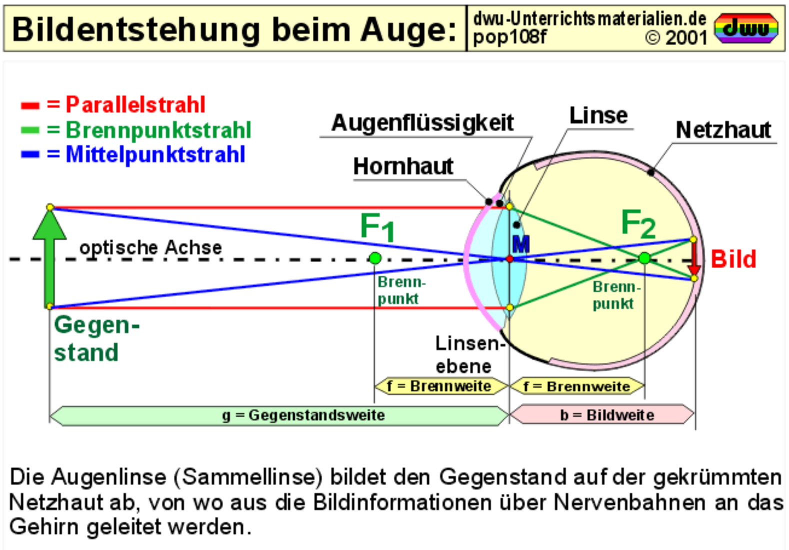
Vorbemerkung: *Jede der täglichen Übungen zeigt, wie nötig es die Mehrzahl der Teilnehmer hat, die Grundlagen einiger elementarer Kulturtechniken zu erlernen. Insbesondere das zu der Beziehung zwischen "allgemeiner Regel und zugehörigem Beispiel" Gesagte bereitet erneut größte Schwierigkeiten sowie dem* ***Behalten von Resultaten.***.

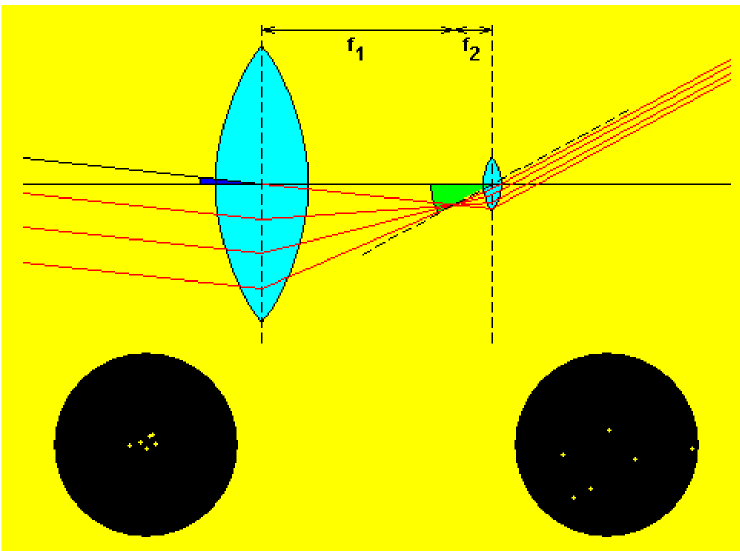
Die letzte Stunde begann mit einem Lehtbeispiel dazu. Am Donnerstag war die Formel für die dünne Linse samt Herleitung und zugehörigen Vorraussetzungen ausführlich disktiert. Der Fall des Auges mit dem anderen Brechungsindex am Ende des Lichtweges war hergeleitet und diskutiert. Dann kamm am nächsten Tag das folgende Bild zunächst mit der Frage nach einem Kommentar:



Kein Kommentar. / Neuer Versuch: "Nach dem, was wir gestern gemacht haben, ist da doch etwas falsch!" Niemand sah es!

Die tatsächlichen quantitativen Werte geben einen Unterschied von etwa 5mm zwischen den beiden Brennweiten. Das sind etwa 25% Abweichung und die sollten sichtbar sein.

Danch sollte der Strahlenverlauf in einem Keplerfernrohr diskutiert werden über das folgende Bild:



Auch diese Konfiguration (Abstand der Linsen = $f_1 + f_2$) war am Tage vorher besprochen. Niemand erkannte sie, geschweige denn die Modifikation gegenüber dem Vortage, dass es nämlich jetzt um achsennahe parallele, aber nicht achsenparallele Bündel geht.

Wieso benutzt / benötigt man beim Prisma den Begriff der "optischen Achse" **nicht**, wogegen dieser bei der Linse wichtig ist ("achsennahes Bündel")

Welcher Unterschied besteht zwischen einem "achsennahen" und einem achsenparallelen" Strahlenbündel?

Einige Strahlengänge, etwa Keplersches Fernrohr.

Beginn ´von Kapitel 3

Einstieg erfolgt mit zweifacher Übersichtsbildung. Dazu ist Kenntnis der Ergänzung "Begriffssystem..." unbedingt erforderlich.

- Durchgehen des Inhaltsverzeichnisses de Kapitels
- Was ist im Fall der Punktmechanik gesucht? Anwendung des Begriffsystems. Was liefert die Physik

Das Kapitel wurde bis zu "Flugparabel" durchgesprochen.

Der Begriff der Bahnkurve. "Was benötigt man, um die Bewegung eines Massenpunktes zu beschreiben?" Das sollte verstanden sein und beantwortet werden können.

Vektorielle und skalre Geschwindigkeit. Die mittlere skalre Geschwindigkeit ist nicht der Betrag der mittleren vektoriellen. Abstraktion dieses Sachverhaltes aus dem gerechneten Beispiel: Macht Schwierigkeiten.

Was ist "Winkelgeschwindigkeit" : Dazu das Begriffssystem der quant. Größe. Also

- Geschwindigkeit gleich Größenrate.
- Welche Größe?
- Die Winkelfunktion. Usw.

Dann Aufgaben zu Bahnkurven: Hier gibt es Effizienzprobleme. Hat man die Schritte allgemein verstanden, ist man ganz schnell am Ziel. Hier mehrere

Solce Rechenübungen

Aufgabe: Gegeben eine freie Bewegung $\vec{r}^K = \vec{r}^K(t)$. Bestimmen die konstante mittlere Geschwindigkeit sowie den Ortsbvektor zur Zeit t=0.

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 2-5t \\ 3(1+t) \\ 5 \end{pmatrix}$$

▼

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 2-5t \\ 3(1+t) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also $\boxed{\vec{v}^K = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$ und $\vec{r}^K(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. ▲

□Von einer freien Bewegung wisse man den Ort zur Zeit t=-2. Er sei $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die konstante Geschw. werde als $\vec{W}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bestimmt. Bahnkurve? Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=2 und wo und wann trifft er die Horizontalebene.

▼ Allgemein ist $\vec{r}^K(t) = \vec{a} + \vec{v} \cdot (t - t_1)$ mit Informationszeitpunkt $t_1 = -2$. Also

$$\begin{aligned}
\vec{r}^K(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (t+2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t+2 \\ 3t+11 \end{pmatrix} \\
\vec{r}^K(2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix} \\
z(t_s) &= 0 \text{ gibt } \mathrm{t}_S = -\frac{11}{3} \text{ (wann)} \quad \vec{r}^K(-\frac{11}{3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{16}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Wo)}
\end{aligned}$$

□Eine freie Bewegung verlaufe zur Zeit t=0 durch den Ursprung in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die skalare Geschwindigkeit betrage 5. Bahnkurve?

▼ Freie Bew. hat erneut Bahnkurve $\vec{r}_{frei}(t) = \vec{a} + \vec{V}(t - t_1)$ .mit $\vec{a} = \vec{0}$ und $t_1 = 0$, da sie für t=0 durch den Ursprung geht. Die vektorielle Geschwindigkeit (bekannte Richtung und unbekannter Betrag W) ist $\vec{V} = W \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Betragsbildung gibt 5=W$\sqrt{3}$. Daher liegt folgende Bahnkurve vor

$$\vec{r}(t) = \frac{5t}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□ Leicht abgeändert: Eine freie Bewegung verlaufe zur Zeit t=0 durch den Ursprung in Richtung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Man wisse: $\vec{r}^K(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ Wie lautet die Bahnkurve?

▼ Begriffssystem! Die Ortsänderung zwischen t=0 und t=2 ist $\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0) = \vec{r}(2)$.*Bei* einer freien Bewegung ist die mittlere Geschwindigkeit konstant (und die in der Bahnkurvenformel auftauchende Größe!) Wegen $\Delta t = 2$ folgt

$$\frac{\Delta\vec{r}^K}{\Delta t} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{V}^K$$

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} t$$

Kreisbewegung

Bestimme die Bahnkurve einer gleichf. Kreisbewegung durch den Ursprung, von der man weiß:

- Kreisbewegung in der y-z-Ebene
- zur Zeit t=0 wird die y-Achse mit Koordinate y=5 getroffen
- Er bewegt sich entgegen dem Uhrzeigersinn
- und trifft die positive z-Achse zur Zeit t=2 zum ersten Mal.

▼

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\cos(\omega t) \\ 5\sin(\omega t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \omega = \frac{\pi}{4}$$

▲

□□Rekonstruktionsübungen der Bahnkurvenformel

$$\vec{r}_{FP}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2}\vec{g} \cdot (t - t_1)^2$$

□ Von einer Flugparabel wisse man den Ort $\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Es sei $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$. Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t=0 und t=4. Wo und wann trifft er die Horizontalebene.

Das sollte in 5 Minuten gehen Die dabei zu beachtenden Punkte wurden besprochen. ▼ Mit T=t-2 folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \underbrace{(t-2)}_{T} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}(t-2)^2 ... = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+2T \\ 3+5T-5T^2 \end{pmatrix} \\
\vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5-10T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -27 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(4) = ...$$

Die Horizontaleben wird getroffen für z(t)=0 . Bedingung für den Zeitpunkt: $3+5T_S-5T_S^2 = 0$. Also eine quadratische Gleichung $\boxed{T_S^2 - T_s - \frac{3}{5} = 0}$. Zwei Lösungen **sind** sinnvoll!

$\boxed{T_{S1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{5}}}$ (Wann!). Wo liegen die Schnittpunkte? Einsetzen gibt

$$\vec{R}_S\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \pm \sqrt{\frac{17}{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

☐ Eine Kanone wird zur Zeit t=0 im Ursprung unter einem Winkel α abgeschossen. Die skalre Abschussgeschw. sei V. Die Bewegung erfolge in der y-z-Ebene. Wie weit fliegt das Geschoss?

☐ Auch wieder 5 Minuten!

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V\cos\alpha \\ V\sin\alpha \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ Vt\cos\alpha \\ Vt\sin\alpha - 5t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Die Bewegung erfolgt in der y-z-Ebene. Die gesuchte Weite ist die Änderung der y-Koordinate zwischen den beiden Schniitpunkten (mit der Horizontalebene). W=y(t_2) $- y(0)$. Da y(0)=0 ist, folgt W=y(t_2)

Die Rechnung: $\boxed{t_S(V\sin\alpha - 5t_S) = 0}$ gibt $t_{S1} = 0$, Start, und $\boxed{t_{S2} = \frac{V}{5}\sin\alpha}$ Es folgt W=y(t_{S2}) mit y(t)=Vtcosα aus der Formel. Also $\boxed{\underbrace{W = \frac{V^2}{5}\sin\alpha\cdot\cos\alpha}_{ges.Flugweite}}$

---

20. 2. Beschleunigung und Bewegungsgleichung!!

Zum **Warmdenken:**

(Achtung: Die meisten Antworten sollten eigenständig gefunden werden, auch wenn hier die Ergebnisse stehen!

- Was wurde bisher in diesem Kapitel besprochen?
- Was ist eine "Bahnkurve"? In welcher Form tritt sie auf?
  - Die drei Hauptbeispiele. **Formelrekonstruktion!**
  - $\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{V}\cdot(t - t_1)$
  - Kreisbewegung gleich noch mit Geschw. und Beschl.

$$\vec{r}^K_{Kreis}(\text{t}) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega(t-t_1)) \\ R\sin(\omega(t-t_1)) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v}^K_{Kreis}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega T) \\ R\omega\cos(\omega T) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}^K_{Kreis}(t)| = R\omega$$
$$\vec{a}^K_{Kreis}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos() \\ -R\omega^2\sin() \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}^K_{Kreis}(t)$$

  - $$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{V}_1\cdot\underbrace{(t-t_1)}_{T} + \tfrac{1}{2}\vec{g}\cdot(t-t_1)^2 \qquad \text{mit T=t-}t_1$$
    $$\vec{v}(t) = \vec{V}_1 + \vec{g}T$$

- Geschwindigkeit und das Begriffssystem d. quant. Größe.
  - Mom. Geschwindigkeit bei den drei Beispielen.
- Strategie bei typischen zugeh. Aufgaben, etwa Flugparabelaufgaben.
  - Bedingung für den Scheitelpunkt einer Flugparabel
  - $\vec{v}^K(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$

- **Wie geht es weiter?**

☐ eine Bahnkurve sei graphisch gegeben mit 2 Geschwindigkeitsvektoren. Bestimme graphisch näherungsweise die wirkende Kraft bzw. Beschleunigung.

Felder: Das **neue** Skript durchgegangen.

Computeranimation
Was ist zu merken?? .....
Was sind Feldlinien? Defintion des Skriptes erarbeitet und Besipiele vorgeführt!

☐ Übung zum Umgang mit dem Feldbegriff:
Sei $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 2 + x \end{pmatrix}$
Sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.2 \end{pmatrix}$.
a)Wie groß ist die Feldänderung zwischen den beiden Punkten?
b) Wie groß ist die momentane Änderungsrate von $\vec{F}$ in $\vec{x}_1$ in x-Richtung? Bezeichnung $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{x}_1) = ...?...$

$\vec{F}(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{F}(\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\Delta\vec{F} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x^2 - y \\ 2 + x \end{pmatrix}$ $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Das Gravitationsfeld: Kraft, mit der sich zwei Massenpunkte anziehen:

$$\vec{F}_{1\to 2}(\vec{x}) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \qquad \text{G}=6.67 \times 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

■ Hausaufgabe: Entwickeln Sie über die folgende Überlegung eine Größenvorstellung zur Gravitationskraft, genauer zu deren Winzigkeit im Vergleich zu sonstigen Kräften:

> $\vec{F}$ sei die Kraft, die zwei je 1kg schwere Massenpunkte infolge ihrer Gravitation aufeinander ausüben, wenn sie einen Abstand von $\boxed{\text{1cm}}$ von einander haben. Jetzt betrachten wir eine Balkenwaage (im Erdschwerefeld). Der erste Arm der Waage habe die Länge $L_1 = 1m$. Der zweite eine zu bestimmende Länge L_2. An den ersten Arm hängen wir eine (Vogel)Feder vom Gewicht 1g. Auf den zweite wirke die eingeführte Kraft $\vec{F}.Wie$ groß muss L_2 sein, damit Gleichgewicht herrscht?

Lösungskizze

Wissen: Gleichgewicht bei $\boxed{\text{"Kraft}\cdot\text{Kraftarm=Last}\cdot\text{Lastarm"}}$
Wert der Gravitationskonstante G=6.7 $\times\, 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$
Gravitationsgesetz $\quad \vec{F}_{Grav} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{x}}{r} \quad$ r=... $\quad |\vec{F}_{Grav}| = ...$
und: G ist nicht g!!

Jetzt die Lösung mit eingefügtem Text:
▼ Die Kraft (Betrag) ergibt sich über das.Gravitationsgesetz zu :

$$F = \left(6.7 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}\right) \cdot \frac{1 \cdot 1kg^2}{10^{-4}m^2} = 6.7 \cdot 10^{-7}N.$$

Einsetzen der Werte (in die Gleichgewichtsgleichung) gibt folgende Bedingung für L_2 :

$$\left(7 \cdot 10^{-7}N\right) \cdot L_2 = 10^{-3}kg \cdot 10ms^{-2} \cdot 1m.$$

Also ($1\mathrm{kgms}^{-2} = 1N$)

$$L_2 = \frac{1}{7} \cdot 10^{-2} \cdot 10^7 m = 1.4 \cdot 10^4 m = 14km$$

Die gesuchte Armlänge ist etwa $\underbrace{14km}$.▲

Ergänzung: Was ist, wenn man **10 cm Abstand statt 1cm** nimmt**?** Dann wird die Kraft um einen Faktor $\boxed{\cdot\frac{1}{10^2}\cdot}$ kleiner und damit L_2 um diesen Faktor größer: $\boxed{\cdot\mathrm{L}_2 = 1400km}$. Das ist recht groß.

Eine naheliegende Erweiterung der Frage wäre, die Kraft zwischen zwei Elektronen analog zu behandeln. Denn die elektrischen Kräfte genügen deerselben Gesetzesform mit einer anderen Konstante.

☐ Weiter Rechenübung zum Umgang mit einem Feld:

$$\vec{F}^K_{\vec{a}}(x,y,z) = \sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$$

☐ Berechne $\vec{F}^K_{\vec{a}}(1,1,1)$ und $\vec{F}^K(1,1+\Delta y,1)$ sowie die Änderung des Feldwertes zwischen diesen beiden Punkten. Dazu die mittlere Änderungsrate zwischen diesen beiden Punkten und die momentane Änderungsrate in y-Richtung an der Stelle (1,1,1). Bezeichnung: $\frac{\partial \vec{F}^K}{\partial y}(1,1,1)$.

Hierbei kam es besonders auf die Formulierung der Voragstrategie und effizientem Rechnen an. Die zweite Zeile wurde nur zur Verdeutlichung der Rechenstrategie hingeschrieben! Die ersten beiden Fragen sollten problemlos sein. Die dritte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{F}^K}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} + \sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{2(y-2)}{2\sqrt{..}}\right)\begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} + \sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\frac{\partial \vec{F}^K}{\partial y}(1,1,1) &= \frac{2(-1)}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Zweiter Teil!}
\end{aligned}$$

21.2.

Aufwärmübung:

1) Umgang mit dem Feldbegriff: Unterscheide "Ebenes, räumliches Feld" Was bedeutet dads? Beispiel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \vec{F}^K(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad\qquad \vec{F}(\vec{x}) = \vec{g}$$

a) Feldskizze? Veranschaulichung des Feldverhaltens durch berechnung und Skizzierung einiger günstiger Vektoren. Verallgemeinerung. *Das sollte jeder können, auch die„die nicht da aein können*

b) Verbale Beschreibung des Feldverhaltens (als Geschwindigkeitsfeld)

c) Sei $\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} 2+2t \\ -3+t \end{pmatrix}$ = . Berechne $\vec{F}^K(\vec{r}^K(t))$. Interpretation? Und g(t)=$|\vec{F}^K(\vec{r}(t))|$

2) Differentialgleichungen: Sei $\boxed{\ddot{x}(t) + 4\sin(x(t)) = 0}$ eine Bestimmungsgleichung (Differentialgleichung) für die Funktion x=x(t). a) Wieso ist $x_s(t) = \sin(2t)$ **keine Lösung** dieser Gleichung? (Einsetzen, geforderte Bedingung ist nicht erfüllt!)

b) Für welche Werte von a ist x_a(t)=sin(at) eine Lösung der Differentialgleichung $\boxed{\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0}$???? Für a=±2 ist die Bedinguing erfüllt. Damit hat man eine Lösung!

Heute:

1) Eine wichtige Ergänzung der Vektorrechnung
2) Übersicht übewr die bisherige Mechanik
2a) Die wichtigsren Felder, insb. konstantes Kraftfeld
3) Anwendungsbeispiel Ebenes Pendel
4) Weitere Beispiele für die Herleitung von Differentialgleichungen, derne Lösung die Bewegung im zugehörigen System festlegen.

Die Ergänzung der Vektorrechnung:

Das Problem: Gegeben ein Vektor $\vec{a}$ sowie zwei aufeinader senkrechte Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$. Alle Vektoren in einer Ebene. Es soll $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dargestellt werden. D.h. man sucht nach einer Lösung der Gleichung

$$\boxed{\vec{a}{=}\alpha\vec{e}{+}\beta\vec{f} \qquad \alpha \text{ und } \beta \text{ gesucht}}$$

♦ Zunächst besprochen: Die zeichnerische Lösung des Problems.

♦ Idee: Gehe aus von der alten Formel für die Projektion von a in die Richtung von $\vec{b}$, also

$\vec{p} = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{\vec{b}^2}\vec{b}$. Ofenbar ist $\alpha\vec{e}$ die Projektion von $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{e}$ und $\beta\vec{b}$ die in Richtung von $\vec{f}$. (Beide Vektoren stehen ja aufeinader senkrecht.) Das gibt die Lösung :

$$\boxed{\vec{a}{=}\frac{(\vec{a}\vec{e})}{\vec{e}^2}\vec{e}{+}\frac{(\vec{a}\vec{f})}{\vec{f}^2}\vec{f}}$$

Hat man die Formel allgemein verstanden, sollte man Beispiele bei Bedarf selbst rechnen können! Regel-Beispiel-Problem. Da die Formel wichtig ist, sollte man sich aber Gedanken über die

Vorgehensstrategie machen. Erst immer das Triviale hinschreiben, dann den Rest ergänzen. Hie könte das etea so aussehen - imer wird etwas zunöächst Unbekanntes eingefügt:

$$\vec{a} = \frac{\cdots}{\cdots}\vec{e} + \frac{\cdots}{\cdots}\vec{f} = \frac{\cdots}{\vec{e}^2}\vec{e} + \frac{\cdots}{\vec{f}^2}\vec{f} = \frac{(\vec{a}\vec{e})}{\vec{e}^2}\vec{e} + \frac{(\vec{a}\vec{f})}{\vec{f}^2}\vec{f}$$

Ein Rechenbeispiel:

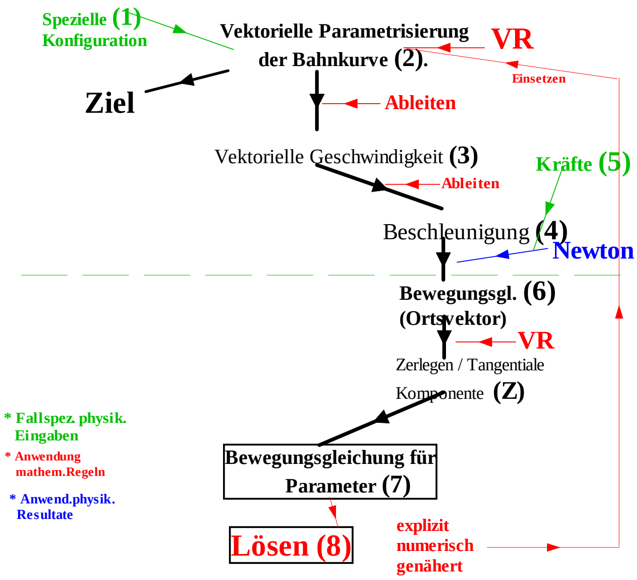
Zu jedem Punkt P des einheitskreises mit winkelparameter φ haben wir die beiden aufeinader senkrechten Einheitsvektoren (Skizze!)

$$\vec{e}_r(\varphi) = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi \qquad \vec{e}_t(\varphi) = \vec{e}_1(-\sin\varphi) + \vec{e}_2 \cos\varphi$$
$$\vec{e}_r^{\,K}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_r^{\,K}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Jetzt soll g in diese beiden Richtungen zerlegt werden. Wegen $\vec{e}_r^{\,2} = \vec{e}_t^{\,2} = 1$ und mit $\vec{g} = -g\vec{e}_2$ folgt:wobei $\vec{g} = -g\vec{e}_2$ also $\vec{g}^K = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ folgt sofort:

$$\vec{g} = \boxed{\text{-gsin}\varphi}\,\vec{e}_r(\varphi) + \boxed{\text{-gcos}\varphi}\,\vec{e}_t(\varphi)$$

Jetz wurde das Schema aus Kap. 3.8. nochmals besprochen und anschließend auf mehrere Beispiele angewandt:



Eine Physikalische Konfiguration, ein System wird gegebn, vektoriell beschrieben, die zugehörige Bewegungsgleichung aufgestellt und daraus Differentialgleichiungen für die benötigten Parameterfunktionen hergeleitet! Das wirde durchgegangen für

- das ebene mathematische Pendel
- das sphärische Pendel
- Bewegung mit Reibung (Wie legt man die Richtung der Reibungskraft mit Hilfe der Bahnkurve fest? Das bereitete Schwierigkeiten!

Physikalisches Pendel: Die Methode, Konfigurationen mit ausgedehnten Körpern auf die Massenpunktidealisierung zurückzuführen

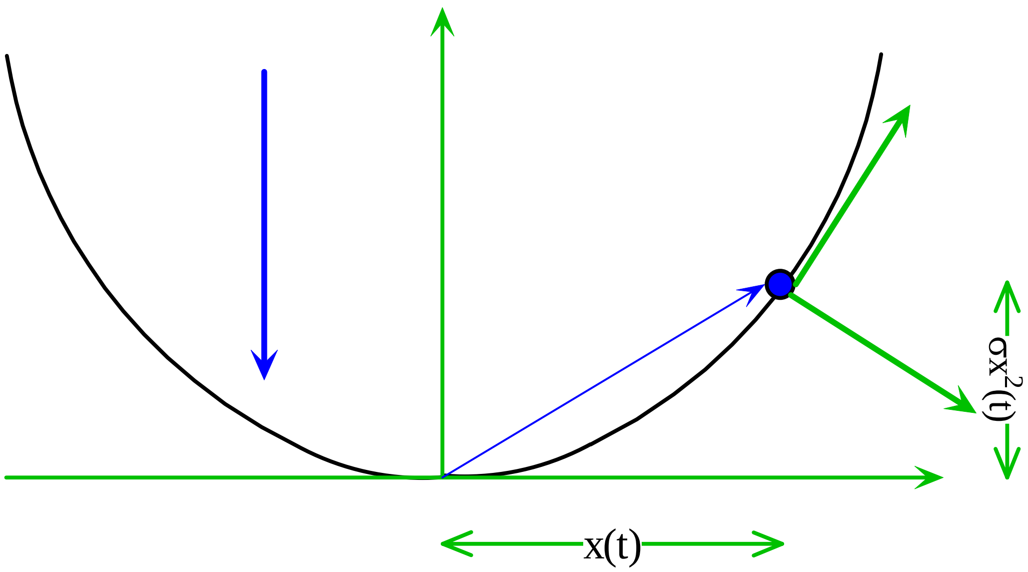
Mathematisches Pendel: Die zugehörige Differentialgleichung $\ddot{a}(t) + \frac{g}{L}\sin\alpha(t)$ für den Auslenkwinkel α läßt sich nicht explizit lösen.

Aber für kleine Auslenkwinkel kann man die Differentialgleichung nähern durch $\ddot{\alpha}(t) + \frac{g}{L}\sin\alpha(t) = 0$. Die kann man lösen und mit der Lösung die Periode T bestimmen. Das ergibt die übliche Formel für T.

Für die korrekte Differentialgleichung kann man für T eine Reihenentwicklung angeben. diese Formel wurde besprochen und veranschaulicht.

Am Ende wurde ein Beispiel für die Herleitung einer Differentialgleichung gerechnet. Das ging zäh aus dem üblichen Grund: Zwar war nach dem Schema bekannt, was zu tun war, aber man tat dies erst, wenn ich hinkam und fragte:
" Was müssen Sie jetzt tun?" - "Die Geschwindigkeit ausrechnen" ... "Und wieso tun Sie das nicht?" - "?!?1"... usw.

Also zuerst eine Skizze der Konfiguration:



Ergänzen Sie selbst die Bezeichnungen $\vec{g}$, $\vec{r}^*(t)$.
Dann folgt wie besprochen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \sigma x^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{Ableiten}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sigma x(t) \end{pmatrix}} \text{ Erneut Ableiten. Also}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sigma x(t) \end{pmatrix} + \dot{x}^2(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sigma \end{pmatrix}}$$

Die beiden Richtungen für erlaubte und per Zwang verbotenen Bewegung sind:

$$\vec{t}(x(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sigma x(t) \end{pmatrix} \quad \vec{n}(x(t)) \begin{pmatrix} -2\sigma c x(t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Alles keine Einheitsvektoren. Wir zerlegen zunächst $\vec{g}$ nach dem neuen Schema in die beiden Richtungen:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{t}\ \tfrac{(-2\sigma g x(t))}{1+4\sigma^2 x^2(t)} \quad + \quad \vec{n}\tfrac{-g}{1+4\sigma^2 x^2(t)}.}$$

Der zweite Vektor aus $\vec{a}$ hat weder die Richtung von $\vec{t}$ noch die von $\vec{n}$. Also muss er auch noch zerlegt werden:

$$\boxed{..\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sigma \end{pmatrix} = \vec{t}\tfrac{4\sigma^2 x(t)}{1+4\sigma^2 x^2(t)} ... + \vec{n}\tfrac{.....}{1+4\sigma^2 x^2(t)}.}..$$

Jetzt suchen wir aus der Newtonschen Bewgungsgleichung alle Beiträge in Richtung $\vec{t}$ heraus. Das ist die zulässige Richtung:

$$\mathrm{m}\vec{t}(t)\left[\ddot{x}(t) + \dot{x}^2(t)\tfrac{4\sigma^2 x(t)}{1+4\sigma^2 x^2(t)}\right] = m\vec{t}(t) \cdot \tfrac{(-2\sigma g x(t))}{1+4\sigma^2 x^2(t)}$$

Das gibt

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}^2(t)\tfrac{4\sigma^2 x(t)}{1+4\sigma^2 x^2(t)} = \tfrac{(-2\sigma g x(t))}{1+4\sigma^2 x^2(t)}$$

Zusammengefasst:

$$\boxed{\ddot{x}(\mathrm{t}) + 2\sigma \mathrm{x}(\mathrm{t})\tfrac{2\sigma \dot{x}^2(t)+g}{1+4\sigma^2 x^2(t)}}$$

Das ist in diesem Fall die gesuchte Bewegungsgleichung für den Parameter x(t), der die Bewegung festlegt!

22.2.

Heute die Methode zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen besprochen

Kapitel. 4

Vorbemerkungen

1) Klausurtermin? Wer kann nächsten Freitag nicht? Bitte melden. Es ist nicht mehr klar, wieviele ernsthafte Interessenten am Kurs vorhanden sind. Ein zweiter Termin wäre in der Mitte der darauf folgenden Woche möglich.

2) Probeklausur? Als häuslicharbeit. 2 Stunden konzentriert am Wochenende. Ich gebe heute unf morgen eine Auswahl von Aufgaben. Suchen Sie sich darunter solche aus, die Sie *gerade noch schaffen.* Also nicht solche die Ihnen besonderws leicht erscheinen. Montag abgeben. Ich werde mich bemühen, sie bis Dienstag zu korrigieren und werde sie dann einzeln kommentieren.

3) **Wie wurden die Ratschläge / Mahnungen des ersten Tages erfüllt?** Schlecht, viele kommen zu spät, fragen nicht, wenn sie etwas nicht verstanden haben,.geschweige denn, dass sie sich um eigene spezielle Defizite .kümmern.... **Daher: Viel Arbeit kommendes Wochenende! !**

4) Wie steht es mit Ihrer Fähigkeit zur Wissenskomprimierung - dem Heraussarbeiten des Wesentlichen? Das danach benutzt wird, die Problemlösung zu steuern? Denken Sie an die heutigen Erfahrungen mit der Lösung der Differentialgleichungen. Fast alle kamen mit dem allgemeinen Resultat nicht zurecht. Wußten im Prinzip meist, was zu tun war, taten es aber extrem zögerlich..

5) **Datensatz zur Schwingungsdauer des Pendels: Bitte morgen oder Montag abgeben!**

Erste Auswahl von Aufgaben. In der Veranstaltung wurde die Lösungsstrategie und der jeweilige Augfgabenhintergrund besprochen. Der Rest sollte dann gehen!

☐ (1)Das Bestimmen von Geschwindigkeiten bereitete gestern Probleme. Dazu zwei Beispiele:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ 2ct^2 \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \cdot \sin\theta(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \cdot \sin\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die zugehörige vektorielle Geschwindigkeit.

☐ (2) Sei $\vec{F}^K = \vec{F}^K(x,y,z)$ ein Vektorfeld. Sie suchen die die momentane Änderungsrate von $\vec{F}^K$ in z-Richtung an der Stelle $\vec{x}_0 = (2,a,2)$. Welche Ableitung ist zu bilden? Und was ist anschließend zu tun? (*Strategiebeschreibung).*

☐ (3) Sei $\vec{F}^K = \vec{F}^K(x,y,z)$ ein Vektorfeld. Sie kennen $\vec{F}^K(2,3,2)$ und die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta\vec{F}^K}{\Delta y}$ von $\vec{F}^K$ in y-Richtung zwischen (2,3,2) und (2,3.5,2). Wie erhalten Sie $\vec{F}^K(2,3.5,2)$? (Formel!)

☐ (4) Was für eine Bahnbewegung wird durch die folgende Bahnkurve beschrieben?

$$\vec{r}^K(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ t \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ 0 \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

☐ (5) Gegeben zwei felderzeugende Ladungen (Quellen). Liegen die Quellen im Ursprung, so erzeugt die erste Quelle ein Feld $\vec{F}_1$ und die zweite ein Feld $\vec{F}_2$ mit

$$\vec{F}_1(\vec{x}) = \frac{2}{|\vec{x}|^3}\vec{x} \quad \text{und} \quad \vec{F}_2(\vec{x}) = \frac{3}{|\vec{x}|^3}\vec{x}.$$

Jetzt wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, die erste Quelle wird an die Stelle $\vec{a}_1^K = (0,2,1)$ verschoben und die zweite an die Stelle $\vec{a}_2^K = (0,-2,1)$. Es gilt Superposition. Wie groß ist das resultierend Feld an der Stelle $\vec{x}_0 = (1,0,2)$?

Beschreiben Sie zunächst kurz die Vorgehensstrategie!

☐ (6) Für die Intensität unter Absorbtion haben wir die folgende Differentialgleichung hergeleitet:

$$\frac{dI}{dx}(x) = -CI(x). \text{ Weiter gelte } \mathrm{I}(\mathrm{x}_0) = I_0.$$

D.h. eine Funktion I=I(x) ist gesucht mit $\mathrm{I}(\mathrm{x}_0) = I_0$, die diese Differentialgleichung erfüllt.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{I(x)} = \mathrm{I}_0 e^{-C(x-x_0)}$ dieses Problem löst.

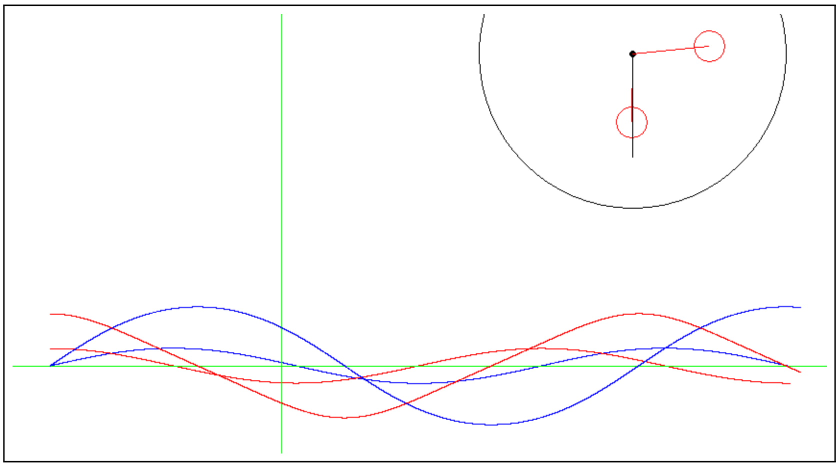
☐ (7) Zur Schreibweise ("Notation"): Sei $\vec{F}^K(x,y,z)$ ein Vektorfeld. Für die partiellen Ableitungen benutzen wir die Schreibweise $\frac{\partial\vec{F}^K}{\partial x}(x,y,z)$ in der der Buchstabe x zweimal auftaucht. Aber es ist in gewisser WEise nicht "dasselbe x". Begründen Sie das, indem Sie für

$$\vec{F}^K(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy-yz+vz \\ xyz \end{pmatrix}$$

folgende Größen ausrechnen und vergleichen $\frac{\partial\vec{F}^K}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial\vec{F}^K}{\partial x}(y,y,z)$, $\frac{\partial\vec{F}^K}{\partial x}(z,1,2)$

☐ (8) Die Pendelbewegung wird durch die Funktion "Auslenkwinkel" $\alpha = \alpha(t)$ beschrieben. Wie sollte man die Funktion und die Bewegung mit Hilfe des Computers möglichst darstellen?

Hierzu ein "screenshot" des vorgestellten Programmes. Horizontal t-Achse. Vertikal α (blau) und $\dot{\alpha}$ (rot). Zwei Die Funktionen sind für zwei Anfangswerte gezeichnet.



Das Pendel bewegt sich synkron mit, wenn sich die Funktionen zeitlich entwickeln.

Wie sehen die Gleichungen zur numereischen Bestimmung der Lösung einer Differentialgleicchung 2. Ordnung aus? Nochmals

$$\text{y(x+}\Delta x) = y(x) + \boxed{\tfrac{dy}{dx}}\Delta x$$

$$\text{v(x+}\Delta x) = v(x) + \boxed{\tfrac{dv}{dx}}\Delta x$$

Als Beispiel die Gleichung $\boxed{y''(x) = x \cdot y(x) \cdot y'(x)}$ Das gibt folgendes System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v(x) \\ \frac{dv}{dx} &= xy(x)v(x) \end{aligned}$$

Wahle als Anfangswerte y(1)=1 und v(1)=1. Wähle zusätzlich $\Delta x = 0.1$ und bestimme näherungsweise x(1.3).

....\x=	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y(x)	1	1.1	1.21	$\boxed{1.3333}$	
v(x)	1	1.1	1.2331	1.4122	
$\frac{dy}{dx}(x)$	1	1.1	1.2331	usw.	
$\frac{dv}{dx}(x)$	1	1. 331	1.7905		
$\frac{dy}{dx}(x)\Delta x$	0.1	0.11	0.1233		
$\frac{dv}{dx}(x)\Delta x$	0.1	0.1331	0.1791		

Der exakte Wert ist 1.363.

Die Differentialgleichung $\mathrm{y}'(x) = F(x, y(x))$ erlaubt folgende Interpretation:

Angenommen $\mathrm{y}=\mathrm{y}_s(x)$ ist eine lösung dieser Gleichung mit $\mathrm{y}(\mathrm{x}_0) = y_0$. D.h. die Lösung geht durch den Punkt (x_0, y_0). Dann hat die Lösungskurve dort die Steigung $\frac{dy_s}{dx}(x_0)$. Als Steigungsvektor geschrieben $\vec{m}(x_0, y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dy_s}{dx}(x_0) \end{pmatrix}$. Da nun aber y_S die Differentialgleichung erfüllen soll, gilt $\frac{dy_s}{dx}(x_0) = F(x_0, y_S(x_0)) =$

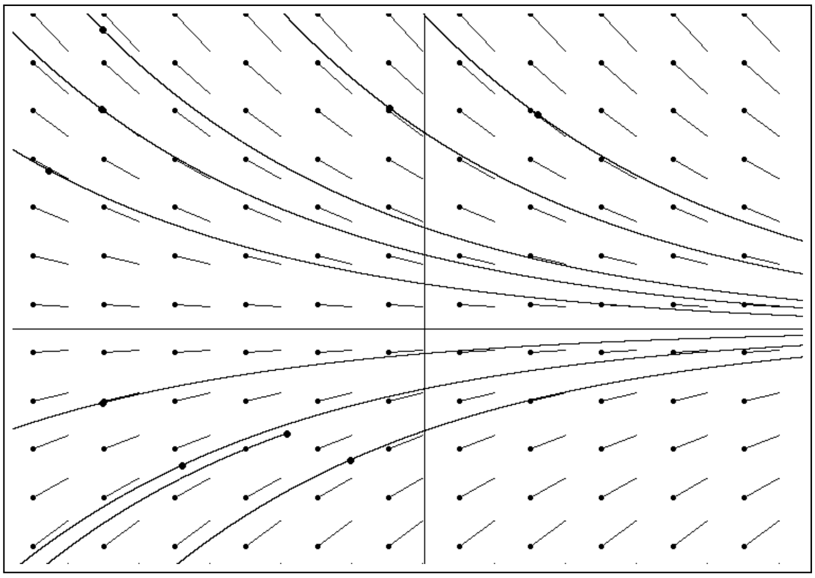
$F(x_0, y_0)$. **Und die letzte Größe kann man ausrechnen, ohne dass man die Lösung kennt.** Oder: die Differentialgleichung bestimmt in jedem Punkt der x-y-Ebene die Steigung der zugehörigen Lösungskurven!

Jetzt kann man ein Gitter solcher Feldvektoren malen und erhält eine qualitative Vorstellung über den Verlauf der Lösungskurven!

Einige Beispiele solcer Steigungsfelder mit einigen eingezeichneten Lösungskurven:

Die Differentialgleichung $\boxed{\mathrm{y}'(x) = -0.6y(x)}$

Am Punkt $(\mathrm{x}_0, y_0) = (1, 2)$ gilt beispielsweise $\vec{m}(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.6 \cdot 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.72 \end{pmatrix}$



Das Feld der Differentialgleichung $\mathrm{y}'(x) = x + y^2(x)$.

☐ Zeichnen sie selbst den qualitativen Verlauf einiger Lösungskurven ein.