Kap.3: **Mechanik eines Massenpunktes**

Kap. 3a: Kinematik

3.1 **Ort und Ortsänderung eines Massenpunktes**

Weiteres **Beispiel** für Änderung**: Temperaturunterschied bei Ortsveränderung**

3.2 **Die Geschwindigkeit (eines Massenpunktes)**

Mittlere und momentane Geschwindigkeit

Rezept

Vektorielle und skalare Geschwindigkeit

3.3 Bahnkurven

Spezielle Bahnkurven

- Geradlinig gleichförmige Bewegung
- Gleichförmige Kreisbewegung
- Flugparabeln

3.4 Die Änderungsrate der momentanen Geschwindigkeit: $\boxed{\text{Beschleunigung}}$

3.5 Parametrisierung von Bahnkurven

Dynamik: **Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung**

3.5 **Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung**

3.6 **Die zwei Interpretationen der Newtonschen Bewegungsgleichung**

3.7 **Wie findet man die Kraft? - Kraftfelder**

- **Graphische Veranschaulichung von Kraftfeldern**
- **Drei physikalisch besonders wichtige Kraftfelder**
- Translation
- Superposition
-

Dann Einschub: Numerische Lösung der Differentialgleichungen

Einführung in diesen Teil

Bisher haben wir **Formeln für die (interessierenden) Größen** *selbst betrachtet. Z.B. die Linsengleichung. In der Physik sind jedoch Formeln von herausragender Bedeutung, die Beziehungen für die* ***Änderung der Größen oder deren Änderungsrate*** *beschsreiben. Sie sind erfahrungsgemäß einfacher zu formulieren, zu finden und zu interpretieren. Der Übergang zu den (meist eigentlich gesuchten) Formeln für die Größen selbst erfolgt dann mit mathematischen Methoden der Infinitesimalrechnung.*

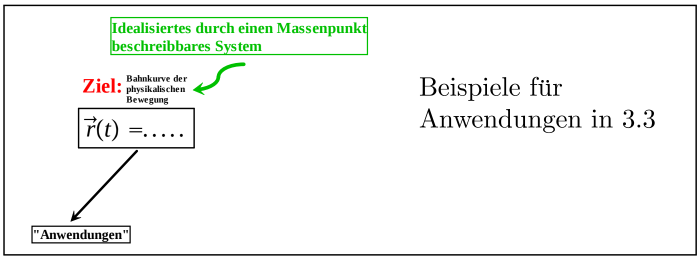
Aber - so sagt die Erfahrung - ***ohne diesen Zwischenschritt geht es nicht.***

Wir behandeln diesen neuen Typ von Gleichungen am Beispiel der Newtonschen Bewegungsgleichung. Die zugehörige Newtonsche Punktmechanik ist eine Art Paradebeispiel für den Erfolg des naturwissenschaftlich-physikalischen Vorgehens, also dafür, wie man auf diesem Weg zu verläßlichem Wissen gelangt.

Übersicht über das Kapitel

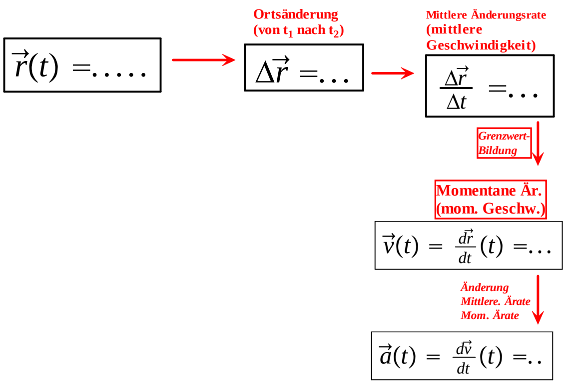
Wir betrachten ein physikalisches System, dass durch einen Massenpunkt idealisierbar ist, auf den äußere Einflüsse wirken.

Ziel ist dann, die Bahnkurven physikalisch möglicher Bewegungen dieses Massenpunktes zu bestimmen. Das geschieht günstigenfalls durch eine vektorielle Formel $\vec{r}(t) = ...$ Die Bahnkurve enthält alle Information über die physikalische Bewegung, d.h., man kann mit ihrer Hilfe zugehörige Anwendungsprobleme behandeln.



Aber wie findet man die Bahnkurven? Das geschieht mit Hilfe der Newtonschen Punktmechanik, die wir jetzt besprechen.

Wir starten mit der Bahnkurvenformel. Diese kann bekannt oder unbekannt sein. Im letzteren Fall ist $\vec{r}(t)$ ist nur die Bezeichnung für die gesuchte Größe "Ortsvektor des Punktes zur Zeit t". Anwendung des Begriffsystems aus.. .führt uns zu zur vektoriellen Geschwindigkeit und erneute Anwendung zur vektoriellen Beschleunigung:

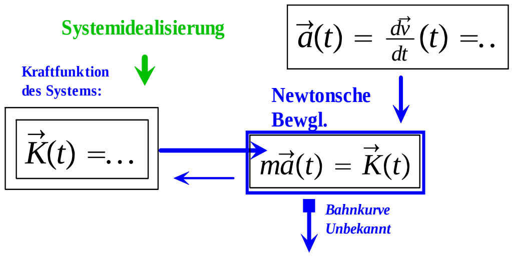


Bahnkurven: 3.1
Geschwindigkeit: 3.2
Beispiele von Bahnkurven: 3.3
Beschleunigung: 3.4
Parametrisierung. 3.4a

Dieser Weg ist stets verfügbar, unabhänig davon, ob $\vec{r}$ bekannt oder unbekannt ist.

Jetzt - Anschluss an die Beschleunigung - kommt der physikalisch wichtige Schritt:

Das "einfache" Naturgesetz (das das Verhalten derartiger Systeme erfasst), ist kein Gesetz für die interessierende Größe $\vec{r}(t)$, sondern eine für deren zweite Änderungsrate, die Beschleunigung. Im Rahmen der jeweiligen Idealisierung des Systems findet man eine spezifische Kraftfunktion $\vec{K}(t)$, die die Einflüsse auf den Massenpunkt vektoriell beschreibt und für diese muss die Newtonsche Bewegungsgleichung $\boxed{m\vec{a}(t) = \vec{K}(t)}$ gelten. Physikalisch im System mögliche Bewegungen erfüllen diese Gleichung, andere tun es nicht!



3.5 Kraft u. Newtonsche Bewegungsgl.
3.6 Die beiden Interpretationen
3.7 Kraftfelder
3.7a Konstruktion neuer Felder
3.7b Koordinatendarstellun
3.8 Zwangskräfte

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder kennt man die zulässigen Bahnkurven, dann kann man über die Bewegungsgleichung die wirksame Kraft bestimmen oder aber man kennt die Kraft, dann ergibt die Bewegungsgleichung **eine Bedingungsgleichung in Form einer Differentialgleichung für** $\vec{r}(t)$, deren Lösungen gerade die physikalisch zulässigen Bewegungen liefern!

Diese Differentialgleichungen lassen sich nur in wenigen Fällen exakt - man sagt auch "analytisch" - lösen. Mit Hilfe der modernen Computer ist es jedoch leicht, sie numereisch angenähert zu lösen. Wir betonen hier den zweiten einfachen Weg, auf den wir im Kap. 5 genauer eingehen!

Bei vielen etwas komplizierteren Systemen sollte man nicht Koordinatenfrei oder mit kartesischen Koordinaten arbeiten. Man führt dann sytemspezifische "generalisierte Koordinaten" ein und leitet für diese eine Differentialgleichung her. (3.4a Parametrisierung der Bahnkurve, (3.8) Zwangskräfte. Beispiele Ebenes und sphärisches Pendel, Zykloidbewegumng).

3.1. Ort und Ortsänderung eines Massenpunktes

♦ (3.1.1) Wir betrachten einen (idealisierten) Massenpunkt, der sich im Raum bewegt.

Seine Lage (im Raum) wird festgelegt durch Angabe seines Ortes P (zur betrachteten Zeit).

Genauer: Wähle einen festen Ursprung O und bilde den Ortsvektor von O nach P. Bezeichnung $\vec{r}$ oder $\vec{r}_P$.

♦ Da sich der Punkt bewegen darf, benötigen wir den Ort für jeden Zeitpunkt t (mit der Rolle unabhängige Variable). Also: $\boxed{\vec{r}(t) \text{ sei Bezeichnung}}$ für den Ortsvektor des Punktes zur Zeit t.

Die Bestimmung von $\vec{r}(t)$ über eine Formel der Form $\boxed{\vec{r}(t) = ...}$ ist in der Regel für derartige physikalische Systeme das Endziel, der oberste Wunsch. Das Ergebnis ist die $\boxed{\text{Bahnkurve}}$ des Körpers. Wichtige Beispiele derartiger Formeln unter 3.3.

Verfügt man über **die Formel** $\boxed{\vec{r}(t) = ...}$, dann kann man eine beliebige Zeit vorgeben und den zugehörigen Ortsvektor berechnen bzw. vorhersagen. Mit rein mathematischen Methoden folgen weitere physikalisch wichtige Größen wie die vektorielle Geschwindigkeit, die Energie. Man kann Scheitelpunkte der Bewegung bestimmen oder Schnittpunkte mit anderen Figuren usw. .....D.h. mit Hilfe der Bahnkurve beantwortet man Fragen zur betrachteten Bewegung.

(3.1.2)Beispiel:

Man wisse: $\boxed{\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{1}{1+t^2} \\ 7+t \end{pmatrix}}$. Dann folgt beispielsweise

$\vec{r}^K(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\vec{r}^K(4) = \begin{pmatrix} 48 \\ \frac{1}{17} \\ \dots \end{pmatrix}$	$\vec{r}^K\underbrace{(2+\Delta t)}_{\text{"}von\text{"}} = \begin{pmatrix} 3(2+\Delta t)^2 \\ \frac{1}{1+(2+\Delta t)^2}\cdots \\ \dots. \end{pmatrix}$

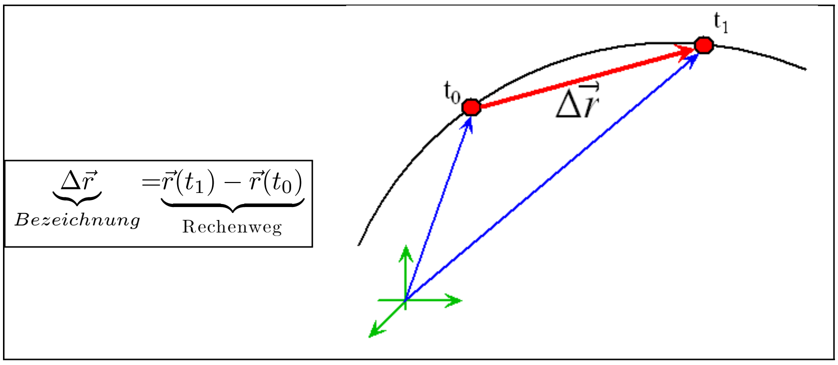
Beispiel: Das Pendel mit Winkelfunktion $\alpha(t) = \sin(\omega t + 2)$. Man hat

$$\vec{r}(t) = L\vec{e}_r(\alpha(t)) = L(\vec{e}_1 \cos(\sin(\omega t + 2) + \vec{e}_2 \sin(\omega t + 2))$$

Vgl. Anhang Pendel.

(3.1.3) Der Otsvektor ist die im Augenblick interessierende Größe. Davon zu unterscheiden ist die **zeitliche Änderung** (des Ortsvektors):

♦ Wir wählen einen ersten Zeitpunkt t_0 und einen zweiten t_1. Dann hat man für die Ortsänderung:



Weitere Bezeichnungen in der Skizze selbst einfügen! Die Skizze sagt: $\Delta\vec{r}$ ist der kürzeste Verbindungsweg (der beiden Punkte), auf der sich der Massenpunkt keineswegs bewegen muss! Läßt man t_1 gegen t_0 (oder $\Delta t = t_1 - t_0$ nach Null) gehen, dann wird die Änderung immer kleiner, geht selbst nach Null. Die beteiligten Ortsvektoren selbst dagegen können groß bleiben.

Erst der Quotient $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, also die (mittlere **Änderungsrate**) sollte konvergieren. In diesem Quotienten werden Zähler und Nenner gemeinsam klein.

(3.1.4) Ein **wichtiger Spezialfall:** Seien $\vec{a}$ und $\vec{v}$ zwei feste Vektoren (in der Rolle äußerer Parameter) und sei weiter

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{v}t.$$

□ Was für eine Bewegung des Massenpunktes wird hierdurch beschrieben? (Das ist eine zu merkende Formel!)

□ Berechnen Sie die **Änderung** $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)$ für diesen Fall. Ebenso die Änderungsrate. Wieso ist das hier so einfach? Was für eine Änderung ergibt sich insbesondere, wenn die Zeitänderung eine Zeiteinheit beträgt?

□ Betrachten Sie eine periodische Bewegung mit Bahnkurve $\vec{p} = \vec{p}(t)$ und Periode T. Wie hängen Änderung und Periode zusammen?

(3.1.5) Ein weiteres **Beispiel** für die Änderung einer Größe**: Der Temperaturunterschied bei Ortsveränderung**

Wir betrachten einen physikalischen Bereich ("Raum") bei dem in jedem Punkt eine bestimmte Temperatur herrscht. Wieder wählen wir einen festen Ursprung und beschreiben die Punkte des Bereiches durch ihre Ortsvektoren. Die Temperatur am Orte $\vec{x}$ bezeichnen wir mit T($\vec{x}$). Das ist ein *Temperaturfeld* (ein sog. Skalarfeld). Dann ist

$$\Delta T = T(\vec{x}_1) - T(\vec{x}_0)$$

der Temperaturunterschied zwischen den beiden Punkten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$.

□ **Rechenbeispiel:** Alle Koordinaten in m (Meter) und Tempertaturen in ^0C. Wir wählen ein festes Koordinatensystem K mit Koordinatenvektoren $\vec{x}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für die Punkte. Dann setzen wir

$$T(x, y, z) = T_0 - \lambda z$$

Dies interpretieren wir als Modell der Temperatur über der Erdoberfläche z=0. Die Konstante λ sei $\lambda = 100\frac{^0C}{m}$. Weiter sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 100m \\ 50m \\ 0m \end{pmatrix}$ als Ortsänderung nehmen wir $\Delta\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -50m \\ 100m \\ 0m \end{pmatrix}$ und $\Delta\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 100m \\ -50m \\ 150m \end{pmatrix}$ und $\Delta\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 100m \\ 0m \\ 300m \end{pmatrix}$. Welche Temperaturänderung ergibt sich für diese drei Ortsänderungen? Wie läßt sich das Verhalten des Temperaturfeldes in Worten (kurz) beschreiben?

Allgemeine Veranschaulichung mit Hilfe von Niveauflächen, in der Ebene durch Niveaukurven!

(3.1.6) Weiteres Beispiel: **Wärme und Temperatur**.

□ **Welche Eigenschaften sind im Zusammenhang mit den Phänomenen von Wärme und Temperatur grundlegend und voneinander weitgehend unabhängig ??? Was sollte man messend erfassen und quantifizieren? Was für Ursache-Wirkungsketten sind zu erwarten und wie sollten Sie sich mathematisch ausdrücken.**

(Versuchen Sie sich wieder fragend vorzuhangeln. Sicher ist die "Temperatur eines Körpers" grundlegend (und messbar). Ist es sinnvoll zu fragen: "Was ist die Ursache der Temperatur?" Kaum. Aber "Was ist die Ursache für eine **Änderung** der Temperatur des Körpers?" Das sieht besser aus und entspricht auch den täglichen Erfahrungen, die zu erklären sind. Was vermuten Sie? Usw.)

3.2 Die Geschwindigkeit (eines Massenpunktes)

(3.2.1) **Die Größe:** Der Ort eines Massenpunktes werde durch eine Bahnkurve $\boxed{\vec{r}(t) = ...}$ beschrieben. Oder als achsenparaller Weg durch:

$$\boxed{\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} ....}. \quad \vec{v}^K(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Für die zeitliche Änderung folgt $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ bzw $\Delta\vec{r}^K = \vec{r}^K(t + \Delta t) - \vec{r}^K(t)$..

Dann ist die zugehörige **Änderungsrate** (des Ortsvektors) definitionsgremäß die $\boxed{\text{vektorielle Geschwindigkeit}}$ (des Punktes) Wie stets ist genauer zwischen *mittlerer* und *momentaner* Geschwindigkeit zu unterscheiden.

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \cdots \qquad \text{zwischen t und t+}\Delta t.$$

Eine besonders wichtige mit dem Änderungsbegriff zusammenhängende physikalische Größe ist die (momentane) Geschwindigkeit. Zur angemessenen Einführung dieses Begriffs benötigt man sowohl die Vektorrechnung als auch das mathematisch idealisierte Grenzwertkonzept, also die Bestimmung des Resultates einer Folge von unendlich vielen Operationen, die man sich hier durchaus als Messoperationen vorstellen darf..

$\vec{v}(\mathrm{t})=\frac{d\vec{r}}{dt}(\mathrm{t})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	momentane vektorielle Geschwindigkeit zum Zeitpunkt

---

♦ (3.2.2) Die vielfach benutzte Formulierung "Geschwindigkeit=Weg/Zeit" oder "v=s/t" ist ohne zusätzliche Interpretation irreführend bis fehlerhaft und basiert auf der Scheu, ausreichend sprachlich zu differenzieren. "Gemeint" ist "Weg**änderung**/zugehörige Zeit**änderung**" oder "Koordinatenänderung/Zeitänderung". Denn fast immer werden die Größen "Weg s" und "Zeit t" auf einen festen Nullpunkt bezogen, wobei die Bewegungsänderung keineswegs zur Zeit t=0 am Orte 0 beginnen muss. Nochmals: Eine begrifflich korrekte und sachlich tragfähige und merkbare Einstiegsdefinition für die Geschwindigkeit ist unsere Änderungsratendefinition:

$$\boxed{\text{Geschwindigkeit}=\frac{\textit{Ortsänderung}}{\textit{Zeitänderung}}}.$$

♦ (3.2.3) Jetzt geht es darum, den Begriff der Geschwindigkeit weiter zu entfalten, zu präzisieren. Das geschieht in drei Richtungen:

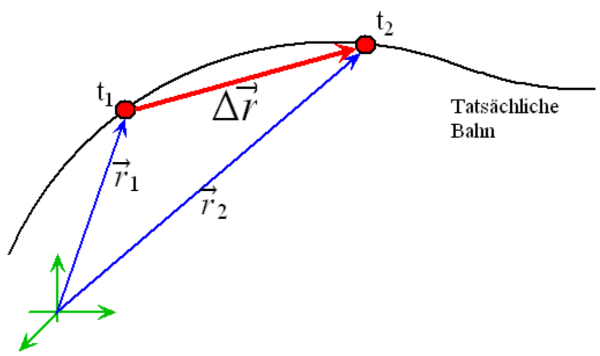
- Präzisierung der benötigten **Zutaten**: Geschwindigkeit von A relativ zu B beschrieben von C aus. (Die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Schwimmer vom Ufer aus beobachtet.) Bedeutsam wird das beispielsweise beim Dopplereffekt.
- Die Unterscheidung von **vektorieller und skalarer** Geschwindigkeit. Erstere ist die physikalisch relevante: Sie beschreibt Richtung und Betrag der Geschwindigkeit. Mit ihr - der vektoriellen - sollte man starten. Der Betrag der vektoriellen ist die skalare, also das, was man auf dem Tachometer sieht. Sie folgt mathematisch.
- Die Unterscheidung von **mittlerer und momentaner** Geschwindigkeit. Die Einführung der momentanen Geschwindigkeit fordert einen mathematischen Grenzprozess. Für uns ist die momentane zunächst vielfach einfach die mittlere Geschwindigkeit für ausreichend kleine Zeitintervalle.

♦ (3.2.4) Wir starten mit dem Konzept der **mittleren Geschwindigkeit** als Spezialfall des allgemeinen Schemas. Befindet ein sich bewegender Punktkörper zur Zeit t_1 am Ort mit Ortsvektor $\vec{r}_1$ und zu Zeit t_2 am Ort $\vec{r}_2$ (Pfeile vom festen Ursprung zum Punktort), dann ist die mittlere Geschwindigkeit dieser Bewegung (über den Zeitraum $t_1 \leq t \leq t_2$) gegeben durch

$$\boxed{\vec{V}_M=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

$$\vec{r}_2-\vec{r}_1=\vec{V}_M\cdot(t_2-t_1)$$

$$\boxed{\Delta\vec{r}=\vec{V}_M\cdot\Delta t}$$



Kurz: Man erhält die (vektorielle) Ortsänderung $\Delta\vec{r}$, indem man die mittlere Geschwindigkeit $\vec{V}_M$ mit der Zeitdifferenz Δt multipliziert. Das ist **die** im Zusammenhang mit der Geschwindigkeit wichtige Formel.

$$\boxed{\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r} = \vec{V}\cdot\Delta t}$$

⧫(3.2.5) Bei einer ungleichförmigen Bewegung muss man daher zwischen *tatsächlicher Wegänderung* und *durch die Formel beschriebene Wegänderung* unterscheiden. (Lokale) Bezeichnungen: $\Delta\vec{r}_{wahr}$ und $\Delta\vec{r}_{Formel}$. Dann folgt:

◊ Bei geradlinig gleichförmiger Bewegung gilt $\Delta\vec{r}_{wahr} = \Delta\vec{r}_{Formel} = \vec{V}\Delta t$.

◊ Ist die Bewegung ungleichförmig, so dass sich $\boxed{\textbf{momentane Geschwindigkeit}}$ und mittlere Geschwindigkeit unterscheiden, dann gilt die Formel **näherungsweise. Genauer:**

Die momentane Geschwindigkeit im Zeitpunkt t (die zugehörige Rate) ist der Grenzwert der mittleren Geschw. für Δt gegen Null. Also für immer kleinere Zeitunterschiede.

(3.2.6) Eine andere nützliche Formulierung des Grenzprozesses zur Bestimmung der momentanen Geschwindigkeit sieht wie folgt aus::

◊ Der Unterschied zwischen momentaner und mittlerer vektorieller Geschwindigkeit geht gegen Null, für Δt nach Null!

Damit können wir ein Schema formulieren, mit dessen Hilfe man in vielen Fällen die Geschwindigkeit im Rahmen einer elementaren Rechnung bestimmen kann:

Mathematisches Berechnungsrezept:
★ Starte mit der Größe $\vec{r}(t)$,
★ Bilde die Änderung $\Delta\vec{r}$ zwischen t und t+Δt ("Zuwachs"),
★ Bilde die mittlere Rate $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$,
★ Forme dazu den Rechenausdruck für $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ so um, dass man ein Δt herauskürzen kann. Tue das.
★ Bilde jetzt den Grenzwert $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ einfach, indem man $\Delta t = 0$ einsetzt, was jetzt gehen sollte. Das ergibt die gesuchte momentane Geschwindigkeit.
★★ Ist die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ bekannt, dann erhält man die Geschwindigkeit in der Regel kurz durch Anwendung geeigneter Ableitungsregeln. .

(3.2.7) ⧫ Generell kann man die mittlere Geschwindigkeit $\vec{V}$ wie folgt interpretieren:

Die tatsächliche beliebig komplizierte Bewegung $\vec{r}(t)$ wird **ersetzt durch eine geradlinig gleichförmige Bewegung**, die mit der tatsächlichen Bahn (mindestens) zu den beiden Zeipunkten t_1 und t_2 übereinstimmt.

Man hat die Formel

$$\vec{r}(t_1 + \Delta t) = \vec{r}(t_1) + \vec{V}_M\Delta t \text{ und } \vec{V}_M = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Diese Formel ist exakt für $\Delta t = t_2 - t_1$. Für $\Delta t - Wert$ in der Nähe dieses Wertes gilt sie nur noch näherungsweise.

Vektorielle und skalare Geschwindigkeit

(3.2.8) □ $\vec{r}(t)$ beschreibe eine gleichförmige Kreisbewegung. Wähle $t_2 = t_1 + T$, wobei T eine Umlaufsperiode ist. Was für eine mittlere vektorielle Geschwindigkeit ergibt sich? Welcher Unterschied besteht dann zwischen der *Ortsveränderung* $\Delta\vec{r}$ und dem *zurückgelegten Weg?* .

⧫ Der **Betrag** einer vektoriellen Geschwindigkeit wird üblicherweise **skalare Geschwindigkeit** genannt. Für unser Ersatzmodell ergibt das die erwarteten Resultate. Aber manchmal ist Vorsicht angebracht, wie das nachfolgende Beispiel zeigt:

(3.2.9) □ Erläutern Sie am Beispiel der letzten Aufgabe den Unterschied zwischen "Mittelwert der skalaren Geschwindigkeit" und "Betrag der mittleren (vektoriellen) Geschwindigkeit". Genauer: **Die mittlere skalare Geschwindigkeit ist nicht immer gleich gleich dem Betrag der entsprechenden mittleren vektoriellen Geschwindigkeit**. Das Problem ist die mittlere skalare Geschwindigkeit, die nicht durch Betragsbildung zu bestimmen ist! Für die momentane Geschwindigkeit gilt das nicht!

⧫ (3.2.10) Im Augenblick können wir die **momentane Geschwindigkeit** immer als "mittlere für ausreichend kleine Zeitunterschiede" interpretieren. Oder auch: Wir können die momentane bis zu einer interessierenden Genauigkeit bereits durch eine mittlere **für geeignet kleines** $\Delta t > 0$ vorhersagen.

3.3: **Bahnkurven** (vgl.(3.1.1).

(3.3.1) ★ In der Mechanik interessiert man sich dafür, wie sich als Punkte idealisierbare Körper im Raum bewegen. Eines der Ziele der Mechanik ist es, quantitativ vorherzusagen, wie sich solche Punkte bewegen, wenn sie bestimmten Einflüssen, Kräften, ausgesetzt sind. Die **Formelbeschreibung** (noch nicht Vorhersage) einer solchen Bewegung ist im Prinzip einfach und sieht wie folgt aus:

$$\vec{r}(t) = ...$$

⧫ Links steht mit $\vec{r}(t)$ eine **Bezeichnung** für den Ortsvektor des Punktes zur (beliebigen) Zeit t. D.h. für den Pfeil, der von einem fest gewählten Ursprung zum jeweiligen Ort des Punktes führt.

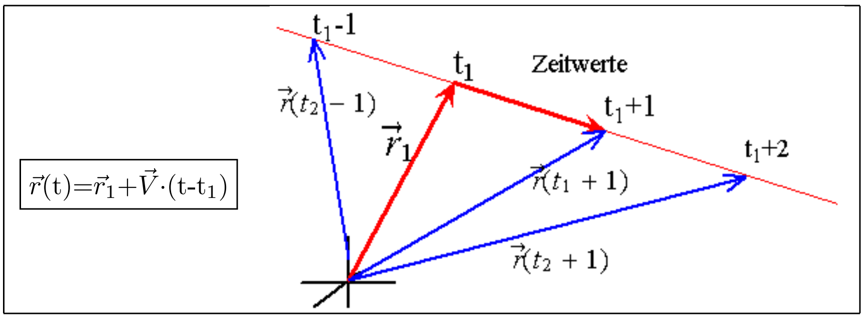
▼ Rechts durch ..... angedeutet soll ein Rechenausdruck stehen, der für den jeweiligen Fall eben diesen Ort liefert! Er sollte die Zeit t enthalten und weitere Größen, beispielsweise solche, die beeinflussende Kräfte charakterisieren. Aber auch solche, die unterschiedliche Bewegungen desselben Typs (im gleichen "physikalischen System") auseinanderhalten. (**Rechenweg**)

⧫ Diese Gleichungen $\vec{r}(t) = ...$ sind Gleichungen des ersten Typs (I) zwischen Größen. Die Klammer in $\vec{r}(t)$ ist eine "von-Klammer" **Keinesfalls** sind mit ihr Rechnungen wie $\vec{r}(2t+3) = 2\vec{r}(t) + \vec{r}(3)$ zulässig.

□ Einige wichtige begriffliche Differenzierungen des Begriffs: Eine Bahnkurve heißt *periodisch,* wenn ...... Sie heißt *beschränkt,* wenn....... Wie lauten die Definitionen?

Wir besprechen jetzt **die Bahnkurvengleichungen für drei wichtige Bewegungsformen**

⧫ (3.3.2) **"Freie" oder geradlinig-gleichförmige Bewegung.** Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass bei ihr die **vektorielle Geschwindigkeit konstant** ist. Bei dieser Bewegungsform stimmen alle momentanen und mittleren Geschwindigkeiten überein! Sei $\vec{V}$ diese feste Geschwindigkeit. Dann sieht die von uns angestrebte Formel wie folgt aus:



Wählt man t=t_1, dann folgt $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$. D.h. $\vec{r}_1$ gibt den Ort zur Zeit t_1. Eine Zeiteinheit später hat man $\vec{r}(t_1+1) = \vec{r}_1 + \vec{V}$. **Der Ort hat sich während einer Zeiteinheit gerade um $\vec{V}$ gändert.** Das ist charakteristisch für die Geschwindigkeit. Zwei Zeiteinheiten später hat man $\boxed{\vec{r}(t_1+2) = \vec{r}_1 + 2\vec{V}}$. Der Ort hat sich um $2\vec{V}$ geändert. So lassen sich die Orte aller Zeiten festlegen. $\boxed{\vec{r}(t_1 - \frac{3}{2}) = \vec{r}_1 - \frac{3}{2}\vec{V}}$. (Wieso?? Es ist t=$t_1 - \frac{3}{2}$. Dann ist t-$t_1$ = $(t_1 - \frac{3}{2}) - t_1 = -\frac{3}{2}$ und das ist rechts einzusetzen!

Was benötigt man zur Fixierung (Bestimmung, Vorgabe) einer derartigen Bewegung? Was muss man aus der jeweiligen Situation kennen? Wonach muss man beim Vorliegen einer zugehörigen Aufgabe suchen?

- ■ Den Ort $\vec{r}_1$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1.
- ■ sowie den Wert $\vec{V}$ der konstanten Geschwindigkeit. Genauer Richtung und Betrag.

Alle Vektoren können entweder als geometrische Pfeile oder als Koordinatenvektoren festgelegt sein.

□ (3.3.3) Beispielaufgabe: Der Punkt bewege sich geradlinig gleichförmig. Man wisse $\vec{r}(t_1) = \vec{a}$ und $\vec{r}(t_2) = \vec{b}$ mit $t_1 \neq t_2$. Dabei seien $\vec{a}, \vec{b}, t_1$ und t_2 gegeben.Wie lautet die Formel für die Bahnbewegung?

$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{V}\cdot(t-t_1)$	Allgemeine Form mit $\vec{r}_1, t_1$ noch unbekannt
$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{V}(t-t_1)$	Aufgabeninformation Nur $\vec{V}$ noch unbekannt!
$\vec{r}(t_2) = \vec{b} = \vec{a} + \vec{V}\cdot(t_2-t_1)$	Bedingung der Aufgabe Nur $\vec{V}$ unbekannt
$\vec{V} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{t_2-t_1}$	Jetzt ist $\vec{V}$ bekannt

Alles einsetzen gibt die gesuchte Bahnkurve

$$\boxed{\vec{r}(t)=\vec{a}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{t_2-t_1}(t-t_1)}$$

(3.3.4) Die **gleichförmige Kreisbewegung**

♦ Als **zweite Bewegungsform** betrachten wir eine **gleichförmige Bewegung des Punktes auf einem Kreis (mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung)**. Der Kreis soll sich in der x-y-Ebene bewegen. Gehört der Punkt auf dem Kreis mit Radius R zum Winkel α, dann gilt für den zugehörigen Ortspfeil $\vec{r}^K = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$. Beim bewegten Punkt ändert sich der Winkel mit der Zeit. Und "gleichförmig bewegt" heißt $\alpha = \omega t + \varphi$, wobei ω die "Winkelgeschwindigkeit" ist, also die momentane Änderungsrate des Winkels.

ω und φ sind beides Konstanten, deren Werte unterschiedliche Kreisbewegungen liefern. Zusammen

$$\boxed{\vec{r}^K_{Kreis}(t)=\begin{pmatrix} R\cos(\omega t+\varphi) \\ R\sin(\omega t+\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Das ist die gesuchte Bahnkurve für die gleichförmige Kreisbewegung.

Will man innerhalb einer Problemsituation eine bestimmte derartige Kreisbewegung festlegen, dann muss man danach trachten, dem Aufgabentext die zugehörigen Werte der drei Gößen R, ω und φ zu entnehmen.

☐ (3.3.4a) Bestimmen Sie t_1 so, dass $\boxed{\omega t + \varphi = \omega(t - t_t)}$ gilt. Was für eine Interpretation hat t_1?

☐ (3.3.4b) Wie sieht die Bahnkurve aus, wenn die Bewegung in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene erfolgt? Wie, wenn Sie in der x-z-Ebene liegt? Was bedeutet negatives ω?

☐ (3.3.4c) Wichtig: Wie groß ist die Zeit T, die für einen Umlauf des Punktes benötigt wird? (Diese Zeit wird "Periode der Bewegung" genannt) / Welche Interpretation hat allgemein $\frac{(\omega t+\varphi)}{2\pi}$?

☐ (3.3.4d) Der Punkt bewege sich in einer Sekunde 25 mal um den Kreis herum. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit?

☐ (3.3.4e) Wie erhält man die momentane Geschwindigkeit, wenn wie hier die Bahn in Koordinaten gegeben ist? Formulieren Sie das selbst als allgemeines Rezept und wenden Sie es auf die Kreisbewegung an.

Es sei $\vec{r}^K(t) = 3\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix}$. Dann folgt $\vec{v}^K(t) = 3\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 0\end{pmatrix}$. Wie groß ist der Fehler, den man macht, wenn man

---

(3.3.5) **Flugparabeln**

♦ Als dritte Bewegungsform betrachten wir die "**Flugparabel**". Sie erfaßt alle Situationen, in denen **eine konstante vektorielle Kraft** auf den Massenpunkt wirkt. Ist $\vec{F}$ diese Kraft und m die Masse des Massenpunktes, dann setzt man $\vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}$. Dieser Vektor $\vec{g}$ wird zur Festlegung der Flugparabel benötigt.

♦ Wir geben zunächst nur die Ortsbeschreibung, die zu eben diesem Problem gehört, erneut in der beschriebenen Form $\boxed{\vec{r}(t) = ...}$ Später im Zusammenhang mit der Newtonschen Bewegungsgleichung werden wir das besser begründen. Die Formel für die Bahnkurve lautet:

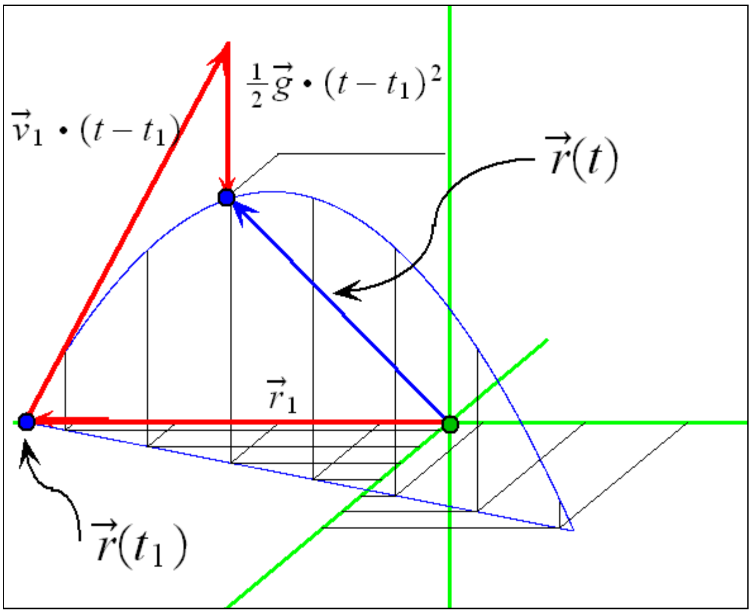
$$\boxed{\vec{r}_{FP}(\mathrm{t})=\vec{r}_1+\vec{v}_1\cdot(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)+\tfrac{1}{2}\vec{g}\cdot(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)^2}$$

Klar ist: Sind $\vec{g}, \vec{r}_1, \vec{v}_1$ und t_1 bekannt, d.h. aus der betrachteten Problemsituation herleitbar, angebbar, dann ist der Rechenausdruck der rechten Seite festgelegt und man kann wie gewünscht $\vec{r}(t)$ für beliebig vorgebbares t berechnen. Alle diese Größen sind äußere Parameter.

Die Formel kann geometrisch als Wegkonstruktion interpretiert werden: Die ersten beiden Summanden $\vec{r}_1+\vec{v}_1\cdot(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)$ beschreiben eine geradlinig - gleichförmige Bewegung. Von dem jeweiligen Endpunkt aus hat man dann in Richtung von $\vec{g}$ weiterzugehen. Die jeweilige Länge wird durch $(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)^2$ bestimmt, genauer ist gleich $\frac{1}{2}\frac{(t-t_1)^2}{|\vec{g}|}$. Das ist eine nicht negative Länge. Die Figur zeigt diese Wegkonstruktion für einen t-Wert.

Welche inhaltliche Interpretation haben die benötigten äußeren Parameter?

Wählt man $t=t_1$, dann folgt sofort $\boxed{\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1}$. D.h. $\vec{r}_1$ ist der Ortsvektor zur Zeit t_1. Kennt man also den Ort der Flugparabel zu einem bestimmten Zeitpunkt, dann wird und darf man t_1 gleich diesem Zeitpunkt wählen und $\vec{r}_1$ gleich dem Ortsvektor des Ortes. Entsprechend ist $\vec{v}_1$ die vektorielle Geschwindigkeit zu derselben Zeit t_1. Und t-t_1 ist die zeitliche Abweichung vom "Informationszeitpunkt" t_1.



?? (Funktion 16)

Merkform

$$\vec{r}_{FP}(\mathrm{t})=\boxed{\underbrace{\vec{r}_1}_{}}_{\textit{Ort}\ \mathrm{in}\ \mathrm{t}_1}+\boxed{\underbrace{\vec{v}_1}_{}}_{\textit{Geschw.}\ \mathrm{in}\ \mathrm{t}_1}\cdot(\mathrm{t}-\boxed{\underbrace{t_1}_{}}_{\mathrm{Informationszeit}})+\frac{1}{2}\boxed{\underbrace{\vec{g}}_{}}_{\mathrm{Konst.Beschl.}}\cdot(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)^2$$

(3.3.5a) Bei dieser Bewegungsform "Flugparabel" ist die (momentane) Geschwindigkeit nie konstant (sofern $\vec{g}\neq\vec{0}$). In der Regel ändern sich Richtung und Betrag der Geschwindigkeit beständig. Man muss daher **von der mittleren Geschwindigkeit zur momentanen** übergehen, einen Grenzübergang vornehmen. Für uns heißt das, dass wir die momentane als mittlere Geschwindigkeit für sehr kleine Δt interpretieren. Anwenden des Rezeptes aus (3.2.6) **liefert uns die korrekte Formel für die momentane Geschwindigkeit**. Sie lautet:

$$\boxed{\vec{v}_{FP}(\mathrm{t})=\vec{v}_1+\vec{g}(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)}.$$

Setzt man hierin $\mathrm{t}=\mathrm{t}_1$, dann folgt $\vec{v}(t_1)=\vec{v}_1$.

D.h. der zweite in der Formel auftretenden Vektor $\vec{v}_1$ ist gerade die vektorielle Geschwindigkeit zum Beobachtungszeitpunkt t_1.

(3.3.6) ■ Beispielaufgabe für eine Flugparabel:

Es sei $\vec{g}=(0,0,-g)$. zum Zeitpunkt t=-3 befinde sich der Massenpunkt am Ort (0,0,20) mit der momentanen Geschwindigkeit (0,5,7). Wo befindet sich der Punkt zum Zeitpunkt t=0, wo zum Zeitpunkt t=1? Wo trifft er die x-y-Ebene (also z=0)?

Vorgehen: Die Daten zusammenfassen:

$$t_1 = -3,\ \ t\text{-}t_1 = t+3 \qquad \vec{r}_1^{\,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1^{\,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{g}^{\,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Das sind gerade die zur Festlegung der Bahnkurve benötigten Größen. Also kann man $\vec{r}^{\,K}(t)$ angeben. Damit folgen spezielle Fragen wie $\vec{r}^{\,K}(0)$ oder $\vec{v}^{\,K}(0)$ oder $\vec{r}^{\,K}(0)$ =.....

$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1(t-t_1) + \frac{1}{2}\vec{g}(t-t_1)^2$	Allg. zu spezialisierende Formel
$\vec{r}^{\,K}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}(t+3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}(t+3)^2$	Einsetzen der durch die Aufgabe geg. äußeren Parameter
$\vec{r}^{\,K}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5(t+3) \\ 20+7(t+3)-5(t+3)^2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}^{\,K}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7-10(t+3) \end{pmatrix}$	Zusammenfassen Endform
$\boxed{\vec{r}^{\,K}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}} \quad \vec{v}^{\,K}(o) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -23 \end{pmatrix} \quad 7{=}10(t_S+3)$, $t_S + 3 = \frac{7}{10}$	t=0 einsetzen gibt die gesuchte Größe
$t_S + 3 = \frac{7}{10} \quad \vec{r}_S = \vec{r}^{\,K}(t_S) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{35}{10} \\ 20 + 7 \cdot \frac{7}{10} - 5 \times \frac{49}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{449}{20} \end{pmatrix}$	

Und wie sieht allgemein die momentane Geschwindigkeit aus?

$\vec{v}(t) = \vec{v}_1 + \vec{g}(t-t_1)$	Allgemeine Formel
$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}(t+3)$	Einsetzen der äußeren Parameter
$= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7-10(t+3) \end{pmatrix}$	Zusammenfassen

Durch Einsetzen irgendeines t-Wertes kann man jetzt die zugehörige momentane Geschwindigkeit bestimmen!

3.4: **Die Änderung der momentanen Geschwindigkeit:** Beschleunigung.

(3.4.1) Abgesehen vom Fall der geradlinig-gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit nicht konstant, ist selbst wieder eine zeitlich veränderliche Größe! Damit könne wir den gesamten Begriffsapparat (Änderung, Änderungsrate,...) auch auf die Geschwindigkeit losklassen!

♦ Mathematisch ist die momentane Geschwindigkeit die Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit.

♦ Ist eine Bahnkurve gegeben, dann kann man mit ihr generell die beschriebene Ableitungsprozedur ausführen mit Regeln zur Bestimmung des Resultates. (Ableitungsregeln). Uns genügt hier das Wissen, dass das prinzipiell möglich ist.

♦♦ Kurz: ist $\vec{r}(t)$ bekannt, dann kann man die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ durch Ableiten berechnen, sie folgt aus der Bahnkurve.

(3.4.5) Über $\vec{v}(t)$ können wir nun - wie angedeutet - weitere Größen bestimmen:

$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$	Geschwindigkeits-änderung
$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)}{\Delta t}$	Mittlere Geschwindigkeits-änderungsrate
$\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$	Momentane Geschwindigkeits-änderungsrate = **Beschleunigung von $\vec{r}$**
$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) \approx \dot{\vec{v}}(t)\Delta t$	Näherung!

♦ Kennt man $\vec{v}(t)$,dann liegt über $\boxed{\Delta\vec{r}_{Lin} = \vec{v}(t)\Delta t}$ die Änderung von $\vec{r}$, also die Ortsänderung $\Delta\vec{r}_{Tatsächlich}$, (näherungsweise) fest.

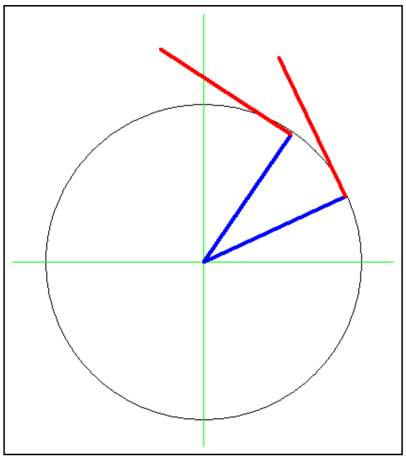
(3.4.6) Ist $\vec{v}(t)$ bekannt, dann kann man $\vec{a}(t)$=$\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$ die zugehörige Rate .als "momentane Beschleunigung" analog (mathematisch) **berechnen.**

♦ Einheit der Änderung, der Beschleunigung ist $\boxed{\frac{m}{s^2}}$=$\frac{m/s}{s}$.

♦ Die Interpretation der Beschleunigung erfolgt über die folgende Gleichung (bei der erneut die mittlere Beschleunigung $\vec{a}_{Mittel}$ näherungsweise durch die momentane ersetzt wird, wenn nur Δt ausreichend klein gewählt wird):

$$\boxed{\vec{v}(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t})\approx \vec{v}(\mathrm{t})+\vec{a}(\mathrm{t})\Delta\mathrm{t}}$$

(3.4.7) □ Im folgenden Bild einer gleichförmigen Kreisbewegung sei R=1. Woran erkennt man, dass $\omega = 1$ gilt? Bestimmen Sie für die beiden aufgenommenen Konfigurationen $\Delta\vec{v}$ zeichnerisch! (Achtung, die Vektoren müssen von einem gemeinsamen Fußpunkt aus starten) Schätzen Sie (eventuelle mit Winkelmesser) auch Δt und daraus eine Schätzung für die mittlere Beschleunigung.



□ Numerische Konsolidierungsübung: Mittlere Beschleunigung bei Autostart, startender 100m-Läufer und ....

(3.4.8) Die Beschleunigung beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit. Beachten Sie: Es geht um die **vektorielle** Geschwindigkeit, nicht um die **skalare**. $\vec{v}$ kann sich ändern, ohne dass sich $|\vec{v}|$ ändert. Denn der Vektorpfeil kann seine Richtung mit fester Länge ändern!

♦♦ Verfügt man über die Geschwindigkeit (für alle t), dann kann man mathematisch die Beschleunigung bestimmen. Mathematisch folgt so für die Flugparabel (sofort durch die beschriebene Konstruktion)

$\boxed{\vec{a}_{FP}(\mathrm{t})=\vec{g}}$ immer und überall im System

Also konstante Beschleunigung.

(3.4.9) Und für die gleichförmige Kreisbewegung folgt (erneut wieder nur das Resultat):

$$\boxed{\vec{a}_{Kreis}(t) = -\omega^2 \vec{r}_{Kreis}(t) = -\omega^2 \mathrm{R}\begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}}.$$

Vergleicht man das mit der zugehörigen Bahnkurve $\vec{r}(t)$, so sieht man sofort: $\boxed{\vec{a}_{Kreis}(t) = -\omega^2 \vec{r}_{Kreis}(t)}$. D.h.: Die Beschleunigung ist (bei der Kreiswbewegung) stets entgegengesetzt gerichtet wie der zugehörige Ortsvektor. Und die beiden Längen sind zueinander proportional!

(3.4.10) ☐ Wie könnte ein möglichst kurzes "Formelblatt zur Klausur" für unsere drei Beispielbewegungen aussehen?

3.4a **Parametrisierung der Bahnkurve.**

Häufig unterliegt die mögliche Bahnbewegung gewissen Einschränkungen. Der Punkt kann sich nicht beliebig im Raum bewegen, er muss beispielsweise auf einer bestimmten Kurve oder Fläche verbleiben! Z.B. auf einer Kugeloberfläche.

Wie beschreibt man eine derartige geometrisch eingeschränkte Bahnkurve, wie berechnet man die zugehörige Geschwindigkeit? Meist hilft dann die Einführung geeigneter "verallgemeinerter Koordinaten weiter. Im Fall eines Pendels beispielsweise benutzt man Polarkoordinaten wobei man weiß, dass eine Koordinate - der Radius - bei der Bewegung konstant bleibt.

Angenommen, die Bewegung soll allgemeiner auf einer Fläche F erfolgen, auf diese beschränkt sein. Dann bestimmt man eine vektorielle Parametrisierung von F, sagen wir $\vec{x}_F(u,v) = ...$ Eine Fläche benötigt zwei freie Parameter. Liegt der Ort $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes für alle Zeiten auf F, dann gehören zu jedem Zeitpunkt t zwei Parameterwerte u(t) und v(t) mit $\vec{r}(t) = \vec{x}_F(u(t), v(t))$. D.h., man kennt den Ort, wenn man die beiden Parameterfunktionen u(t) und v(t) kennt.

Oder auch: **Man muss versuchen, die beiden Parameterfunktionen u=u(t) und v=v(t) zu bestimmen.**

Verläuft die Bahn ganz auf einer Kurve K, geht man analog vor: Man sucht sich eine Parametriserung $\vec{x}_K(a) = ..$ der Kurve und muss die Parameterfunktion a=a(t) bestimmen, für die $\vec{r}(t) = \vec{x}_K(a(t))$ gilt.

Beispiel: Ein Ursprungskreis läßt sich wie folgt parametrisieren:

$$\vec{x}_{Kreis}(\varphi) = R(\vec{e}_1 \cos(\varphi) + \vec{e}_2 \sin(\varphi))$$

Zur Festlegung einer Bewegung auf dem Kreis benötigt man dann die Funktion $\varphi = \varphi(t)$, die angibt, welchen Polarwinkel der Punkt zur Zeit t hat. Das ist der Winkel zwischen $\vec{r}(t)$ und $\vec{e}_1$. Allgemein gilt dann $\vec{r}(t) = R(\vec{e}_1 \cos(\varphi(t)) + \vec{e}_2 \sin(\varphi(t)))$.

Speziell beschreibt $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ eine gleichförmige Kreisbewegung.

Wie erhält man Bedingungen für die Parameterfunktion? Nun dazu muss man in unser Schema einfach die Parametrisierung der Bahnkurve als neue Information einbringen und deren Konsequenzen verfolgen:

♦ Starte mit der Parametrisierungsformel für die Bahnkurve. Etwa $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{x}_F(u(t), v(t))}$.

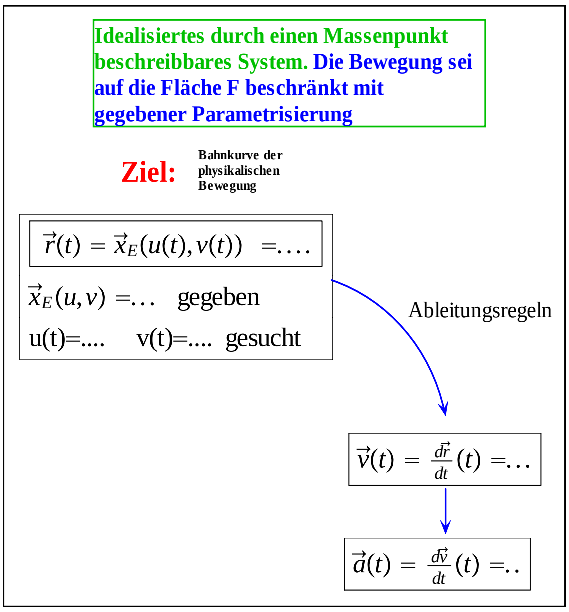
♦ Differenziere mit Hilfe der Kettenregel. Das gibt $\vec{v}$(t)=....

♦ Differenziere erneut. Das gibt die Beschleunigung.

In den mit Hilfe der Ableitungsregeln erhaltenen Formeln für $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ treten die Ableitungen $\dot{u}$(t), $\dot{v}$(t), $\ddot{u}(t)$ und $\ddot{v}(t)$ der beiden interessierenden Parameterfunktionen auf! Als Beispiel geben wir die allgemeine Formel für $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \dot{u}(t)\frac{\partial \vec{x}_F}{\partial u}(t) + \dot{v}(t)\frac{\partial \vec{x}_F}{\partial v}$$

Das Schema des Vorgehens sieht wie folgt aus:



:

Kap. 3b: Dynamik
Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung

Bisher haben wir vornehmlich folgende Situation betrachtet:

★Die uns interessierend Bahnkurve ist bekannt, über eine Formel gegeben

★ Dann berechnen wir die Geschwindigkeit (Änderungsrate) mathematisch

★ Und daraus wieder die Beschleunigung.

Aber die eigentlich wichtigen Situationen sind gerade die, in denen die **Bahnkurve unbekannt** ist und **gesucht** wird.**!**

3.5 **Kraft und Newtonsche Bewegungsgleichung**
(3.5.1) Zunächst wissen wir aus Erfahrung und Experiment:

★Wirkt keinerlei Einfluss, keinerlei Kraft auf den Punkt, dann erhält man eine geradlinig gleichförmige Bewegung. Es ist $\Delta\vec{v} = \vec{0}$ und damit auch $\boxed{\vec{a}(t) = \vec{0}}$ für alle Zeiten t. Die Bahnkurve ist in (3.3.2) beschrieben.

★ Oder: Eine $\boxed{\text{Änderung der vektoriellen Geschwindigkeit}}$ hat immer **eine Ursache in Form eines äußeren Einflusses auf den Massenpunkt.**

★ Die **Klassifikation und Beschreibung** überhaupt denkbarer Einflüsse auf einen Körper erscheinen zunächst als schwindelerregendes kaum machbares Problem. Die Erfahrung sagt jedoch:

Wir können von dem Einfluss alles vergessen bis auf den Wert eines geometrischen Pfeiles "Kraft". Sobald wir diesen kennen, können wir die Änderung der momentanen Geschwindigkeit angeben!

★ Und diese Kraft ist uns in der Regel (durch Messung, Überlegung und Idealisierung!) zugänglich.

★ Die **operative Bestimmung von Kräften erfolgt (im Prinzip, idealisiert)** mit Hilfe von Federwaagen, deren Einfluss gerade die Änderung von $\vec{v}$ kompensiert und der vollständig durch Richtung und Größe der Auslenkung (=Kraftvektor) beschrieben wird!

Zur besseren Ankopplung der Vorstellung können Sie immer die Gewichtskraft heranziehen.

(3.5.2)★★ Also: **Erst wenn ein** (äußerer) **Einfluß in Form einer Kraft $\vec{K}$ auf den Punkt wirkt, kann es eine Änderung $\Delta\vec{v}$ der Geschwindigkeit ungleich Null geben!** Wir erwarten, dass beide Größen näherungsweise proportional sind:

$$\boxed{\Delta\vec{v} \approx \frac{1}{m}\vec{K}(t)\Delta \mathrm{t}} \qquad \text{oder} \qquad \boxed{\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \approx \frac{1}{m}\vec{K}(\mathrm{t})}$$

Die Proportionalitätskonstante m erweist sich als Masse des Massenpunktes.

Je länger die Kraft wirkt, desto größer die Geschwindigkeitsänderung. Daher die Proportionalität in Δt. Exakt wird das erst, für Δt gegen Null, also beim Übergang zur momentanen Rate:

$$\boxed{\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=\frac{1}{m}\vec{K}(t)}$$

Das ist wie folgt zu interpretieren:

Die linke Seite gibt die **Beschleunigung,** die Änderungsrate der Geschwindigkeit mit der Zeit. Das ist eine Beschreibungsgröße des Bewegungsvorganges. Die rechte Seite dagegen ist die **jeweils auf den Punkt wirkende (gesamte) Kraft**. Ein Vektor $\vec{K}$, den man in geeigneter Idealisierung mit Hilfe einer Federwaage messen könnte! Sie - die Kraft - beschreibt den jeweiligen gesamten Umwelteinfluss auf den Punkt!

Damit erhalten wir die überaus wichtige **Newtonsche Bewegungsgleichung** (als Musterbeispiel einer Gleichung für die Änderungsrate):

$$\boxed{\mathrm{m}\vec{a}(\mathrm{t})=\mathrm{m}\frac{d\vec{v}}{dt}(\mathrm{t})=\vec{K}(t)}$$

Also: Die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$ ist proportional zur Kraft, die zur Zeit t auf den Punkt wirkt, der sich am Orte $\vec{x}(t)$ befindet. Und die Proportionalitätskonstante ist die Masse des betrachteten Massenpunktes!

☐ Wieso bleibt ein Masse der Größe m auf einer ebenen Tischplatte unter dem Einfluss der Schwerkraft ruhig liegen? Das ist ein Spezielfall der geradlinig gleichförmigen Bewegung. Wie verträgt sich das mit dem soeben Gesagten?

(3.5.3) Beachten Sie, dass beide Seiten nach ausreichender Idealisierung unabhängig operativ zugänglich sind:

- Die rechte Seite: Die wirkende Kraft wird bestimmt, indem man ihren Einfluss kompensiert. Und zwar durch einen anderen Einfluss, den man durch einen Kraftvektor beschreiben kann. So kann man auch die Krafteinheit festlegen (1 Newton=1kg$\frac{m}{s^2}$). Ein wichtiger nachfolgender Schritt wird darin bestehen, Regeln für die Kraftfestlegung anzugeben.
- Die linke Seite: Hier bestimmt man zuerst den Ort für alle oder möglichst viele Zeiten. Ideal $\vec{r}(t) =$ ....die volle *Bahnkurve.* Daraus erhält man durch Ableiten die momentane Geschwindigkeit und daraus durch erneutes Ableiten die momentane Beschleunigung $\vec{a}(t)$. Den Massenfaktor m kann man schließlich über das Wirkenlassen einer geeigneten Einheitskraft festlegen.

Zwischen all diesen Größen liefert die Newtonsche Gleichung eine zu erfüllende Beziehung, Gleichung. Diese Gleichung hat einen enormen Gültigkeitsbereich und ebensolche Konsequenzen!

Eine Bahnkurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$, die diese Gleichung erfüllt, beschrteibt eine physikalisch mögliche Bewegung des Punktes im System. Ist sie nicht erfüllt, findet man ein derartige Bewegung auch nicht vor.

3.6 **Die zwei Interpretationen der Newtonschen Bewegungsgleichung**

(3.6.1) Die **erste Interpretation:** Man kenne $\vec{r}$(t)=.... etwa durch Beobachtung und Idealisierung! Dann liefert die Bewegungsgleichung einem die wirkende Kraft. Paradebeispiel:

♦ *Die Zentripetalkraft (bei gleichförmiger Kreisbewegung).*

Wir kennen $\vec{r}_{Osz}(t) = R\begin{pmatrix} \cos(\omega t+\varphi) \\ \sin(\omega t+\varphi) \end{pmatrix}$ und haben in (3.4.8) gesehen, wie die mathematisch daraus folgende Geschwindigkeit $\vec{v}$ und Beschleunigung $\vec{a}$ aussehen. Insbesondere ist $\boxed{\vec{a}_{Osz}(t) = -\omega^2\vec{r}_{Osz}(t)}$. Das ist genau die Form, die die Bewegungsgleichung fordert. Die Ursache dieser resultierenden Kreisbewegung muss daher eine zum Kreismittelpunkt gerichtete Kraft $\boxed{\vec{Z}(t) = -m\omega^2\vec{r}_{Osz}(t)}$ sein, die Zentripetalkraft. (Schleudert man einen Stein an einem Faden auf einer Kreisbahn, dann entsteht diese Kraft als Fadenspannungskraft, die das tangentiale Fortfliegen des Steines verhindert!)

♦ Und im Fall der Flugparabel haben wir in (3.4.8) bereits $\vec{a} = \vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}$ gefunden. Tatsächlich findet man Flugparabeln immer als Resultat einer konstanten Kraft vor. (Schwerefeld oder konstantes elektrisches Feld)

(3.6.2) Die **zweite (wichtigere) Interpretation**: Für ein idealisiertes physikalisches System sei die jeweils auf den Punkt wirkende Kraft bekannt. (Über eine geeignete Kombination von Experiment und analytisch verallgemeinerndem Denken). In den meisten Fällen geschieht die Festlegung der Kraft in Form eines **Kraftfeldes.** D. h. man verfügt über eine Formel

$$\vec{F}(\vec{x}) = ...$$

die einem die Kraft liefert, die der Massenpunkt verspürt, wenn er sich am Orte $\vec{x}$ befindet. Befindet er sich zur Zeit t am Orte $\vec{r}(t)$, der durch eine Bahnkurve gegeben wird, dann verspürt er mit $\vec{x} = \vec{r}(t)$ die Kraft $\vec{F}(\vec{r}(t))$.

Newton sagt nun: Physikalisch möglich sind nur Bewegungen, die $\boxed{\mathrm{m}\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))}$ erfüllen. Das ist jetzt eine **Bedingung an die die Bewegung festlegende Bahnkurve** $\vec{r}(t) =$ .... , die erfüllt sein muss. Eine Bedingungsgleichung für die physikalisch zulässigen Bewegungen.

Hat man $\vec{F}$, dann kann man die Änderung von $\vec{r}$ und $\vec{v}$ näherungsweise wie folgt bestimmen

$$\begin{array}{ll} \Delta\vec{r} \approx \vec{v}(t)\Delta t & \text{Ortsänderung} \\ \Delta\vec{v} \approx \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}(t), t)\Delta t & \text{Geschwindigkeitsänderung} \end{array}$$

Die Anfangswerte sind jetzt $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$. Vgl Flugparabel und Kreisbewegung!

Ausgeschrieben:

$$\begin{array}{ll} \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r} \approx \vec{v}(t)\cdot\Delta t & \text{Definition } \vec{v} \\ \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = \Delta\vec{v} \approx \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}(t), t)\Delta t & \text{Newton.} \end{array}$$

In seltenen Fällen kann man die Lösung als Formel hinschreiben. Bei den oben diskutierten Beispielen etwa ist das der Fall. Aber mit Hilfe des Computers kann man über die soeben gegebenen Näherungen die Bahnkurve numerisch bestimmen, wie wir in Kap.5 sehen werden.

Zwei einfache Beispiele, in denen man die Lösung der Bewegungsgleichung analytisch findet, sind das konstante Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x}) = m\vec{g}$ und der harmonische Oszillator.mit $\vec{F}(\vec{x}) = -k\vec{x}$..Die Lösung des ersten Falles besprechen wir ausführlich im Anhang über die Flugparabel. Das ebene Pendel kann man für kleine Ausschläge durch den Oszillator nähern.

In komplizierteren Fällen muss man meist eine geschickte Parametrisierung der Bahnkurve einführen, wie in Kap.3.4a besprochen.

3.7 **Wie findet man die Kraft im Falle der Kraftfelder?**

(3.7.1) In wichtigen Fällen wird die wirkende Kraft $\vec{K}(t)$ durch ein *Kraftfeld* erzeugt. Das ist in mathematischer Hinsicht eine Größe der form $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = ...}$. Rechts sollte dann ein Rechenausdruck stehen, der aus einem vorgebbaren geometrischen Pfeil $\vec{x}$ einen anderen mit $\vec{F}(\vec{x})$ bezeichneten Pfeil macht. Und in unserem Fall hat dieser Pfeil die Interpretation:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) \text{ ist die Kraft, die auf einem am Orte } \vec{x} \text{ befindlichen Massenpunkt wirkt!}}$$

Befindet sich der Punkt daher zur Zeit t am Orte $\vec{r}(t)$, dann verspürt er dort die Kraft $\vec{K}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$. Das ist in die Newtonsche Gleichung einzusetzen.

(3.7.2) Rechenbeispiel in der Ebene:

$$\vec{x}^K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}^K(x,y,t) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

☐ Einsetzübung: $\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$

Was ist $\vec{F}^K(\vec{r}^K(t))$. was speziell $\vec{F}^K(\vec{r}^K(2))$?

(3.7.3) **Graphische Veranschaulichung von Kraftfeldern**

Wir beschränken uns auf den Fall der Darstellung in einer Ebene.

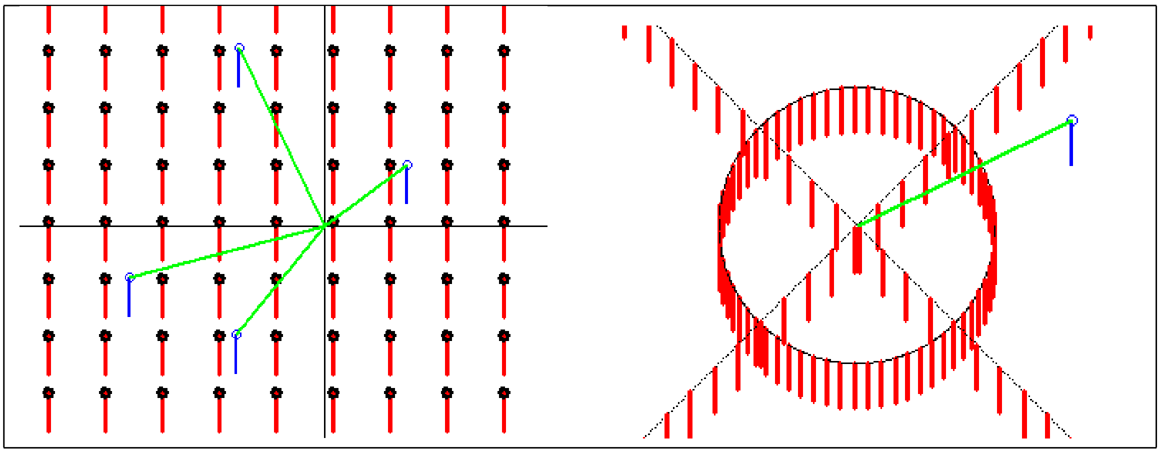
⧫ Fixiere einen Ursprung. Zu jedem Punkt P der Ebene gibt es dann einen Ortsvektor $\vec{x} = \vec{x}_P$. , der zu diesem Punkt führt. (In den nachfolgenden Zeichnungen grün).

◊ Man kann $\vec{x}$ als Pfeil (kürzester Weg) oder in Koordinaten (achsenparalleler Weg) darstellen.

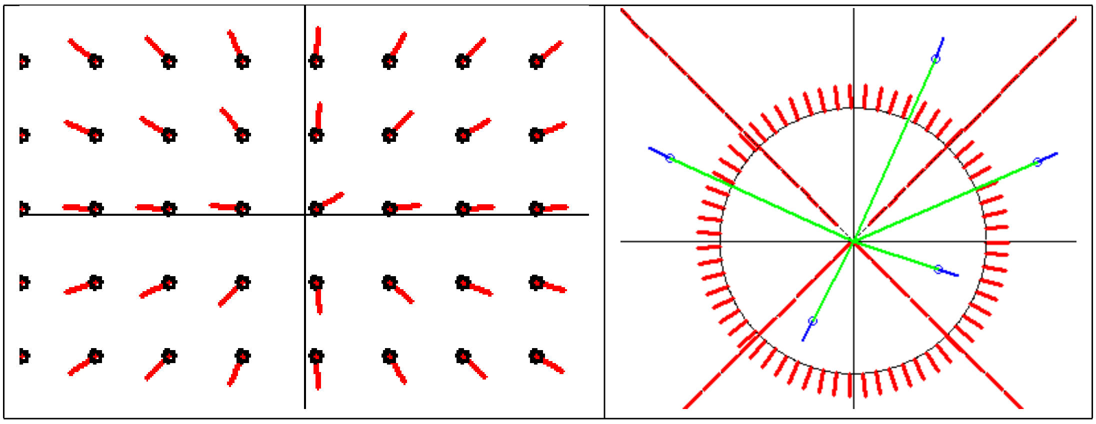
⧫ Die Formel $\vec{F}(\vec{x}) =$ .... sagt dann aus, wie man zu gegebenem $\vec{x}$ den dort (in P) vorliegenden Kraftvektor zu berechnen hat. Diesen Vektor kann man sich dann an den Punkt P angeheftet vorstellen.

◊ In vielen Fällen reicht es, eine Folge von Punkten auf dem Einheitskreis zu wählen, und dort die Feldvektoren (=in P herrschende Feldstärke) anzuheften. So gewinnt man eine gutes erstes Bild über das Feldverhalten! Andernfalls kann man ein Gitternetz von Punkten wählen.

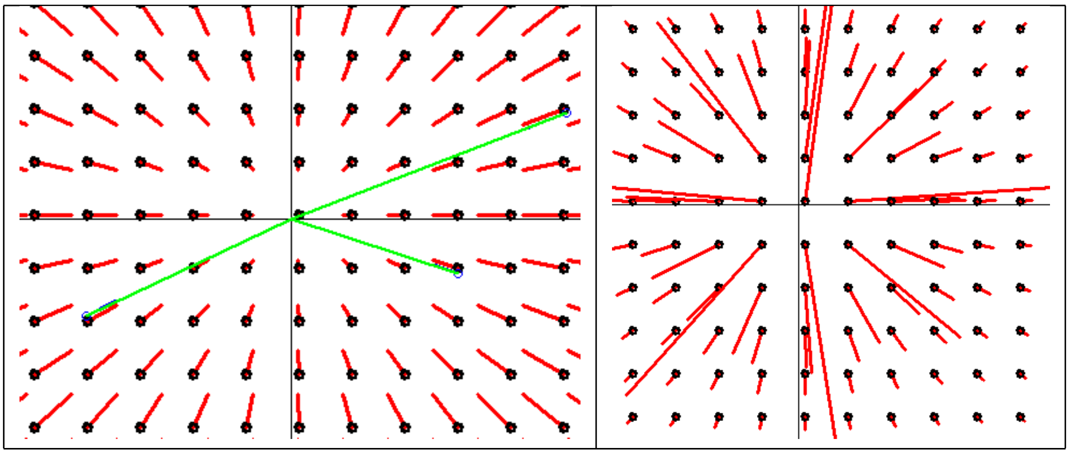
(3.7.4) Als erstes Beispiel betrachten wir ein konstantes Feld (wie das zur Flugparabel gehörige Feld). $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{g}$ mit $\vec{g}^K = (0, -1)$. Im linken Bild ist ein ganzes Gitter von Punkten des $\vec{x}-$Raumes gewählt und an jeden Punkt (rot) der dort herrschende Feldvektor angeheftet! Für einige Punkte ist (grün) der Ortsvektor $\vec{x}$ mit eingezeichnet und blau der zugehörige Feldvektor angeheftet! Im rechten Bild ist das Feld nur für Punkte auf dem Einheitskreis und den beiden Winkelhalbierenden gezeichnet! Die Formel $\vec{F}(\vec{x}) = ...$ gibt jeweils an, wie in jedem Punkt blau aus grün entsteht!



(3.7.5) Als nächste Feld betrachten wir $\vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{10}\frac{\vec{x}}{r}$. Dieses Feld ordnet jedem Punkt einfach den radialen Einheitsvektor zu. Damit man die Übersicht behält, wird die Länge jeweils auf $\frac{1}{10}$ reduziert. Erneut geben wir beide Darstellungen. Das zweite instruktivere Bild verdeutlicht die Aussage, dass bei diesem Feld Ortsvektor $\vec{x}$ und Feldvektor $\vec{F}(\vec{x})$ dieselbe Richtung haben.



(3.7.6) Bei den nächsten beiden Feldern ändern wir nicht nur die Richtung, sondern auch die Länge der Feldvektoren. Das linke Feld ist das Oszillatorfeld $\vec{F}(\vec{x}) = -\alpha\vec{x}$. Der Feldvektor zeigt auf das Zentrum zu und seine Länge wächst proportional zum Abstand. Das rechte Feld ist das Coulombfeld $\vec{F}(\vec{x}) = \alpha\frac{1}{r^2}\frac{\vec{x}}{r}$. Wieder sind alle Feldvektoren radial nach aussen gerichtet, aber ihre Länge wird wegen des Faktors $\frac{1}{r^2}$ geringer, je weiter man sich vom Ursprung entfernt. Verdopplung des Abstandes reduziert die Länge des Feldvektors auf $\frac{1}{4}$. Für die $\vec{x}$-Werte in der Nähe des Ursprunges ist der Feldvektor so groß, dass er über den Bildrand hinausgeht.



(3.7.7)**Drei physikalisch besonders wichtige Kraftfelder:**

$\vec{F}_{konst}(\vec{x}) = \vec{g}$	Konstantes Feld
$\vec{F}_{Osz}(\vec{x}) = -k\vec{x}$	Oszillatorfeld
$\vec{F}_{Coul}(\vec{x}) = \underbrace{\frac{\alpha}{\lvert\vec{x}\rvert^2}}_{Betrag} \underbrace{\boxed{\frac{\vec{x}}{\lvert\vec{x}\rvert}}}_{Richtung}$	Feld vom Coulombtyp

Diese Formeln sollte man sich merken. Die graphische Veranschaulichung dieser Felder in einer den Ursprung enthaltenden Ebene haben wir bereits gegeben.

(3.7.8) Das dritte Beispiel ist physikalisch besonders wichtig. Hier ist es sogar möglich, eine **Ursache** für ein derartiges Feld anzugeben :

Bringt man einen Massenpunkt mit Masse M an den Ursprung, dann erzeugt dieser ein Kraftfeld vom Gravitationstyp. Genauer: bringt man einen zweiten Massenpunkt der Masse m an den Ort $\vec{x}$, dann verspürt dieser die folgende Kraft von M verursachte Kraft:

$$\vec{F}_{Grav}(\vec{x}) = \frac{\alpha}{|\vec{x}|^2}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad \text{mit} \quad \alpha = -GmM \qquad \text{G=....}$$

Die Masse M im Ursprung nennt man "die felderzeugende Masse" oder die "Quelle des Feldes". Das wichtige negative Vorzeichen besagt, dass $\vec{F}(\vec{x})$ hier entgegengestzt zu $\vec{x}$ gerichtet ist! Und das heißt, dass die Kraft anziehend ist.

Regeln zum Bau neuer Felder

(3.7.9) Jetzt gibt es eine Reihe von Regeln, wie man aus dem beschriebenen Gravitationsfeld weitere Kraftfelder gewinnt:

(3.7.10) ⧫ *Translation:* Befindet sich die felderzeugende Masse nicht im Ursprung, sondern in einem Punkt mit Ortsvektor $\vec{a}$, dann wird folgendes Feld erzeugt:

$$\vec{F}_{Grav,\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{\alpha}{|\vec{x}-\vec{a}|^2}\frac{\vec{x}-\vec{a}}{|\vec{x}-\vec{a}|}$$

☐ Woher kennen Sie diese Konstruktion "ersetze einfach $\vec{x}$ überall durch $(\vec{x}-\vec{a})$" noch?

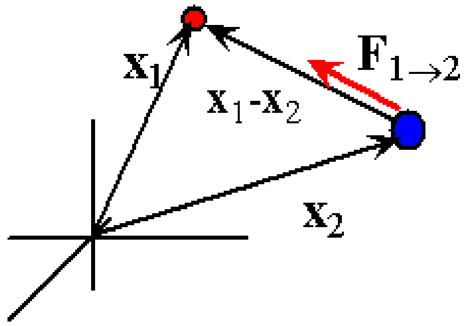
(3.7.11) ⧫ Wir haben die Masse M in $\vec{a}$ als felderzeugende Masse interpretiert und gesagt, dass Sie in $\vec{x}$ eine Kraft auf m bewirke. Hat aber auch die in $\vec{x}$ befindliche Masse m eine Kraftwirkung auf M in $\vec{a}$? Ja tatsächlich. Und sie wird auch durch die analog zu bildenden Formel geliefert.

Genauer: Befindet sich in $\vec{x}_1$ die Masse M$_1$ und in $\vec{x}_2$ die Masse M$_2$, dann verspürt letztere eine Kraft $\vec{F}_{1\to 2}$ und erstere eine Kraft $\vec{F}_{2\to 1}$. Diese Kräfte werden wie folgt gegeben:

$$\vec{F}_{1\to 2}(\vec{x}_2) = -G\frac{M_1 M_2}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^3}(\vec{x}_2-\vec{x}_1) \quad \vec{F}_{2\to 1}(\vec{x}_2) = -G\frac{M_1 M_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$$

Da $|\vec{x}_1-\vec{x}_2| = |\vec{x}_2-\vec{x}_1|$ gilt, folgt

$$\vec{F}_{1\to 2}(\vec{x}_2) = -\vec{F}_{2\to 1}(\vec{x}_2) \qquad \text{"actio gleich minus reactio"}$$



1 erzeugt eine auf 2 wirkende Kraft $\vec{F}_{1\to 2}$. Sie zeigt in Richtung. von 2 nach 1. (Anziehend)

(3.7.12) ⧫ *Superposition:* Befindet sich eine erste felderzeugende Masse M$_1$ in $\vec{a}_1$ und eine zweite M$_2$ in $\vec{a}_2$, dann gilt

$$\vec{F}_{Grav}(\vec{x}) = \frac{\alpha_1}{|\vec{x}-\vec{a}_1|^2}\frac{\vec{x}-\vec{a}_1}{|\vec{x}-\vec{a}_1|} + \frac{\alpha_2}{|\vec{x}-\vec{a}_2|^2}\frac{\vec{x}-\vec{a}_2}{|\vec{x}-\vec{a}_2|} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l}\alpha_1 = -GmM_1\\ \alpha_2 = -GmM_2\end{array}$$

(3.7.13) **Fassen wir zusammen:** Gibt man irgendeine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ vor, dann kann man $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ mathematisch durch Ableiten bestimmen. Andererseits ist $\vec{F}(\vec{x})$ physikalisch gegeben. Man kann beide Seiten der Bewegungsgleichung bilden und inspizieren, ob für alle t gilt $m\vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$. Ist das der Fall, hat man eine physikalisch zulässige Bewegung vorliegen, ist das nicht der Fall, ist sie physikalisch nicht zulässig und kommt nach aller Erfahrung auch nicht vor! Nie beobachtet man etwa im konstanten Schwerefeld spontan eine Kreisbewegung: Für diese wäre m$\vec{a}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t)$ und das ist nicht gleich dem geforderten m$\vec{g}$.

Mit Hilfe der zweiten Interpretation ($\vec{K}(t)$ gegeben) sagt man daher physikalische Bewegungsabläufe im idealisierten System voraus!

In der Regel wird $\vec{K}$ dann in Form eines Kraftdeldes gegeben. Dann wird die Bewegungsgleichung zu einer Differentialgleichung für die physikalischen Bahnkurven $\vec{r}(t)$. In seltenen Fällen kann man die entstehende Gleichung exakt in Formelform lösen. Numerische Näherungslösungen lassen sich mit Hilfe des Computers jedoch einfach bestimmen wie wir noch sehen werden. :

3.7a Koordinatendarstellung der Felder

(3.7.14) In der Regel kann man nicht mit der koordinatenfreien Darstellung der Newtonschen Bewegungsgleichung arbeiten, man muss sie zerlegen, über geeignete Wege darstellen. Vgl. .... D.h. man muss sowohl $\vec{a}$ als auch $\vec{F}$ auf diese Weise darstellen. Der wichtigste und vielfach benutzte Fall ist die Zerlegung von $\vec{F}$ in kartesischen Koordinaten. **Dann stellt man sowohl $\vec{F}(\vec{x})$ als auch $\vec{x}$ als achsenparallelen Weg in demselben kartesischen koordinatensystem K dar**. Das ergibt eine Funktion

$$\vec{F}^K(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z)\\ F_2(x,y,z)\\ F_3(x,y,z)\end{pmatrix}.$$

die wir "Koordinatendarstellung des Feldes $\vec{F}$ (im System K)" nennen wollen.

(3.7.15) Nochmals zur Bedeutung: Der Ort mit Ortsvektor $\vec{x}$ hat in K die Koordinaten x,y,z.. An diesem Ort herrscht die Feldstärke $\vec{F}(\vec{x})$. Zerlegt man diese achsenparallel, dann bezeichnet $\mathrm{F}_1(x,y,z)$ die zugehörige 1- oder x-Komponente. Usw.

(3.7.16) **Beispiel:** K sei festes kartesisches Koordinatensystem und $\vec{F}_0(\vec{x}) = C\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$. Dann gilt offensichtlich

$$\vec{F}_0^K(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{x}^K$$

Liegt die Feldquelle nicht im Ursprung, sondern in $\vec{a}$ mit

$$\text{mit} \quad \vec{a}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \quad \vec{x}^K - \vec{a}^K = \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

dann folgt

$$\vec{F}_{\vec{a}}^K(x,y,z) = \sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

usw.

☐ Berechne $\vec{F}_{\vec{a}}^K(1,1,1)$ und $\vec{F}^K(1,1+\Delta y,1)$ sowie die Änderung des Feldwertes zwischen diesen beiden Punkten. Dazu die mittlere Änderungsrate zwischen diesen beiden Punkten und die momentane Änderungsrate in y-Richtung an der Stelle (1,1,1). Bezeichnung: $\frac{\partial\vec{F}^K}{\partial y}(1,1,1)$.

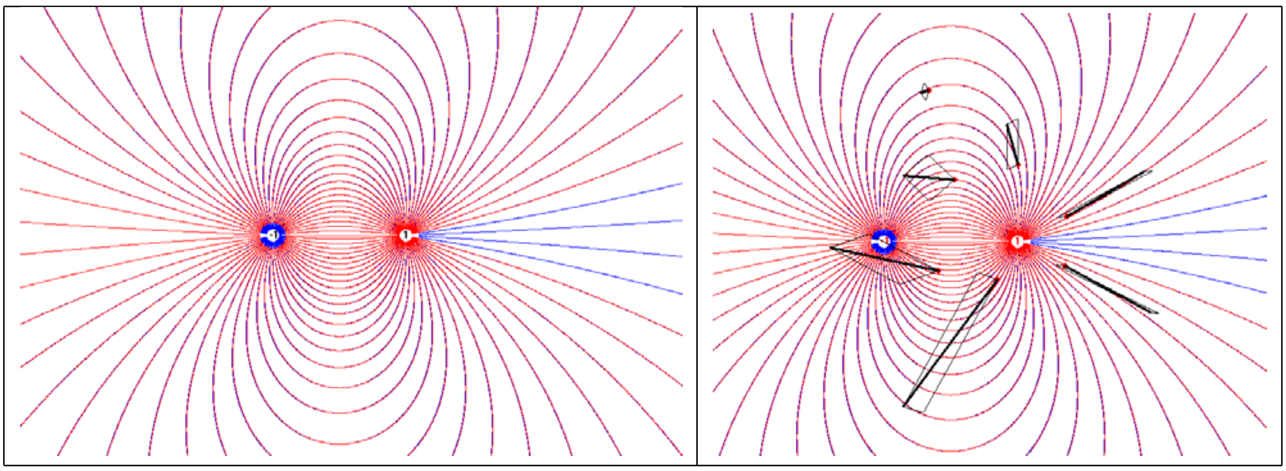
3.7.b **Feldlinien**

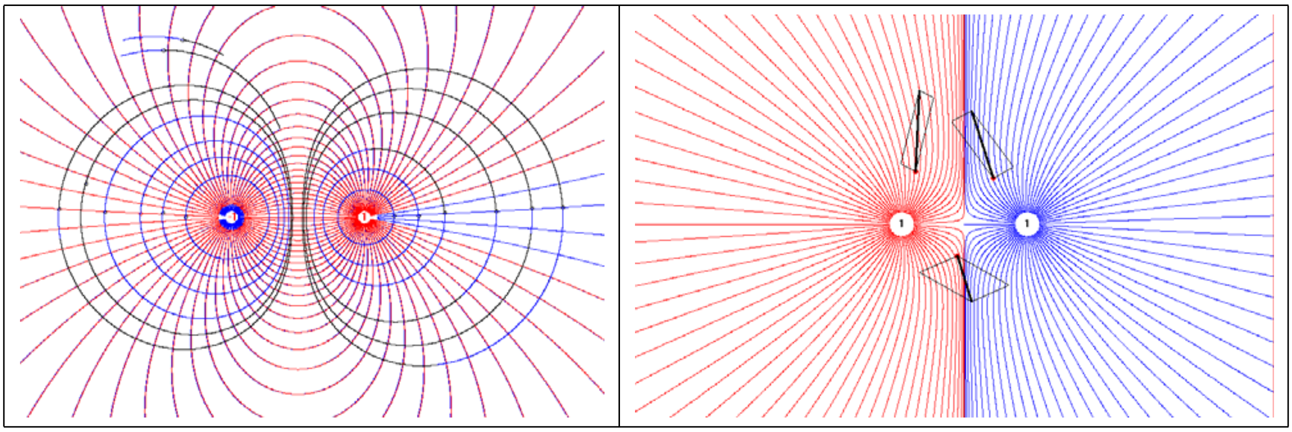
Feldlinien sind Kurven, deren Tangent an jeder Stelle dieselbe Richtung hat, wie der dort herrschende Feldvektor. Man erhält sie als Lösungen der folgenden Differentialgleichung

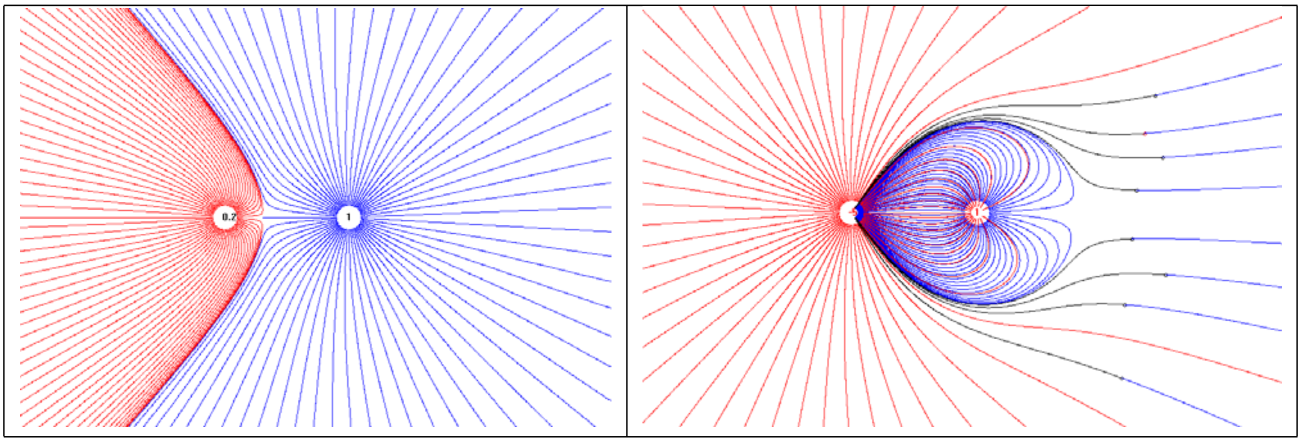
$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Momentane Geschwindigkeit
gleich dort herrschender
Feldstärke!

Als Feld wählen wir - wi in der Vorlesung - das Feld von zwei Ladungen.







3.8 **Zwangskräfte**

(3.8.1) Wie entstehen geometrisch eingeschränkte Bewegungen? Auf einer Fläche oder eine Kurve? Die Newtonsche Bewegungsgleichung gilt auch hier. Aber es treten Kräfte auf, die nicht vom Feldtyp sind. Man bezeichnet Sie als Zwangskräfte.

Wieso fällt ein Körper auf einer Tischplatte unter dem Einfluss der Schwerkraft nicht weiter nach unten? Wieso bleibt er in Ruhe liegen? Weil die Tischplatte etwas eingedrückt wird und auf den Körper eine der Schwerkraft entgegengesetzte Kraft ausübt. Der Betrag dieser Kraft ist immer gerade so groß, dass die Schwerkraft kompensiert wird. Die resultierende Kraft zu Null wird. Auf diese Weise wird die Ruhe des Körpers erzwungen.

(3.8.2) Wie muss man in einem solchen Fall vorgehen?

♦ (1 u. 2)Man startet mit einer Parametrisierung der Bahnkurve und bestimmt mathematisch Geschwindigkeit und Beschleunigung (3 u. 4).

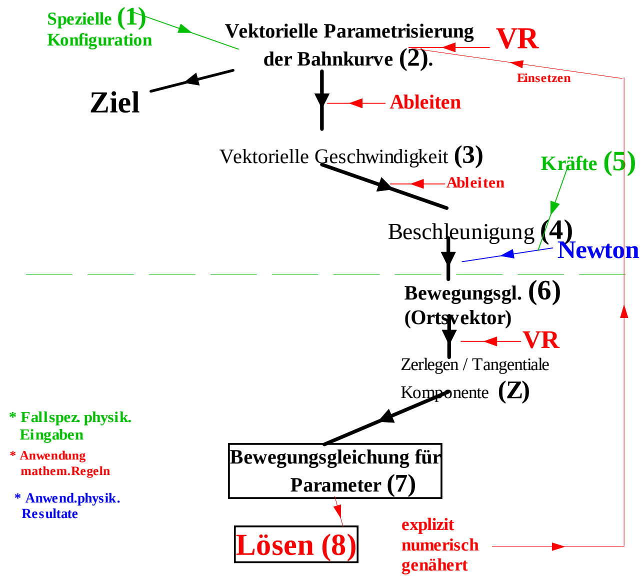
♦ Die Konfiguration legt zulässige und geometrisch unzulässige Bewegungsrichtungen für jeden einzelnen Punkt fest.

♦Man bestimmt die physikalisch wirkenden Kräfte (5) , etwa Feldkräfte und zerlegt sie an jedem Ort in die Komponenten zulässiger und unzulässiger Bewegungsrichtungen (Z). D.h. man entwickelt eine entsprechende Wegkonstruktion. Jetzt kann man die B ewegungsgleichung für das System angeben (6) .

♦Die Kraftkomponenten in die unzulässigen Richtungen werden dann durch Zwangskräfte kompensiert (Z).

♦♦Es verbleiben die Komponenten in die zulässigen Richtungen (Z). Für diese Richtungen muss man die gesamte Newtonsche Bewegungsgleichung zerlegen. Die Gleichungskomponenten der zulässigen Richtungen ergeben die gesuchten Differentialgleichungen für die Parameterfunktionen (7).

Beispiele: Anhang Pendel / Anhang Flugparabel, dort schiefe Ebene / Anhang Zykloidbewegung.



3.9 Mehrkörpersysteme

Jetzt betrachten wir ein System, bei dem es um die Bewegung mehrerer Massenpunkte geht. Man benötigt also die Bahnkurven aller Massenpunkte. Numerieren wir sie mit 1,2,...N durch. Jetzt soll unser bisheriges Vorgehen auf diesen Fall verallgemeinert werden. Das erfolgt in naheliegender Weise.

☐ Formulieren Sie die Verallgemeinerung selbst, mindestens für den Spezialfall N=2. Stichworte:

- Bewegungsgleichung wofür?
- Resultierende, wirksame Kräfte. (Dabei zwei Arten unterscheiden, (3.7.10-12) berücksichtigen! Keine Zwangskräfte!)
- Wie sieht die Verallgemeinerung von (3.6.2) aus?