22.2.

Heute die Methode zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen besprochen
Kapitel. 4

Vorbemerkungen

1) Klausurtermin? Wer kann nächsten Freitag nicht? Bitte melden. Es ist nicht mehr klar, wieviele ernsthafte Interessenten am Kurs vorhanden sind. Ein zweiter Termin wäre in der Mitte der darauf folgenden Woche möglich.

2) Probeklausur? Als häuslicharbeit. 2 Stunden konzentriert am Wochenende. Ich gebe heute unf morgen eine Auswahl von Aufgaben. Suchen Sie sich darunter solche aus, die Sie *gerade noch schaffen.* Also nicht solche die Ihnen besonderws leicht erscheinen. Montag abgeben. Ich werde mich bemühen, sie bis Dienstag zu korrigieren und werde sie dann einzeln kommentieren.

3) **Wie wurden die Ratschläge / Mahnungen des ersten Tages erfüllt?** Schlecht, viele kommen zu spät, fragen nicht, wenn sie etwas nicht verstanden haben,.geschweige denn, dass sie sich um eigene spezielle Defizite .kümmern.... **Daher: Viel Arbeit kommendes Wochenende! !**

4) Wie steht es mit Ihrer Fähigkeit zur Wissenskomprimierung - dem Heraussarbeiten des Wesentlichen? Das danach benutzt wird, die Problemlösung zu steuern? Denken Sie an die heutigen Erfahrungen mit der Lösung der Differentialgleichungen. Fast alle kamen mit dem allgemeinen Resultat nicht zurecht. Wußten im Prinzip meist, was zu tun war, taten es aber extrem zögerlich..

5) **Datensatz zur Schwingungsdauer des Pendels: Bitte morgen oder Montag abgeben!**

Erste Auswahl von Aufgaben. In der Veranstaltung wurde die Lösungsstrategie und der jeweilige Augfgabenhintergrund besprochen. Der Rest sollte dann gehen!

☐ (1)Das Bestimmen von Geschwindigkeiten bereitete gestern Probleme. Dazu zwei Beispiele:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ 2ct^2 \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \cdot \sin\theta(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \cdot \sin\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die zugehörige vektorielle Geschwindigkeit.

☐ (2) Sei $\vec{F}^K = \vec{F}^K(x, y, z)$ ein Vektorfeld. Sie suchen die die momentane Änderungsrate von $\vec{F}^K$ in z-Richtung an der Stelle $\vec{x}_0 = (2, a, 2)$. Welche Ableitung ist zu bilden? Und was ist anschließend zu tun? (*Strategiebeschreibung).*

☐ (3) Sei $\vec{F}^K = \vec{F}^K(x, y, z)$ ein Vektorfeld. Sie kennen $\vec{F}^K(2, 3, 2)$ und die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta \vec{F}^K}{\Delta y}$ von $\vec{F}^K$ in y-Richtung zwischen (2,3,2) und (2,3.5,2). Wie erhalten Sie $\vec{F}^K(2, 3.5, 2)$? (Formel!)

☐ (4) Was für eine Bahnbewegung wird durch die folgende Bahnkurve beschrieben?

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ t \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ 0 \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

☐ (5) Gegeben zwei felderzeugende Ladungen (Quellen). Liegen die Quellen im Ursprung, so erzeugt die erste Quelle ein Feld $\vec{F}_1$ und die zweite ein Feld $\vec{F}_2$ mit

$$\vec{F}_1(\vec{x}) = \frac{2}{|\vec{x}|^3}\vec{x} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_2(\vec{x}) = \frac{3}{|\vec{x}|^3}\vec{x}.$$

Jetzt wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, die erste Quelle wird an die Stelle $\vec{a}_1^K = (0,2,1)$ verschoben und die zweite an die Stelle $\vec{a}_2^K = (0,-2,1)$. Es gilt Superposition. Wie groß ist das resultierend Feld an der Stelle $\vec{x}_0 = (1,0,2)$?

Beschreiben Sie zunächst kurz die Vorgehensstrategie!

☐ (6) Für die Intensität unter Absorbtion haben wir die folgende Differentialgleichung hergeleitet:

$$\frac{dI}{dx}(x) = -CI(x). \text{ Weiter gelte } \mathrm{I}(\mathrm{x}_0) = I_0.$$

D.h. eine Funktion I=I(x) ist gesucht mit $\mathrm{I}(\mathrm{x}_0) = I_0$, die diese Differentialgleichung erfüllt.

Zeigen Sie, dass I(x)=$\mathrm{I}_0 e^{-C(x-x_0)}$ dieses Problem löst.

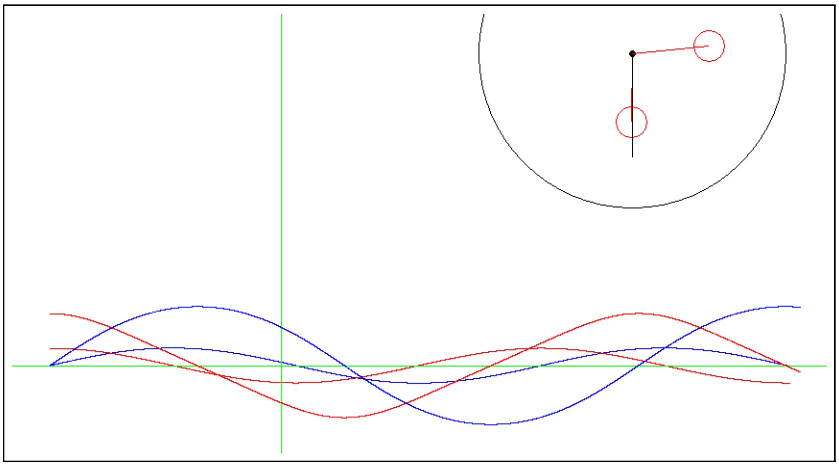
☐ (7) Zur Schreibweise ("Notation"): Sei $\vec{F}^K(x,y,z)$ ein Vektorfeld. Für die partiellen Ableitungen benutzen wir die Schreibweise $\frac{\partial \vec{F}^K}{\partial x}(x,y,z)$ in der der Buchstabe x zweimal auftaucht. Aber es ist in gewisser WEise nicht "dasselbe x". Begründen Sie das, indem Sie für

$$\vec{F}^K(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy - yz + vz \\ xyz \end{pmatrix}$$

folgende Größen ausrechnen und vergleichen $\frac{\partial \vec{F}^K}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial \vec{F}^K}{\partial x}(y,y,z)$, $\frac{\partial \vec{F}^K}{\partial x}(z,1,2)$

☐ (8) Die Pendelbewegung wird durch die Funktion "Auslenkwinkel" $\alpha = \alpha(t)$ beschrieben. Wie sollte man die Funktion und die Bewegung mit Hilfe des Computers möglichst darstellen?

Hierzu ein "screenshot" des vorgestellten Programmes. Horizontal t-Achse. Vertikal α (blau) und $\dot{\alpha}$ (rot). Zwei Die Funktionen sind für zwei Anfangswerte gezeichnet.



Das Pendel bewegt sich synkron mit, wenn sich die Funktionen zeitlich entwickeln.

Wie sehen die Gleichungen zur numereischen Bestimmung der Lösung einer Differentialgleicchung 2. Ordnung aus? Nochmals

$$y(x+\Delta x) = y(x) + \boxed{\frac{dy}{dx}}\Delta x$$

$$v(x+\Delta x) = v(x) + \boxed{\frac{dv}{dx}}\Delta x$$

Als Beispiel die Gleichung $\boxed{y''(x) = x \cdot y(x) \cdot y'(x)}$ Das gibt folgendes System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v(x) \\ \frac{dv}{dx} &= xy(x)v(x) \end{aligned}$$

Wahle als Anfangswerte y(1)=1 und v(1)=1. Wähle zusätzlich $\Delta x = 0.1$ und bestimme näherungsweise x(1.3).

....\x=	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y(x)	1	1.1	1.21	$\boxed{1.3333}$	
v(x)	1	1.1	1.2331	1.4122	
$\frac{dy}{dx}(x)$	1	1.1	1.2331	usw.	
$\frac{dv}{dx}(x)$	1	1. 331	1.7905		
$\frac{dy}{dx}(x)\Delta x$	0.1	0.11	0.1233		
$\frac{dv}{dx}(x)\Delta x$	0.1	0.1331	0.1791		

Der exakte Wert ist 1.363.

Die Differentialgleichung $y'(x) = F(x, y(x))$ erlaubt folgende Interpretation:

Angenommen $y=y_s(x)$ ist eine lösung dieser Gleichung mit $y(x_0) = y_0$. D.h. die Lösung geht durch den Punkt (x_0, y_0). Dann hat die Lösungskurve dort die Steigung $\frac{dy_s}{dx}(x_0)$. Als Steigungsvektor geschrieben $\vec{m}(x_0, y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dy_s}{dx}(x_0) \end{pmatrix}$. Da nun aber y_S die Differentialgleichung erfüllen soll, gilt $\frac{dy_s}{dx}(x_0) = F(x_0, y_S(x_0)) =$

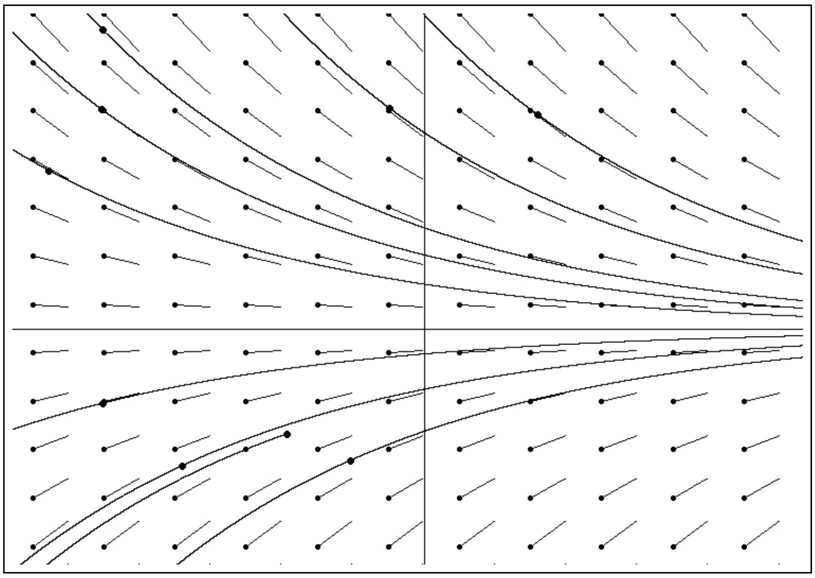
$F(x_0, y_0)$. **Und die letzte Größe kann man ausrechnen, ohne dass man die Lösung kennt.** Oder: die Differentialgleichung bestimmt in jedem Punkt der x-y-Ebene die Steigung der zugehörigen Lösungskurven!

Jetzt kann man ein Gitter solcher Feldvektoren malen und erhält eine qualitative Vorstellung über den Verlauf der Lösungskurven!

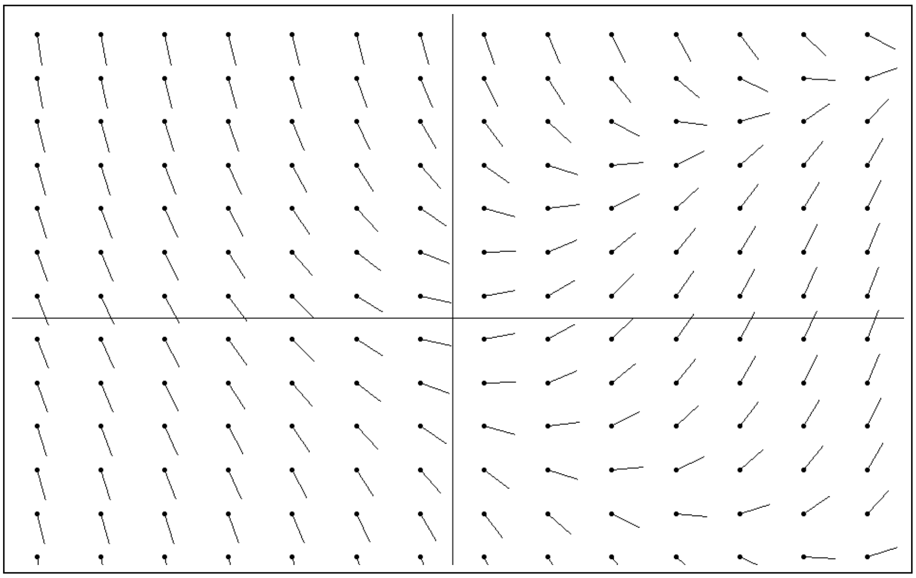
Einige Beispiele solcer Steigungsfelder mit einigen eingezeichneten Lösungskurven:

Die Differentialgleichung $\boxed{y'(x) = -0.6y(x)}$

Am Punkt $(\mathrm{x}_0, y_0) = (1,2)$ gilt beispielsweise $\vec{m}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6 \cdot 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.72 \end{pmatrix}$



Das Feld der Differentialgleichung $\mathrm{y}'(x) = x - y^2(x)$.
☐ Zeichnen sie selbst den qualitativen Verlauf einiger Lösungskurven ein.



Weitere **Übung zum 22.2.**:

☐ Gegeben die Differentialgleichung $y'(x) = y(x) + x$.

a) Zeigen Sie, dass $y_c(x)=ce^x - x - 1$ für jedes c eine Lösung dieser Gleichung ist

b) Bestimmen Sie c derart, dass $y_c(x)$ die Anfangsbedingung $y_c(0) = 3$ erfüllt.

c) Skizzieren Sie das "Richtungsfeld" dieser Differentialgleichung (analog zu den beiden vorangegangenen Beispielen und skizzieren Sie darin grob den Verlauf der in b) bestimmten Lösung.

Tagebuch: **23.2.**

Heute: Nur Übungen

Bitte strikt per Blatt trennen: **Entwurf, Konzept - Ausformulierte Antwort**

Die Antworten sollen alle ohne weiteres Nachschlagen (im Skript) mit Hilfe der verstandenen angegebenen Formeln beantwortet werden!

Die Aufgaben können auch für die Probeklausur benutzt werden. Ich gebe nachfolgend nur Teile der Lösung.

Brechungsgesetz: $\boxed{\sin(\varepsilon) = n\sin(\alpha)}$

☐ 1) Zum Umgang mit dem Brechungsgestz

a) Was versteht man unter "Totalreflexion"

b) Wie lautet die Formel für den Grenzwinkel der Totelreflexion?

c) Wie groß muss der Brechungsindex n sein, damit der Grenzwinkel gerade gleich $\frac{\pi}{4}$ ist?

d*) Leiten Sie eine vektorielle Formel für einen Richtungsvektor des gebrochenen Strahles her.

Linsengesetz $\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$

2) a) Stellen Sie die Gleichung nach b um.

b) Was bedeutet negatives b ?

c) Wie konstruiert man zu gegebenem Gegenstandspunkt G den zugehörigen Bildpunkt B geometrisch? f sei gegeben. Machen Sie eine Skizze mit deren Hilfe Sie die Antwort geben. Wählen Sie darin g>f. Wieso darf man G nicht auf die optische Achse selbst legen?

d) Ein optisches System habe einen rechten Brennpunkt F_r. Was bedeutet das? Ergänzung: Was heißt wohl negatives f???

Begriffssystem:

3) Wir betrachten eine dünne Linse mit Brennweite f.

a) Dann ist die Bildweite b durch die Gegenstandsweite g festgelegt: b=b(g). Vgl. 2a). Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von b wenn g von g_1 nach g_2 geht!

▼Wir bezeichnen die gesuchte Änderungsrate mit $\frac{\Delta b}{\Delta g}(g_1, g_2)$. Achtung. Das ist eine "Von-Klammer"!.Mit Hilfe von 2a und etwas Rechnung folgt

$$\frac{\Delta b}{\Delta g}(g_1, g_2) = -\frac{f^2}{g_1 g_2 - f g_2 - f g_1 + f^2}.$$

▲ .

b) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate von b in g. Wie groß ist diese Änderungsrate insbesondere für f=1 ind g=3?

▼ Das ist $\frac{db}{dg}(g)$. Mit Hilfe der Quotientenregel (*denken Sie an effizientes Vorgehen)* folgt

$$b = b_f(g) = \frac{fg}{g-f} \qquad \boxed{\frac{db_f}{dg}(\text{g})=\frac{-f^2}{(g-f)^2}} \qquad \boxed{\frac{db_1}{dg}(3)=\frac{-1}{4}}$$

▲

c) Sei jetzt f=1 und g_1=3 und g_2 = 3.3. Wie groß ist der relative Fehler, den man macht, wenn man die mittlere Änderungsrate aus a) für die gegebenen Werte durch die momentane ersetzt? Zunächst die **Strategie des Vorgehens formulieren.**

▼ Die geiden Raten werden zunächst allgemein berechnet, wie soeben geschehen. Daraus folgen absoluter und relativer Fehler. Darin noch die Zahlwerte einsetzen, was noch zu tun ist

$$\begin{aligned} AF &= \frac{\Delta b}{\Delta g}(3, 3.3) - \frac{db}{dg}(3). \\ RF &= \frac{\frac{\Delta b}{\Delta g}(3, 3.3) - \frac{db}{dg}(3)}{\frac{\Delta b}{\Delta g}(3, 3.3)} \end{aligned}$$

usw.

.

Coulombfeld $\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = \frac{c\vec{x}}{|\vec{x}|^3}}$

4) a) Stellen Sie das Feld in Koordinaten dar: $\vec{F}^K(x, y, z) = ...$

b) Das Gesamtfeld habe zwei Quellen. Eine erste Quelle der Stärke $c_1 = -1$ liege in $\vec{a}_1^K = (0, 2, 0)$. Eine zweite in $\vec{a}_2^K = (0, -2, 0)$ der Stärke +3. Wie lautet das resultierende Gesamtfeld (in Koordinatenform)?

c) Bestimmen Sie die Feldstärke entlang der y-Achse. Mindestens für y>2. Sollte man in diesem Bereich einen Punkt mit besonderer Feldstärke finden?. $\vec{F}^K_{Gesamt,,c_1}(x, y, z)$

$$\Delta\vec{F} = \vec{F}^K_{Gesamt,,-2}(0, 0, 3) - \vec{F}^K_{Gesamt,,-1}(0, 0, 3)$$

d) Wie ändert sich der Feldwert im Punkte $\vec{x}_0^K = (0, 0, 3)$, wenn man die Stärke der ersten Quelle von -1 auf -2 verändert?

▼

$$\vec{F}^K(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

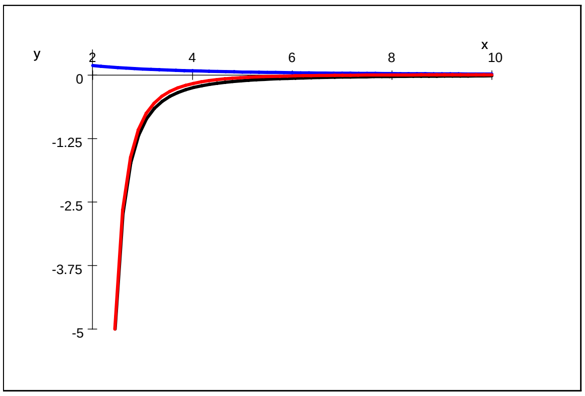
$$\vec{F}^K_{Gesamt}(x, y, z) = ... + ...$$

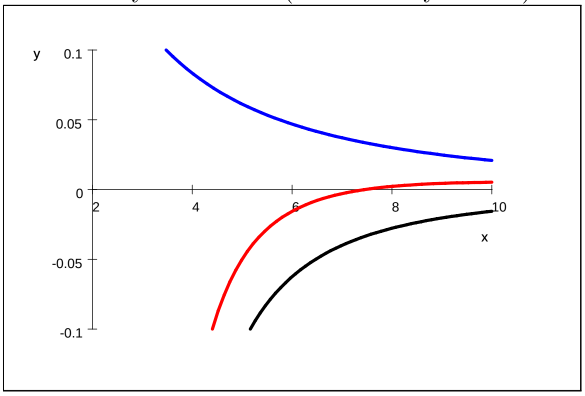
$$\vec{F}^K_{Gesamt,,c_1}(x, y, z) = \frac{c_1}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ (y-2) \\ z \end{pmatrix} . + \frac{3}{\sqrt{x^2 + (y+2)^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ z \end{pmatrix} ...$$

c) y-Achse heißt x=0 und z=0: Bitte ordentliche Endform! .. = Zahl×*Richtungsvektor* und Kommentar, ob das Resultat der ERwartung entspricht.

$$\vec{F}^K_{Gesamt}(0,y,0) = \frac{-1}{(y-2)^3}\begin{pmatrix}0\\ y-2\\ 0\end{pmatrix} + \frac{3}{(y+2)^3}\begin{pmatrix}0\\ y+2\\ 0\end{pmatrix}$$
$$= \left[\frac{-1}{(y-2)^2} + \frac{3}{(y+2)^2}\right]\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

Das ist das gesuchte Feld. Es hat stets die Richtung der y-Achse. Man erwartet im Betrag eine Nullstelle. In der Figur sind die beiden Einzelbeiträge schwarz und blau gezeichnet (beachten Sie die Vorzeichen!) und die resultierende Summe rot mit der erwarteten Nullstelle zwischen y=7 und 8. (Horizontal y-Achse!)





Bewegungsgleichung

Sie haben eine Bewegungsgleichung in der mathematischen Form $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 4x(t) = 3$ gegeben. a) Was für Kräfte erzeugen diese Gleichung? D.h. Sie nehmen an, dass es sich hierbei um eine Newtonsche Bewegungsgleichung. handelt für eine Masse m=1.

b) Besitzt diese Gleichung eine "Gleichgewichtslösung"? Also eine Lösung $x_G(t) = const.$?

▼ a) Die Newtonsche Form ist

$$\ddot{x}(t) = -2\dot{x}(t) - 4x(t) + 3$$

Die drei Summanden lassen sich als drei Kräfte interpretieren, die auf den Punkt wirken. . Nämlich:....

▲

Probeklausur: Sie sollten 2-4 dieser Aufgaben in 2 Stunden behandeln. Denken sie an die Trennung von entwurf und fertiger verständlicher Antwort! Nur letzterer Teil sollte abgegeben werden. Und der sollte keine unnötigen längen enthalten!