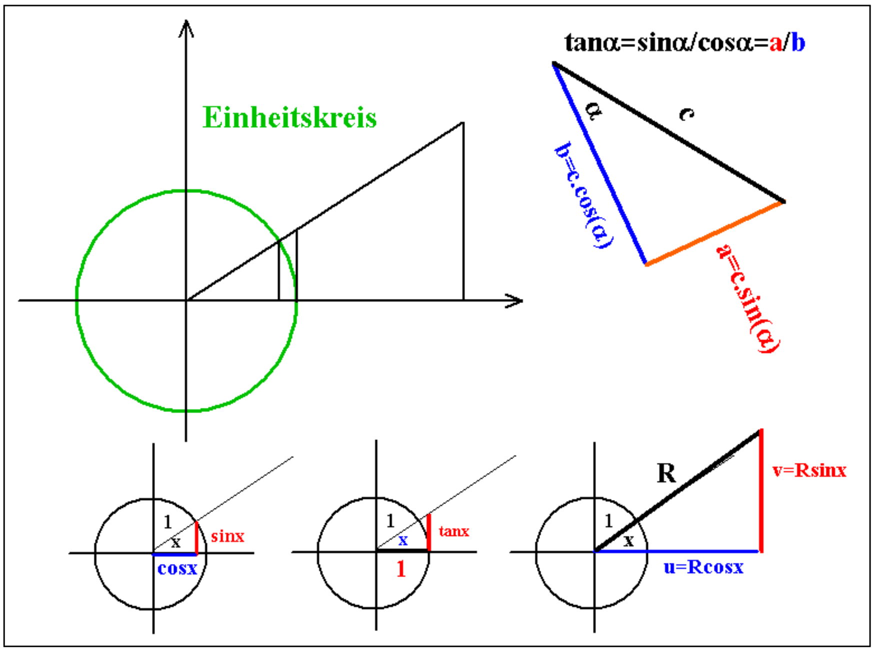
★★ Anhang : **Trigonometrische Funktionen und rechtwinklige Dreiecke** ★★

Die wichtigsten Information waren in dem folgenden Bild zusammengefasst.



Denken Sie insbesonder auch an den Pythagoras, mit dessen Hilfe man cos in sin und umgekehrt umwandelt.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

■ Testfrage: Für x=$\frac{\pi}{4}$ ist haben sin und cos denselben Wert. Wie groß ist dieser Wert? (Kein Dezimalbruch).

######

★★Anhang Vektoren★★

Elementar heuristische Einführung
Soweit bisher besprochen

- Vektor: Ein gerichteter Pfeil in der Ebene oder im Raum. Man beschreibt ihn (auch quantitativ) durch einen durch die **jeweiligen** Umstände festgelegten Weg, der zeigt, wie man vom Anfangspunkt zum Endpunkt gelangt. Diese Umstände werden vielfach durch ein Koordinatensystem festgelegt!
  - Einfachster Fall: GeometrischerPfeil - Hier ist der Weg die kürzeste Verbindung vom Anfang zum Ende. Vorzugeben sind Richtung und Länge.
  - Parallele und senkrechte Projektion: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben: Der Endpunkt von $\vec{a}$ wird senkrecht auf $\vec{b}$ projiziert. Das ergibt den Fußpunkt F. Jetzt gehe mit $\vec{p}$ vom Startpunkt nach F und dann mit $\vec{s}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$. Als Formel $\vec{a} = \vec{p} + \vec{s}$. Zeichnerisch in der Ebene kein Problem. Rechnerisch wird $\vec{p}$ mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmt: $\boxed{\vec{p} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{b}\cdot\vec{b})}\vec{b}}$. Die senkrechte Komponente folg mit $\vec{s} = \vec{a} - \vec{p}$. (Alle Größen der rechten Seite sind jetzt bekannt.) Skizze!

– Parallelogrammkonstruktion der Vektoraddition:

– ■ Beschreiben Sie den durch $\boxed{3\vec{a}+2\vec{b}}$ festgelegten Weg!

– Achsenparalleler Weg in einem Koordinatensystem: $\vec{a}^K = (a_1, a_2, a_3)$ beschreibt den folgenden Weg:...

– Polarkoordinatenweg: (r, θ, φ) beschreibt den folgenden Weg:.... (θ der Winkel vom Nordpol Richtung Süden geht von 0 bis π. Und φ ist der Winkel.... von 0 bis ...)

Das Skalarprodukt:

Das Skalarprodukt macht aus zwei Eingabevektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Zahl, die mit $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ bezeichnet wird. Vorsicht, Klammern nicht fortlassen!

Es gibt **zwei Wege zur Bestimmung dieser Zahl** (mit demselben Resultat):

1. Geometrische Form : $\boxed{(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha}$ wobei $|\vec{a}|$ der Betrag, die Länge des Vektors $\vec{a}$. Analog $|\vec{b}|$.
   Und θ ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

2. Koordinatenform. Hat man ein Koordinatensystem K und sind darin $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als achsenparallele Wege gegeben. Also $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dann berechnet sich das Skalarprodukt wie folgt:
$$\boxed{(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}.$$

■ Testen Sie, dass Sie jetzt in der Lage sind, $\vec{a}$ in eine zu $\vec{b}$ parallele und senkrechte Komponente zu zerlegen. $\vec{a} = \vec{p} + \vec{s}$ mit $\vec{p} || \vec{b}$. Rechnen Sie eine **Konkretisierung**. Und dann zerlegen Sie b in eine zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente. Wie sieht die allgemeine Formel aus?

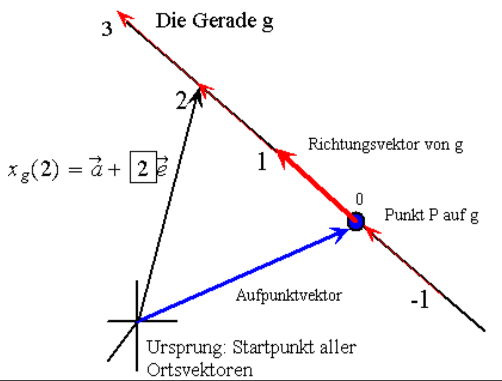
- Wann stehen zwei Vektoren aufeinander senkrecht? Genau dann, wenn $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 0$.

■ $\vec{a} = (1, m)$ und $\vec{b} = (1, 2, 3)$. Bestimme per Inspektion einen Vektor, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht und drei Vektoren, die auf $\vec{b}$ senkrecht stehen!
■ Wie erhält man mit Hilfe des Skalarproduktes den Winkel zwischen zwei Vektoren? Konkretisierung.

Geradenparametrisierung

Unterscheide: Gerade und Strecke.
Eine Gerade ist die Menge all ihrer Punkte. Man gibt sie daher an / legt sie fest, indem man alle ihre Punkte angibt.
Das macht man, indem man einen Weg beschreibt, der auf möglichst einfache Weise zu allen Punkten der Geraden führt.
Genauer gesagt: Eine einzige Zahlangabe legt für jeden Geradenpunkt den zugehörigen Weg geometrisch fest. Diese Zahl nennt man "Paramter".
Sei g die Gerade. Der Parameter werde mit α bezeichnet (α soll alle reellen Zahlen durchlaufen). Jetzt der Weg: Gehe zuerst vom Ursprung zu einem Punkt P der Geraden mit dem Pfeil $\vec{a}_P$. (Aufpunktvektor). Dann suche einen Richtungsvektor $\vec{e}$ (parallel zu g). Verlängere ihn um den Parameterfaktor α und bilde den vektoriellen Gesamtweg:

$\vec{x}_g(\alpha) = \vec{a} + \vec{e}\alpha$.
Formel.
Start Ursprung;
Gehe mit $\vec{a}$ nach P auf g;
Gehe weiter mit $\boxed{\vec{e}\alpha}$
zum Punkt auf der Geraden
mit Ortsvektor $\vec{x}_g(\alpha)$.



$\vec{x}_g(\alpha)$ ist die **Bezeichnung** für den Vektor, der zum Geradenpunkt gehört, der zum Parameterwert α gehört. Die rechte Seite beschreibt den zugehörigen Weg.

Jeder Punkt P von g hat genau einen zugehörigen Parameter α_P, seinen "Namen", derart, dass $\vec{x}_g(\alpha_P)$ gerade nach P führt!

■ Eine Gerade h sei wie folgt bestimmt: Sie geht durch den Endpunkt des Pfeiles $\vec{a} = (1, 1, 3)$ und hat die Richtung $\vec{d} = (1, -2, 1)$. Das ergibt die folgende Parametrisierung der Punkte von h

$$\vec{x}_h(\alpha)) = ...?... = (..., ..., ...)$$

a) Berechnen Sie $\vec{x}_h(1)$, $\vec{x}_h(0)$, $\vec{x}_h(3)$ und $\vec{x}_h(-2)$.

b) Wo trifft die Gerade h die x-y-Ebene. Hinweis: Für diese Punkte ist die z-Koordinate 0)

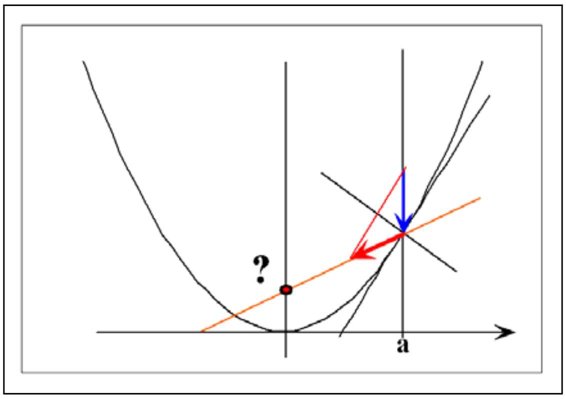
Nützliche Idee: Will man im Rahmen eines Problems ganz bestimmte Punkte P,Q, auf der Geraden g bestimmen, dann versucht man zunächst die zugehörigen Parameterwerte $\alpha_P, \alpha_Q, ..$ zu bestimmen! Hat man diese, folgt der Beschreibungsvektor sofort

- Die Parametrisierungsidee klappt auch für andere Figuren. So ist

  $$a \mapsto \vec{x}_p(a) = (a, a^2)$$

  (ich hoffe selbsterklärend) eine Parametrisierung der Normalparabel in der Ebene. Zu jedem Parameterwert a gehört genau ein Parabelpunkt.

■ Beweisen Sie die Brennpunktseigenschaft der Parabel (am Beispiel der Normalparabel y=x^2)



Einfallsgerade: Richtung (0,-1) durch Punkt (a, a^2)

Richtung der Tangente an (a, a^2) ist (1,2a)

Dazu senkrechte Richtung $\boxed{\vec{n} = (-2a,1)}$

Berechnung parallele Komponente $\frac{-1}{1+4a^2}(-2a, 1) = \frac{(1,-2a)}{1+4a^2}$

Reflektierte Richtung

$$(0, 1) - 2\frac{1}{1+4a^2}(-2a, 1) = \frac{1}{1+4a^2}\left(4a, 4a^2 - 1\right)$$

Faktor $\frac{1}{1+4a^2}$ weg

Die Vektoren der reflektierten Geraden

$$(a, a^2) + \alpha(4a, 4a^2 - 1) = (\boxed{a+4\alpha a}, \boxed{a^2+\alpha(4a^2-1)})$$

Bedingung $\boxed{a+4\alpha a = 0}$ gibt $\boxed{\alpha = -\frac{1}{4}}$

Die andere Koordinate
$\mathrm{a}^2 - \frac{1}{4}(4a^2 - 1) = \frac{1}{4}$
Der Schnittpunkt $(0,\frac{1}{4})$ ist unabhängig von a!!!!

Damit erhalten wir folgende Parameterdarstllungen der beteiligten Geraden:

Einfallender Strahl	$\vec{x}_e(\alpha)$	$=(\mathrm{a},\mathrm{a}^2) + \alpha(0,-1)$
Tangente an $(\mathrm{a},\mathrm{a}^2)$	$\vec{t}_a(\beta)$	$=(\mathrm{a},\mathrm{a}^2) + \beta(1,2a)$
Normale an $(\mathrm{a},\mathrm{a}^2)$	$\vec{N}_a(\gamma)$	$=(\mathrm{a},\mathrm{a}^2) + \gamma(-2a,1)$