Aufgaben (zum Brückenkurs Physik 2004)

In der Veranstaltung mehr oder weniger ausführlich behandelt.

■1) Wie kommt es, dass, man gespiegelte Figuren sieht?

■ 2) Zerlegung $\vec{a} = \vec{p} + \vec{s}$.

■ 3) Die Kanten zweier Spiegel stoßen unter einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ (also 45^0) zusammen. Zwischen den beiden Spiegeln - genau in der Mitte (Winkel $\frac{\pi}{8}$) - befindet sich eine Lichtquelle. Konstruieren Sie zeichnerisch die ersten 4 entstehenden Bildpunkte.

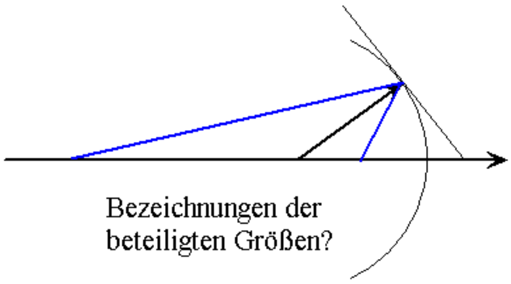
■ 4) Konzipiere eine zugehörigen Computerbefehl, der einem die Richtung des reflektierten Strahles zeichnet.

■ 5) Ebenes Problem. Die x-Achse sei ein Spiegel. Im Punkte (0,H) mit H >0 befindet sich eine Lichtquelle, Ihr Auge im Punkte (A,B) mit A,B>0. Zeigen Sie, dass Sie das Spiegelbild der Lichtquelle an der erwarteten Stelle vorfinden. Zuerst mit Hilfe einer Skizze und dann eventuell rechnerisch, möglichst vektoriell.

■ 6) Die Formel für die Spiegelung/Reflexion an einer Kugeloberfläche lautet:

$$\boxed{\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}}$$

a) Wieso ist die folgende Skizze unzulänglich bis fehlerhaft wie die Formel zeigt? Fertigen Sie eine korrekte Skizze.



b) Was geschieht, wenn man g und b vertauscht mit dem Strahlengang (= Weg der Lichtstrahlen)?
c) Betrachten Sie die folgenden Spezialfälle, indem Sie einmal inspizieren, was die Formel liefert und dann eine zugehörige Skizze fertigen.
1) Einfallender Strahl nahe und parallel zur optischen Achse.
2) g=r 3) g=$\frac{2}{r}$ 4) g=2r 5) g=$\frac{r}{2}$ 6) g=$\frac{r}{4}$.

■ 7) **Aufgabe**: Die Erde habe eine reflektierende Oberfläche. Wo spiegelt sich der reflektierende Mond? (Welche Zahlwerte werden benötigt? Verallgemeinerungsfähige Präsentation der Antwort!)

▼Wir finden über Hyperphysics Erdradius =6400km=$6.4 \cdot 10^6 m$. Und für den Abstand Erde-Mond $384 \cdot 10^6 m$. Da der Spiegel konkav ist, ist $\boxed{\text{r=- } 6.4 \cdot 10^6 m}$ zu nehmen und g=$(384 - 6.4)\, 10^6 m \approx 378 \cdot 10^6 m$. Auflösen der Formel $\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}}$ nach b gibt

$$b = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{1}{g}} \quad \text{mit Zahlenwerten} \quad \frac{1}{\frac{2}{-6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{378 \cdot 10^6}} m = -3.2 \cdot 10^6 m$$

Das negative Zeichen zeigt, dass das gespiegelte Bild im Innern der Kugel liegt, etwa am halben Erdradius. Der Mond ist soweit entfernt, dass seine Strahlen ungefähr parallel eintreffen. ▲

■ 8) **Übung** (in Vektorrechnung): Verifizieren Sie die Brennpunkteigenschaft der Parabel. Also: Alle achsenparallelen Strahlen gehen durch ein und denselben Punkt der y-Achse.

■ 9) Wie wandelt man Winkelgrade in Bogenmaß um und umgekehrt?

■ 10) Lösen Sie das Brechungsgesetz nach dem Ausfallswinkel α auf. Verwende dabei die Hilfsgröße n=$\frac{n_2}{n_1}$.

■ 11) An einer (ebenen idealen) Grenze stoßen Wasser und Diamant zusammen. ($n_{Wasser} = 1.33$, $n_{Diamant} = 2.42$. Ein aus dem Wasser kommender Lichtstrahl trifft die Grenze unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$. Wie groß ist der Austrittswinkel in Diamant?

■ 12) Sie finden, dass ein Lichtstrahl wie folgt gebrochen wird: Einfallswinkel = 0.5 und zugehöriger Ausfallswinkel = 0.4. Wie groß ist der relative Brechungsindex n=$\frac{n_2}{n_1}$?

■ 13) Sie haben 20 Stoffe, deren Brechungsindex sie kennen. Für jeden Stoff messen Sie für alle Einfallswinkel zwischen 0.05 und 1.55 im Winkelabstand 0.1 die Brechung, bestimmen also den zugehörigen Austrittswinkel. Wieviel Messungen müssen Sie ausführen? Wie lange dauert das, wenn Sie für jede Messung 10 Minuten benötigen? Können Sie alle Ergebnisse mit Hilfe des Brechungsgesetzes vorhersagen? Dasselbe für 100 Stoffe und einen Winkelabstand von 1^0!

Wieviele Messungen braucht man, um einen Brechungsindex zu bestimmen?

■ 14) Für eine Kugelkalotte oder Kugelkappe mit (polarem) Öffnungswinkel θ findet erhält man die folgende Flächeninhaltsformel

$$F_{Kappe}(\theta) = 2\pi R^2(1 - \cos(\theta)).$$

Geben Sie möglichst viele Indizien dafür an, dass diese Formel richtig und vernünftig ist.

■ 15) Übung: Eine (punktförmige) Lichtquelle befinde sich in einem Diamant mit ebener Oberfläche. Die Quelle strahle in alle Richtungen gleichmäßig. Wieviel Prozent des Lichtes dringt nach aussen (Luft, $n_{\text{Luft}} = 1$) ? Was für eine Formel wird benötigt? Oder: Wieviel wird total reflektiert?

▼ Die Formel für den Flächeninhalt einer kreisförmigen Kugelkalotte mit Öffnungswinkel θ lautet $\boxed{\mathrm{F}(\theta) = 2\pi R^2(1 - \cos\theta)}$.

Alle Strahlen, die die Quelle unter einem Winkel (zur Verbindung Quelle-Oberfläche) $\theta < \alpha_{grenz}$ verlassen, werden durchgelassen, die anderen nicht. Da die gesamte Kugeloberfläche den Flächeninhalt $4\pi R^2$ hat, ergibt $\frac{F(\theta)}{4\pi R^2} = \frac{2(1-\cos\alpha_{Grenz})}{4\pi} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha_{Grenz})$ den gesuchten Anteil. Ist $\alpha_{Grenz} = 1$, dann ist der Anteil $\frac{1}{2}$. Alle nach zur Oberfläche gerichteten Strahlen werden durchgelassen. Das sind 50%. ▼

■ 16) Die Grenze zwischen den beiden Medien sei die x-Achse, also y=0. Gegeben sei ein Richtungsvektor $\vec{n}$ des einfallenden Stahles: $\vec{n} = (n_x, n_y)$. Bestimmen Sie denjenigen Richtungsvektor des gebrochenen Strahles $\vec{g} = (g_x, g_y)$, für den $g_x = n_x$ gilt. (Was ist also noch zu bestimmen? Starten mit dem Tangens des Ausfallswinkels.) Ergebnis der Rechnung ist

$$\vec{g} = (g_1, g_2) = \left(e_2\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}}{\sin\varepsilon}, e_2\right) = \frac{e_2}{\sin\varepsilon}\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon}, \sin\varepsilon\right)$$

Begründen Sie, dass dann auch die folgenden einfacher gebaute Vektoren als Richtungsvektor des gebrochenen Strahles genommen werden können:

$\vec{g}_1=(\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon},\sin\varepsilon)$	$\vec{g}_2 = \left(\sqrt{n^2\vec{e}^2 - e_y^2}, e_y\right)$

■ 17) Erläutern Sie mit Hilfe einer Skizze der Graphen die Bedeutung der folgenden beiden Gleichungen:

$$\alpha = asn(\sin(\alpha)) \quad \text{und} \quad y = sin(asn(y))$$

■ 18) Prisma: Wie sollte eine Formel aussehen, die die Lichtablenkung in einem Prisma beschreibt? Was sollte sie leisten?

18a) Überlegen Sie sich eine Reihe von Konsistenztests, die zeigen, dass die folgende Formel die gesuchte sein könnte. Sie ist es tatsächlich. Dabei ist ε der Kantenwinkel des Prismas:

$$\boxed{\delta = \alpha_1 + asn\left[\sin\varepsilon \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\varepsilon \cdot \sin\alpha_1\right] - \varepsilon}$$

■ 19) Welche Winkelbereiche liefern die beiden üblichen Umkehrfunktionen acs=$\cos^{-1}$ (für cos) und atn=$\tan^{-1}$ (für tan). Oder auch: Was ist in den folgenden beiden Sachverhaltsbeschreibungen zu ergänzen:

$$\text{Es sei } (\cos(\alpha) = y \text{ und } \;.....?....\;), \text{ dann ist } \alpha = acs(y) \quad / \quad \cos^{-1}(\alpha)$$

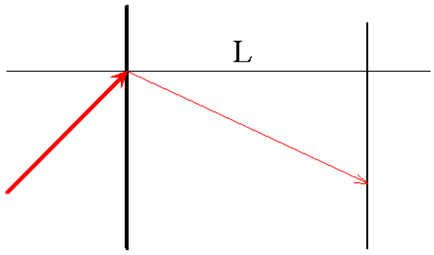
und

$$\text{Es sei } (\tan(\alpha) = y \text{ und } \;.....?....\;), \text{ dann ist } \alpha = atn(y) \quad / \quad \tan^{-1}\alpha.$$

■ 20) Übung: Der Brechungsindex von rotem und blauen Licht unterscheidet sich etwas. Für Wasser gilt $n_{blau} = 1.34$ und $n_{rot} = 1.33$. Der für beide Farben gleiche Einfallswinkel sei $\frac{\pi}{4}$. Wie weit muss der Strahl im Waser laufen, damit sich roter und blauer Strahl etwa 1cm voneinander entfernen?(Auf einer zur Grenzfläche parallelen Ebene im Abstand L)

Wo liegen in der nachfolgenden Skizze α, ε und d ?

Was vermuten Sie? Wie groß wird etwa L sein?



▼Lösung

Wir haben für die Ablenkung d von der Normalen auf der Ebene d=L$\tan\alpha$, wenn α der Austrittswinkel ist. Für diesen haben wir die Formel $\alpha = asn(\frac{1}{n}\sin\varepsilon) = asn(\frac{\sqrt{2}}{2n})$. Das gibt für die beiden Brechzahlen

- $\alpha_{blau} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 1.34}\right) = 0.555\,880$ und

$\alpha_{blau} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 1.33}\right) = 0.560\,558.$

Damit folgt für den Tangens

- $\tan(\alpha_{blau}) = \tan(0.555\,880) = 0.621\,224$ und

$\tan(\alpha_{rot}) = \tan(0.560\,558) = 0.627\,727$

Nun sei $\boxed{\delta = d_{rot} - d_{blau}}$ der gewünschte Unterschied.

$$\begin{aligned} \delta &= d_{rot} - d_{blau} = L(\tan\alpha_{rot} - \tan\alpha_{blau}) \\ L &= \frac{\delta}{\tan\alpha_{rot} - \tan\alpha_{blau}} = \frac{1cm}{0.627\,727 - 0.621\,224} = 153.8cm \end{aligned}$$

▲

■ 21) Eine dünne Linse habe eine Brennweite von f=2cm. Fertigen Sie eine Skizze, die die zugehörigen Brennpunkteigenschaften verdeutlicht. Auf der optischen Achse befinde sich ein Lichtpunkt im Abstand von g=3.2cm. Konstruieren Sie den zugehörigen Bildpunkt zeichnerisch. Lesen Sie die Bildweite b ab. Berechnen Sie dann b und bestimmen Sie den absoluten und relativen Fehler zwischen Zeichnung und Rechnung.

■ 22) Ein Fotoapperat werde durch ein System "dünne Linse" idealisiert. Linse und Film seien 4.5cm von einander entfernt. Ein Gegenstand, der sich 50 cm vor dem Gerät befindet soll fotografiert werden. Was für eine Brennweite ist zu wählen? (Skizze)

■ 23) Die Größe $\frac{1}{f}$ einer Linse wird "Brechkraft der Linse" genannt. Sie hat die Einheit einer reziproken Länge. Nach der Linsenformel setzt sie sich aus zwei Anteilen zusammen. Bei parallel einfallenden Lichtstrahlen hat der Anteil, der vom Gegenstand kommt, den Zahlwert Null. Sei f=10cm. Wie weit muss der Gegenstand von der Linse entfernt sein, damit sein Beitrag zur Brechkraft 5% und weniger ist?

■ 24) Die Länge von Vektoren. Sei $\vec{a} = (1, -2, 4)$. Bestimmen Sie $|\vec{a}|$, die Länge oder den Betrag von $\vec{a}$. Dasselbe für $\vec{b} = (4, 3, -3)$.

■ 25) Ein Punkt befindet sich zur Zeit t=-2 am Orte P mit Ortsvektor $\vec{x}_P = (2, -7, 13)$ und zur Zeit t=3 am Orte Q mit Ortsvektor $\vec{x}_Q = (2, -12, 20)$. Wie groß ist seine mittlere vektorielle Geschwindigkeit zwischen diesen beiden Punkten? Wie groß ist seine skalare Geschwindigkeit in diesem Zeitraum mindestens? Angenommen er bewegt sich auf einer Kreisbahn von P nach Q mit möglichst kleinem Radius. Was läßt sich über diesen Kreis sagen. Können Sie ihn zeichnerisch bestimmen? Und vektoriell rechnerisch?

■ 26) Ein Motorboot bewegt sich mit einer Relativgeschwindigkeit V gegenüber dem umgebenden Wasser. Es fährt in einem Fluss, dessen Wasser eine konstante Strömungsgeschwindigkeit $\vec{W}$ relativ zum Ufer hat. Welche Geschwindigkeit hat das Boot relativ zum Ufer? Wir nehmen an, dass das Boot im Fluss geradlinig fährt. Wo und wann erreicht es das andere Ufer?

▼ Erster Lösungsschritt: Skizze und parametrisieren der beteiligten Größen. Wir setzen $\vec{W} = (0, W, 0)$. D.h. der Fluss fließt in y-Richtung realtiv zum Ufer. Weiter sei der Startpunkt des Bootes der Ursprung. Weiter sei $\vec{v}_{BW} = (V\cos\alpha, V\sin\alpha)$ die vektorielle Geschwindigkeit des Bootes, Dabei ist α der Winkel zwischen Fließrichtung des Wassers und Fahrtrichtung des Bootes.

Dann ist $\vec{v}_{BU} = \vec{W} + \vec{v}_{BW}$. Begründung über zugehörige Ortsänderungen.

Rest.... ▲

■ 27) Ein Punkt bewege sich geradlinig gleichförmig. Man wisse $\vec{r}(t_1) = \vec{a}$ und $\vec{r}(t_2) = \vec{b}$ mit $t_1 \neq t_2$. Dabei seien $\vec{a}, \vec{b}, t_1$ und t_2 gegeben.Wie lautet die Formel für die Bahnbewegung? Wann befindet er sich genau zwischen den beiden durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegebenen Punkten. Wo liegt diese Mitte (Ortsvwektor)?

■ 28) Ein Punkt bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis. Wie groß ist die Zeit T, die für einen Umlauf des Punktes benötigt wird? (Diese Zeit wird "Periode der Bewegung" genannt.) Bestimmen Sie diese wichtige Formel

▼ In (cos(x),sin(x)) muss sich x um den Wert 2π ändern, damit sich der Punkt einmal herum bewegt. Oder $x_2 - x_1 = 2\pi$. Nun soll sich t von t nach t+T ändern und dabei diese x-Änderung bewirken. Das gibt

$$\overbrace{(\omega(t_1 + T) + \varphi)}^{x_2} - \overbrace{(\omega t_1 + \varphi)}^{x_1} = \omega T \stackrel{!}{=} 2\pi$$

Die entstehende Bedingung $\omega T = 2\pi$ (mit T gesucht, ω gegeben) wird gelöst durch

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega} \quad \text{umgekehrt} \quad \omega=\frac{2\pi}{T}}. \qquad \text{Wichtig!}$$

Wenn also etwa der Punkt 50 Mal in der Sekunde umläuft, Dann ist T=$\frac{1}{50}s$ und damit $\omega = 2\pi \cdot 50s^{-1} \approx 314s^{-1}$. Die Einheit der "Kreisfrequen ω" ist s^{-1}. ▲

■ 29) Eine Flugparabel sei durch folgende Angaben festgelegt: $\vec{r}(1) = (0, 0, 0)$ und $\vec{v}(1) = (0, 1, 2)$ und $\vec{g} = (0, 0, -10)$. Wann, wo und unter welchem Winkel trifft die Parabel (zum 2. Mal) die Horizontalebene z=0 ?

▼ Zuerst gedankliche Skizze über den Verlauf der Parabel. Dann:Was ist in welcher Reihenfolgev zu bestimmen?

1.) $\vec{r}(t) = ...$ $\vec{v}(t) = ...$ (in Tupelform, wie immer)

2.) Wann: $\underline{T_s = ???}$ über z=0. Wo? $\vec{r}(t_S) =$ (einsetzen)

3) $\cos\theta = \frac{(\vec{v}(t_S)\cdot\vec{n})}{|\vec{v}(t_S)||\vec{n}|}$ gibt den Winkel

Wichtige technische Hilfe: Arbeite mit T=t-1 und t=T+1

Rechnungen werden meist leichter, wenn man mit T arbeitet!

T=t-1 $\vec{r}_1 = (0,0,0)$ $\vec{v}_1 = (0,1,2)$ $\vec{g} = (0,0-10)$

$$\boxed{\vec{r}(t) = (0, 1T, \overbrace{2T - 5T^2}^{z(t)}) \quad \vec{v}(t) = (0,1,2-10T)} \quad \text{1.Schritt}$$

Die Bedingung für z=0 ist daher : $\boxed{2T_s - 5T_S^2 = 0}$. Oder

$T_S(2 - 5T_S) = 0$ –dh: $T_S = 0$ (klar) oder $\boxed{T_S = \frac{2}{5} \text{ (gesucht)}}$ und $\underline{t_S = \frac{7}{5}}$ Die gesuchte Auftreffzeit!

$\underline{\vec{r}(\frac{7}{5}) = (0, \frac{2}{5}, 0)}$ Dort erfolgt der Einschlag

$\underline{\vec{v}(\frac{7}{5}) = (0,1,-2)}$ die zugehörige vekt. Geschw.

$\vec{n} = (0,0,1)$ Einheitsnormale zur Horizontalebene

$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ $\underline{\arccos\frac{-2}{\sqrt{5}} = 2.6}$ der gesuchte (stumpfe) Winkel.

Nochmals zur **Rechentechnik:** T ist Abkürzung (Hilfsgröße) und steht einfach für t-t_1 hier also für t-1. Mit T rechnet es sich meist viel einfacher. Über t=T+t_1 kann man bei Bedarf jederzeit zu der eigentlichen Zeitskala zurückkehren.

■ 30) Eine Flugparabel sei gegeben durch.... Für welche Werte von H erreicht diese Flugparabel die Ebene z=H nicht. Und wie groß ist der geringste Abstand zwischen Parabel und der Ebene z=H dann.

29-34) Flugparabelaufgaben

■35) Für Aluminium ist $E_{Al} = 72\cdot 10^9 N/m^2$. Wir hängen eine Masse von 1kg an einen kreisförmigem Draht aus Aluminium mit Radius 2mm. Wie groß ist die relative Längenänderung? Um wieviel verlängert sich ein Draht von 2m Länge? (Anwendung des Formel

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\sigma \qquad \sigma = \frac{F}{A}$$

▼

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\boxed{1\cdot 9.81N}}{\square\square} \approx$$

$$\frac{1kg\cdot 9.81\frac{m}{s^2}}{\left(\pi\cdot(2\cdot 10^{-3}m)^2\right)\cdot 72\cdot 10^9\frac{N}{m^2}} = 1.08\times 10^{-5}$$

$$\Delta L = L\cdot\frac{\Delta l}{L} = 2\cdot 1.08\cdot 10^{-5}m \approx 0.02mm$$

Der Draht ist recht dick! Verkleinert man den Radius um einen Faktor 10, so vergrößert sich die relative Längenänderung um den Faktor 100. Und damit wächst die (absolute) Längenänderung auf 2mm an.▲

■ 36) Eine 100 m lange Eisenbahnschiene dehnt sich unter einer Temperaturdifferenz um 5 cm. Querschnitt 10 cm^2. $E_{Stahl} = 200\cdot 10^9\frac{N}{m^2}$. Wie groß ist die Kraft, die benötigt wird, um die Ausdehnung zu verhindern? (In Vielfachen von mg angeben)

■ 37) Umgang mit Vektorfeldern $\vec{F}(\vec{x}) = ...$ Rechts steht eine Formel, die aus dem Vektor $\vec{x}$ die dort herrschende Feldstärke macht. Wir betrachten als erstes Beispiel $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}$.

a) Berechnen Sie den Feldwert für $\vec{x}_1 = (1,2,-1)$, für $\vec{x}_1 = (0,0,2)$ und $\vec{y} = (1,2,-3)$ und $\vec{u} = (-1,0,1)$.

b) Ein Punkt bewege sich mit der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (0,2,0) + t(0,0,3)$. Bestimmen Sie die Feldstärke $\vec{f}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$. die zur Zeit t auf den Punkt einwirkt. (Im Falle eines Kraftfeldes ist das die Größe, die in die Newtonsche Bewegungsgleichung eingeht.

c) Wie lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung für diese Feld?

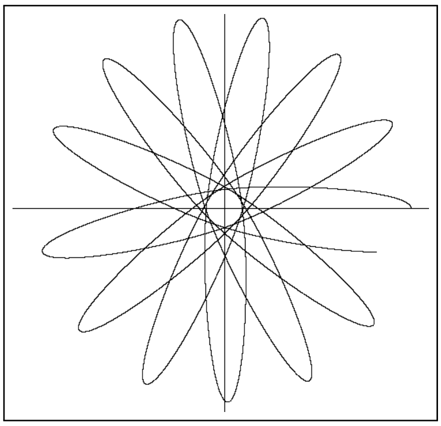
▼ a) In Komponenten ist $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Also $\vec{F}(\vec{x}_1) = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}$ usw.

b) *Es* gilt $\vec{r}(t) = (0, 2, 3t)$. Damit folgt $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \frac{(0,2,3t)}{\sqrt{4+9t^2}}$.

c) Wir setzen $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ und $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. Dann lautet die zugehörige Newtonsche Bewegungsgleichung

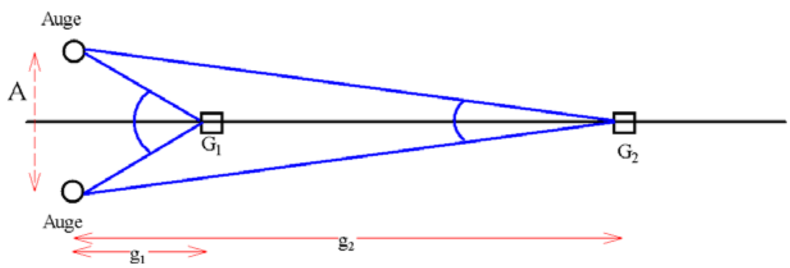
$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt}(t) &= \frac{\vec{x}(t)}{|\vec{x}(t)|} \quad \text{und } \frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(t) \ \text{ oder in Komponenten} \\ m(\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t)) &= \frac{(x(t), y(t), z(t))}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}} \end{aligned}$$

Das Bild zeigt die einen Bahnverlauf einer Bewegung unter dem Einfluss dieser Zentralkraft. Der anfänglich Ort und die dort herrschend momentane Geschwindigkeit sind vorgegeben. Der Rest folgt als Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Dabei ist z(t)=0 für alle Zeiten vereinbar mit der Differentialgleichung. D.h. die Bewegung erfolgt ganz in einer Ebene.



▲

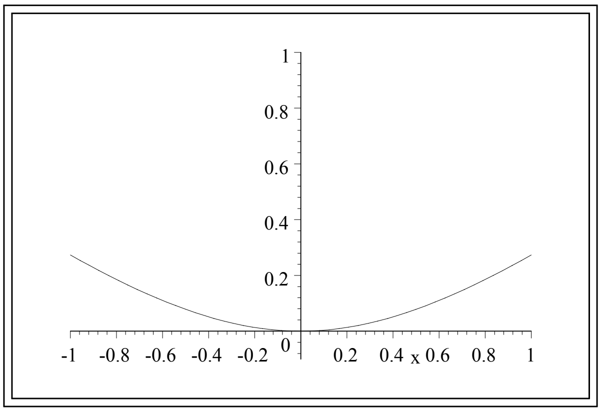
■ 38) Erläutern Sie mit Hilfe einer Skizze, wieso man mit zwei Augen die Entfernung von Gegenständen (zum Auge) unterscheiden kann. Wieso bereitet das mit nur einem Auge Schwierigkeiten? Welche geometrische Größe muss das Gehirn dazu verarbeiten?



Unterschiedlich entfernte Gegenstände erreichen das Auge unter einemunterschiedlichen Sehwinkel. Per Bildverarbeitung wird das dann als unterschiedliche Entfenung "gesehen". (Hinzu kommt, dass sich unterschiedlich entfernte Objekte relativ zueinander zu bewegen, scheinen, wenn man den Kopf bewegt.) Für den Öffnunswinkel ω erhalten wir folgende Formel (A Abstand der beiden Augen, g Gegenstandsweite):

$$\omega = 2atn(\frac{A}{2g}) \approx \frac{A}{g}$$

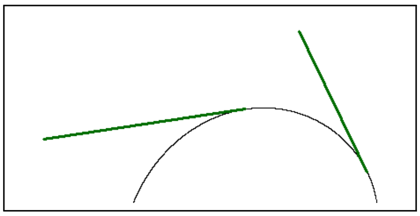
Es wurde nach der Qualität der Approximation von atn(x) durch x für kleine x gefragt. Dazu bilden wir y=$\frac{x-atn(x)}{atn(x).}$, also den relativen Fehler der Abweichung. Für x=0.5 hatten wir einen realtiven Fehler von etwa 10% gefunden. Der Graph gibt diese Größe allgemein wieder:



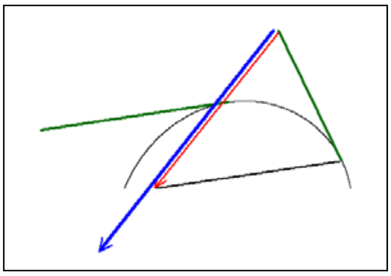
■ 38) Wir betrachten das Feld $\vec{F}(\vec{x}) = -2\vec{x}$. Für welche Werte von $\vec{x}$ ist der Betrag der Feldstärke gleich 1?

▼ Es soll $|\vec{F}(\vec{x})|$=1 gelten. D.h. $\boxed{|\text{-}2\vec{x}|} = 2|\vec{x}| = 2r = 1$. D.h. r=$\frac{1}{2}$. Genau die Punkte der Kugeloberfläche um $\vec{0}$ mit Radius r=$\frac{1}{2}$ erfüllen die geforderte Bedingung. ▲

■ 39)Die Figur zeigt den Teil einer Bahnkurve $\vec{r}(t)$ mit zwei zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren. Der zugehörige Zeitunterschied ist $\Delta t = 0.7$. Bestimmen Sie zeichnerisch näherungsweise die zugehörige mittlere Beschleunigung. Was bedeutet das für die Richtung der wirkenden Kraft?



▼Antwort: Zunächst den zweiten Geschwindigkeitspfeil parallel in den Ursprung des ersten verschieben der (rote) Differenzvektor gibt $\Delta\vec{v}$. Dann durch $\Delta t = 0.7$ teilen. Das gibt die gesuchte (blaue) mittlere Beschleunigung. Man sieht, dass auf dem Wegstück nicht nur die Richtung geändert wird, sondern sich auch die skalare Geschwindigkeit erhöht.



▲

■ 40) Eine sich zeitlich ändernde "Bevölkerungszahl" M(t) gehorche der folgenden Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{dM}{dt}(\text{t})=\text{rM(t)+z}}$$

Schreiben Sie das um in eine Näherungsformel für die Änderung ΔM der Bevölkerungszahl. Interpretieren Sie die beiden Konstanten r und z inhaltlich. r wird man als "Reproduktionsaktor" der Bevölkerung bezeichnen. Welche Bezeichnung könnte man z geben?

a*) Können Sie Lösungen der Differentialgleichung raten?

▼ Di8e Umschreibung ergibt für die absolute bzw. relative Änerfung von M folgende Formeln:

$$\begin{aligned}\Delta M &= \Delta t \cdot rM(t) + \Delta t \cdot z \\ \frac{\Delta M}{M} &= \Delta tr + \Delta t\frac{z}{M}\end{aligned}$$

Für z=0 ersieht man die Bedeutung von M. Hat man zunächst einen Wert M(t_0), dann ist die direkt anschließende Änderung der Bevölkerungszahl gleich r$\Delta tM(r)$. D.h gibt die Änderung in diesem Zeitprsu, die durch "Geburt und Tod" erzeugt werden. Als Relativgröße ist das die Reproduktionsrate. $\Delta t \cdot z$ dagegen ist ein Änderung unabhängig von der Bevökerungszahl. Etwas wie eine feste "Einwanderungsquote". Pro Zeiteinheit kommen z neue Einwohner hinzu. ▲

■ 41) Was für eine Bewegung wird durch die folgende Bahnkurve beschrieben:

$$\vec{r}_1(t) = (2,3,0) + 3(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0) \quad ?$$

Wie groß ist die zugehörige momentane Geschwindigkeit zur Zeit t=$\frac{1}{2}T$, wenn T die Periode ist?
a) Was für eine Bewegung wird durch

$$\vec{r}_2(t) = (3,3,0) + R(\cos(\omega t + 1), 0, \sin(\omega t + 1))$$

beschrieben?
b) Und welche schließlich durch

$$\vec{r}_3(t) = (a,b,0) + R(0, \cos(\omega(t-1)), \sin(\omega(t-1)))$$

(Denken Sie daran, dass es in der Mechanik bei Bewegungen darauf ankommt einen Ort und eine dazugehörige Geschwindigkeit festzulegen!)

▼ $\vec{r}_1$ beschreibt die Bewegung auf einen Kreis mit Mittelpunkt in (2,3,0) und mit Radius 3. Die Winkelgeschwindigkeit ist ω. Die Kreisebene ist die x-y-Ebene. Zur Zeit t=0 ist der Radiusvektor des Kreises gleich 3(1,0,0). Bei $\vec{r}_2$ läuft die Kreisbewegung um den Mittelpunkt (3,3,0) parallel zur 1-3-Ebene. Zur Zeit t=0 ist der Radiusvektor gleich R(cos(1),0,sin(1)). Bei $\vec{r}_3$ schließlich ist der Radiusvektor bei t=1 gleich R(0,1,0).

Die momentane Geschwindigkeit ist im Falle von $\vec{r}_1$ gleich

$$\vec{v}_1(t) = 3\omega(-\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$$

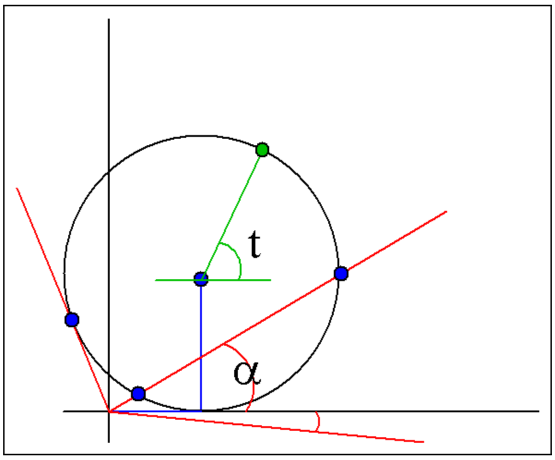
Wegen $\omega T = 2\pi$ ist $\omega\frac{T}{2} = \pi$ und damit $\vec{v}_1(\frac{T}{2}) = 3\omega(1,0,0)$. ▲

■ c) $\vec{r}_1(t)$ wie oben, aber t ein Parameter, der die Punkte eines Kreises beschreibt. Durch den Ursprung gehe eine Gerade (mit noch freier Richtung. Wie wird man diese Richtung parametrisieren?). Wo trifft diese Gerade den Kreis? (**Was für eine Formel ist anzustreben**?(2) Skizze! (3)) Wann ist die Gerade Tangente an den Kreis? (5) (Wie wird man das bestimmen, wenn man die allgemeine Lösung kennt?(4)) Wie erhält man den kürzesten Abstand des Kreises vom Ursprung? (6)

▼ Die Geraden durch den Ursprung wird man durch ihren Winkel α mit der x-Achse parametrisieren. zu jedem α gehört dann eine Gerade. 3 davon sind in der Skizze eingetragen. Ihr Richtungsvektor ist (cos$\alpha, \sin\alpha, 0)$. Die zugehörige Gerade hat die Parametrisierung

$$\vec{x}_\alpha(\lambda) = (\lambda\cos\alpha, \lambda\sin\alpha, 0)$$

Gesucht sind λ-Werte, die zu Schnittpunkten mit dem Kreis führen. Jetzt die Skizze:



Je nach Lage der Geraden, also dem Wert von α, werwarten wir 2, 1 oder keinen Schnittpunkt. Die x-Achse liefert siche die eine Tangent. Die andere hat einen Winkel etws oberhalb von $\frac{\pi}{2}$.

Die Kreispunkte sind wie folgt über t parametrisiert (grün in der Skizze).

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= (2,3,0) + 3(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0) \\ & (2 + 3\cos t, 3 + 3\sin t, 0) \end{aligned}$$

Zu jedem Schnittpunkt gehört ein entsprechender auch gesuchter t-Wert. Die Schnittbedingung lautet dann mit den gewählten Bezeichnungen $\boxed{\vec{r}_1(t_S) = \vec{x}_\alpha(\lambda_S)}$ mit t_S, λ_S gesucht. Wir lassen jetzt den Index S wider fort und finden durch Gleichsetzen der Komponenten folgende Bedingungen für t und λ :

$$\begin{aligned} 2 + 3\cos\boxed{t} &= \boxed{\lambda}\cos\alpha \\ 3 + 3\sin\boxed{t} &= \boxed{\lambda}\sin\alpha \end{aligned}$$

Wir benötigen eine Gleichung mit nur einer Unbestimmten. Dazu werden wir t wie folgt heraus:

$$\begin{array}{ll} 3\cos t = \lambda\cos\alpha - 2 & \quad (3\cos t)^2 = (\lambda\cos\alpha - 2)^2 \\ 3\sin t = \lambda\sin\alpha - 3 & \quad (3\sin t)^2 = (\lambda\sin\alpha - 3)^2 \end{array}$$

Addieren der letzten beiden Gleichung ergibt mit dem Pythagoras

$$9 = (\lambda\cos\alpha - 2)^2 + (\lambda\sin\alpha - 3)^2$$

Alle λ sind gesucht, die diese Bedingung erfüllen. Vereinfachen

$$9 = \lambda^2 + \lambda\,(-4\cos\alpha - 6\sin\alpha) + 13$$

oder

$$\lambda^2 + \lambda\,(-4\cos\alpha - 6\sin\alpha) + 4 = 0$$

$$\boxed{\lambda_{1,2}{=}(2\cos\alpha + 3\sin\alpha) \pm \sqrt{(2\cos\alpha + 3\sin\alpha)^2 - 4}}$$

Das sid die gesuchten λ-Werte. Für $\alpha = 0$ etwa finden wir nur den einen Wert $\lambda_{12} = 2$ was nach der Skizze korrekt ist.

Wo leigt die zweite Tangente? Dann muss der Ausdruck unter der Wurzel Null werden. D.h.

$$(2\cos\alpha + 3\sin\alpha)^2 - 4 = 0 \quad \text{oder} \ \boxed{2\cos\alpha{+}3\sin\alpha{=}\pm 2}$$

Gesucht sind jetzt α-Werte, die das erfüllen. Da cos$\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
2\sqrt{1-\sin^2\alpha}+3\sin\alpha &= \pm 2 \qquad (*)\\
2\sqrt{1-\sin^2\alpha} &= -3\sin\alpha \pm 2\\
4(1-sin^2\alpha) &= (-3\sin\alpha \pm 2)^2\\
4-4sin^2\alpha &= 9\sin^2\alpha \mp 12\sin\alpha + 4\\
13sin^2\alpha \mp 12\sin\alpha &= 0\\
&\boxed{\text{sin}\alpha(13\text{sin}\,\alpha \mp 12)=0}
\end{aligned}$$

Daher ist entweder sin$\alpha = 0$ und damit $\alpha = 0$. Das gibt die erste erwartete Tangente. Oder aber $\boxed{\text{sin}\alpha = \pm\frac{12}{13}}$. Das positive Zeichen ist nach der Figur zu verwerfen. Wir testen das, indem wir diesen Wert in die linke Seite der Gleichung (*) einsetzen. Das ergibt so nie ± 2. Wegen $2\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{10}{13}$ hat man

$$2\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} + 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{10+36}{13}.$$

Nmmt man von der Wurzel das negative Zeichen - und das ist eine andere Gleichung, dann erhält man 2.

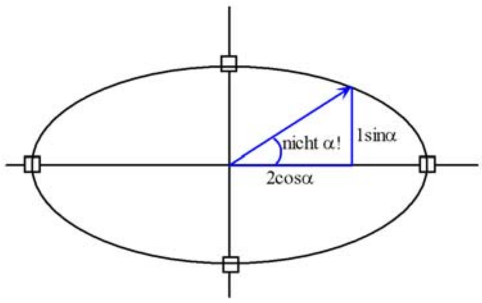
Es bleibt sin$\alpha = -\frac{12}{13}$ mit zugehörigem cos$\alpha = \frac{5}{13}$. Das ergibt den folgenden λ-Wert: $\lambda = (2\cos\alpha + 3\sin\alpha) = -2$. Das stimmt mit der Skizze überein. (Richtungsvektor nach unten, aber λ negativ.) ▲

■ 42) Was für eine Form hat die Kurve, die durch folgende Bahn kurve parametrisiert wird?

$$\boxed{\vec{r}_{xxx}(\alpha)=(0{,}2\cos(\alpha),1\sin(\alpha))}.$$

Als Index nehmen wir üblicherweise die Bahnform. D.h, xxx ist gesucht. Welche Verallgemeinerung der Frage liegt nahe?

▼ Zur ersten Orientierung wählt man einige einfach α-Werte und zeichnet die zugehörigen Ortsvektoren ($\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$...) Das legt Verwandschft zum Kreis nahe, und zwar eine Ellipse.



Tatsächlich ergibt sich eine Ellipse. Allerdings ist dabei der Parameter α **nicht** gleich dem Winkel des Ortsvektors mit der x-Achse. Alllgemein läßt sich eine Ellipse wie folgt parametrisieren

$$\boxed{\vec{r}_{Ellipse}(\alpha)=(\text{a}\cos\alpha,\text{b}\sin\alpha)}$$

Für a=b=r erhält man einen Kreis mit Radius r.

Witch of Agnesi: Die Antwort auf die offene Frage in der Vorlesung :

> Maria Gaetana Agnesi (1719-1799) of Milan was a gifted scholar and linguist who was first published at the age of nine with a Latin essay defending higher education for women. She was a well-published scientist by the age of 20 and was made an honorary member of the faculty at the University of Bologna with the consent of the pope at the age of thirty. She later retired to devote herself to her religious work. Her two volume textbook was the first comprehensive textbook on the calculus after L'Hopital's earlier book. She is most famous for her curve Agnesi called versiera, or turning curve. We know this curve by the name the "witch of Agnesi" because a British mathematician, John Colson, translated the word versiera incorrectly.