Geometrische Optik

In disem Teil des Kurses geht es um das Verständnis einiger elementarer Eigenschaften des Lichtes mit bedeutenden Konsequenzen für unser Alltagsleben. Das läuft meist unter dem Stichwort "geometrische Optik" und wir bringen dazu einen Einstieg. Neben dieser sachlich inhaltlichen Bedeutung verfolgen wir hier weitergehende Ziele:

- *Einübung in den Umgang mit wichtigen Größenformeln,*
- *Nutzung der Vektorrechnung*
- *sowie Herleitung praktischer Anwendungsformel aus übergeordneten Regeln und mit Hilfe von Näherungen. Mathematische Details lassen wir aus, möchten aber, das der Weg verstanden wird.*
- *Aufbau und Verständnis komplexer Sachverhalte aus einfachen Grundregeln (Konsolidierung des Gehaltes der Eingangsbeispiele)*

Wir beginnen mit einer vorbereitenden übergeordneten Frage zum Licht, die den weiteren Gang der Dinge leitet. Was sollte eine physikalische Theorie im Zusammenhang mit dem Licht beantworten können? Derartige Fragen sollte man sich beim Einstieg in einen neuen Themenbereich vorab stellen.

□ (2.1.1) **Welche Eigenschaften sind im Zusammenhang mit der Beschreibung des Verhaltens von Licht wesentlich und voneinander weitgehend unabhängig ??? Was sollte man messend erfassen und quantifizieren?**

Versuchen Sie eine Analogie zum Schall herzustellen!!! Es kann günstig sein, die Antwort in Form von Fragen zu formulieren. Die zugehörigen Antworten sollten prüfbar sein und Erklärungen und korrekte Vorhersagen liefern und die Konstruktion technischer Hilfsmittel ermöglichen.

Wir schlagen etwa 5 solcher Fragen vor und nennen hier die erste:

▼ a) Wie breitet sich Licht aus? ("Ruhendes" Licht?)
b)
c)
d)
e) ▲

Kommentar und Antwort zu a) **Die idealisierte Lichtausbreitung (für einen bestimmten Gültigkeitsbereich) erfolgt entlang $\boxed{\text{"Lichtstrahlen"}}$. Die Gültigkeitsgrenzen sind zunächst vage, aber in vielen (alltäglichen) Fällen unproblematisch. Technisches Hilfsmittel zur Herstellung von Lichtstrahlen sind etwa Blenden. In homogenen Medien (Licht, Wasser, Vakuum) verlaufen die Lichtstrahlen geradlinig, d.h. entlang Teilen von Geraden. Eine Ausbreitungsgeschwindigkeit ist nicht zu beobachten (obwohl vorhanden und sehr groß).**

(2.1.2) Geraden (also Lichtstrahlen) lassen sich vektoriell beschreiben und festlegen. Wichtig für die Optik und unsere Überlegungen sind dann $\boxed{\text{"Lichtbündel"}}$, die von einem Punkt ausgehen. Sie werden zum Verständnis des Sehvorganges benötigt. Ebenso $\boxed{\text{"Bündel paralleler Lichtstrahlen"}}$.

□ (2.1.3) Die Aufgaben zur vektoriellen Beschreibung von Lichtbündeln.

□ (2.1.4) Wie versteht man mit Hilfe des Lichtstrahlmodelles das " **Sehen von Gegenständen** - Vom Gegenstand bis zum Augenhintergrund?" Wieso benötigt man hierzu Lichtbündel?

▼ Vorbemerkung: Man betrachtet einen einfachen Fall: Wie sieht man einen leuchtenden Punkt? (Und denkt sich später das Gesamtbild aus derartigen Punkten zusammengesetzt!)

Dann eine Skizze! Wieso benötigt man ein ganzes Lichtbündel? Nicht nur einen einzigen Strahl? Erst das Problem bewußt machen! Antwort etwas weiter unten.

▲

(2.1.5) **"Was ist Licht?"**: Die Erfahrungen mit der Ausbreitung des Lichtes, mit den Lichtstrahlen legen ein **Teilchenmodell** nahe!

Ein Lichtstrahl besteht (danach) aus einem Schwarm kleiner Teilchen, die sich unter gewissen Umständen geradlinig mit sehr großer konstanter Geschwindigkeit bewegen! An Grenzflächen werden Sie reflektiert oder beeinflußt (gebrochen)

Dieses Modell liefert bereits große Erfolge zum Verständnis vieler Lichtphänomene sowie der optischen Instrumente und deren Konstruktion! Was wäre in einem Wellenmodell anders? Analogie zum Billardbeispiel.

(2.1.6) **Ausgeschieden** (aus dem Kreis grundlegender Sachverhalte zum naturwissenschaftlichen Verständnis des Lichtes ist beispielsweise das Konzept einer Verbindung von "Licht" mit "gut" und "dunkel" mit "böse".

Eine hier **offene Frage:** Wie groß ist der übliche Erfahrungsbereich, der mit diesem korpuskularen Modell vereinbar ist? Wo liegen seine Schranken? Wie feine Lichtstrahlen sind überhaupt möglich? Wie quantifiziert man das?

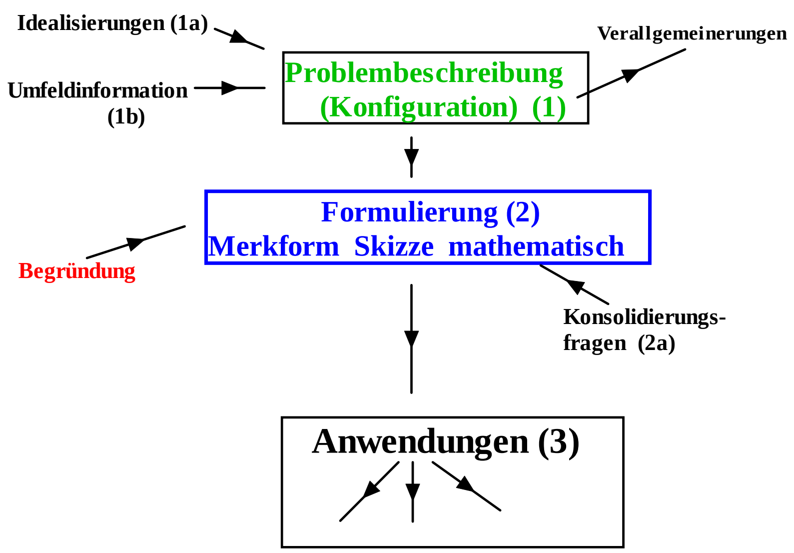
2.2 Das Reflexionsgesetz.

Das ist eine erste elementare, aber allgemeine Gesetzmäßigkeit, die (in idealisierter Form) das Verhalten der Lichtstrahlen bei der Wechselwirkung mit Materie steuert, Wir werden sehen, dass bereits die beiden ganz einfachen elementaren Bestandteile (Lichtstrahlen - Reflexionsgesetz) komplexes Verhalten liefern. Das Reflexionsgesetz ist zunächst einmal ein empirisch gefundenes Gesetz dessen Auswirkungen man im Alltagsbereich vielfach begegnet.

Das Reflexionsgesetz ist ein zunächst empirisch gefundenes Gesetz über das Verhalten der Lichtstrahlen mit zahlreichen Anwendungen, von denen wir einige vorführen

---

(2.2.1) *Wie geht man als Lernender vor, wenn man sich ein derartiges wichtiges Gesetz (ohne Beweisteil und Herleitung) aneignen will? Schematisch kann und sollte man folgende Punkte durchgehen*



Wir tun das jetzt für das Reflexionsgesetz, wobei wir eine Reihe von Punkten immer nur als Fragen formulieren. Damit soll eigenaktives Denken angeregt werden.

(2.2.2) Zur **Problemerfassung**: Trifft ein Lichtstrahl auf eine scharfe Grenze zwischen zwei Stoffen, dann beeinflußt diese Grenze in der Regel den weiteren Lichtweg. Der einfachste Fall ist der der "Reflexion", bei dem der Strahl auf symmetrische Weise vollständig zurückgeworfen wird. Das beobachten wir bei einer Reihe von Stoffgrenzen mehr oder weniger ausgeprägt ("Spiegel"). Weitere Phänomene an solchen Grenze sind diffuse Reflexion, Brechung und Absorbtion (Verallgemeinerung). Es wird in mehrfacher Hinsicht idealisiert: Lichtstrahlen und scharfe ebene Grenze, so dass man mit der elementaren Vektorrechnung arbeiten kann.

□ (2.2.3) Das Teilchenmodell der Lichtstrahlen "erklärt das Gesetz" und erlaubt seine Verfeinerung im Sinne, dass weitere Umfeldphänomene mit einbezogen werden. Wieso?

(2.2.4) Formulierung des **Reflexionsgesetzes:**   Es lautet in Kurzform zum Merken:

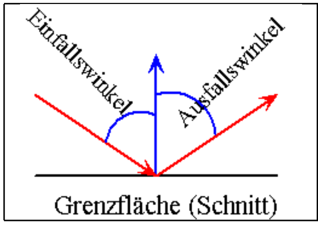
$$: \boxed{\text{Einfallswinkel=Ausfallswinkel}}$$

Bemerkung: Die (vom Gesetz beschriebenen) Erscheinungen sind unabhängig von Wellenlänge und Intensität des Lichtes, rein geometrischer Art. Winkel bedeutet dabei immer "Winkel des Strahles mit der Normalen der Grenzfläche".

☐ (2.2.5) Man könnte allgemeiner vermuten, dass die Intensität des ausfallenden Strahles eine Funktion der Intensität des einfallenden ist. Was für eine Formel ist im einfachsten Fall zu erwarten? (Zunächst Bezeichnungen einführen) :

(2.2.6) **Skizze zum Verstehen der Merkformel. Ein besonders wichtiger Teil.**

Geometrisch benötigen wir (hier: Reflexionsgesetz) den Begriff der **Normalen.** Genauer: "Normale an die Fläche F im Punkte P" Die Normale wird festgelegt durch Angabe eines Punktes und eines Richtungsvektors. Bezeichnung: *Normalenvektor,*

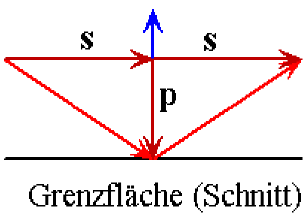
	Drei Vektoren: Normalenvektor $\vec{n}$ Einfallsvektor $\vec{e}$ Ausfallsvektor $\vec{r}$	Dreidimensionale. Skizze ?? ☐ Wieso genügt eine ebene Skizze?

Beachten Sie: Der zu wählende Winkel ist der <u>zwischen Strahl und Normale</u>! Liegen P und die Normale vor, dann bestimmt die Richtung des einfallenden Lichtstrahles die Richtung des ausfallenden. Wird die Einfallsrichtung durch den Richtungsvektor $\vec{e}$ bestimmt, dann determiniert die nachfolgende Konstruktion eindeutig einen Richtungsvektor $\vec{r}$ des ausfallenden Strahles. ($\vec{r}$ ist hier zunächst nur Bezeichnung)

Vektoriell ist der Einfallswinkel hier der Winkel zwischen -$\vec{e}$ und $\vec{n}$.

(2.2.7) Das Schema zur **vektoriellen Bestimmung der Richtung des reflektierten Strahles.**

Mit Hilfe unseres Wegkonzeptes für Vektoren folgt sofort:
$\vec{n}$ Normalenvektor, $\vec{p}_{\vec{n}}$ die Komponente von $\vec{e}$ in Richtung $\vec{n}$ und $\vec{s}$ die dazu senkrechte



$$\vec{e} = \vec{s} + \vec{p}_{\vec{n}}$$
$$\vec{r} = -\vec{p}_{\vec{n}} + \vec{s} = \vec{e} - 2\vec{p}_{\vec{n}}$$
$$\boxed{\vec{p}_{\vec{n}} = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{n})}{\vec{n}^2}\vec{n}}$$

$$\vec{n}^K = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}^K = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$
$$(\vec{e}\cdot\vec{n}) = e_1n_1 + e_2n_2 + e_3n_3$$
$$\vec{n}^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \quad \text{mit } \mathrm{n}_1^2 = (n_1)^2 \text{ usw.}$$

(2.2.8) *Zur **Konsolidierung** einer derartigen Formel liegen zwei Typen von Konkretisierungsaufgaben nahe: Einmal solche, die die Ergebnisformeln konkret durchgehen und dann solche vom Typ vertrauensbildende Maßnahmen, bei denen man das berechnete Resultat auch geometrisch finden und somit kontrollieren kann.*

Aufgaben beider Art sollte man durchaus bei Bedarf selbst erfinden!

□ Numerisches Beispiel $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme $\vec{r} =$

Hier kommt es darauf an, das Ergebnis rechnerisch möglichst schnell zu erhalten.

□ Erfinden Sie jetzt ein Beispiel, für das man das Resultat selbst unmittelbar geometrisch kontrollieren kann. Also einerseits rechnen und andererseits geometrisch bestimmen.

Das beendet die Einführung der Regel selbst. Jetzt kommen Beispiele der Anwendung und Nutzung. Wir werden folgende Anwendungen behandeln:

◊ Brennpunkt bei Parabel und Ellipse

◊ Lichtstrahl und Sehen

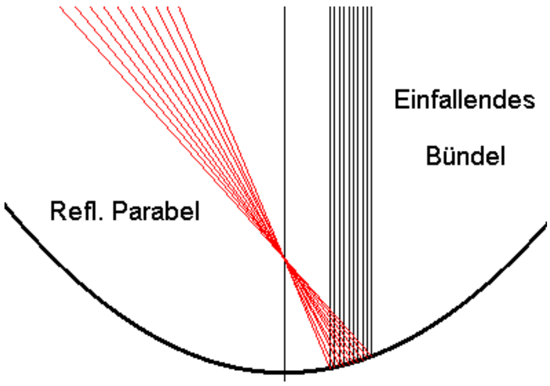
◊◊ Einführung des Begriffs des allgemeinen **Fokuspunktes**

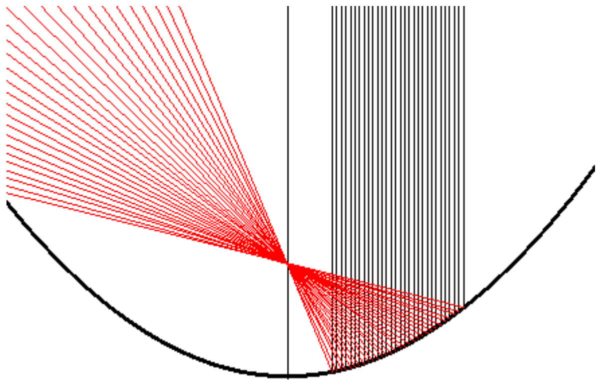
◊ Kugelspiegel (mit zugehöriger verallgemeinerungsfähiger Formel, deren Herleitung)

2.3 Einige Anwendungen der Vektorrechnung und des Reflexionsgesetzes

(2.3.1) Die **Brennpunktseigenschaft der Parabel und der Ellipse**.

Wir zeigen einige Bilder eines Computerprogrammes, bei dem Lichtstrahlen an einfachen Flächen reflektiert werden. Als Flächen wählen wir einen Rotationsparaboloiden, von dem wir nur den Schnitt in einer Ebene betrachten. Ein achsenparalleles Lichtbündel (grau) fällt ein und wird an der Parabel (gemäß Brechungsgesetz) reflektiert. Die reflektierten Strahlen sind rot gezeichnet.



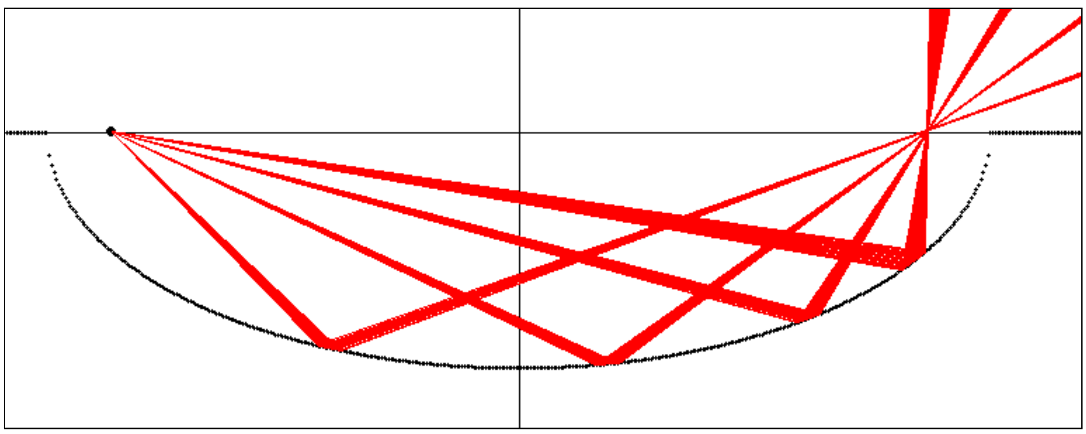


Wir beobachten: Alle reflektierten Strahlen gehen durch einen Punkt, den *Brennpunkt (der Parabel)*

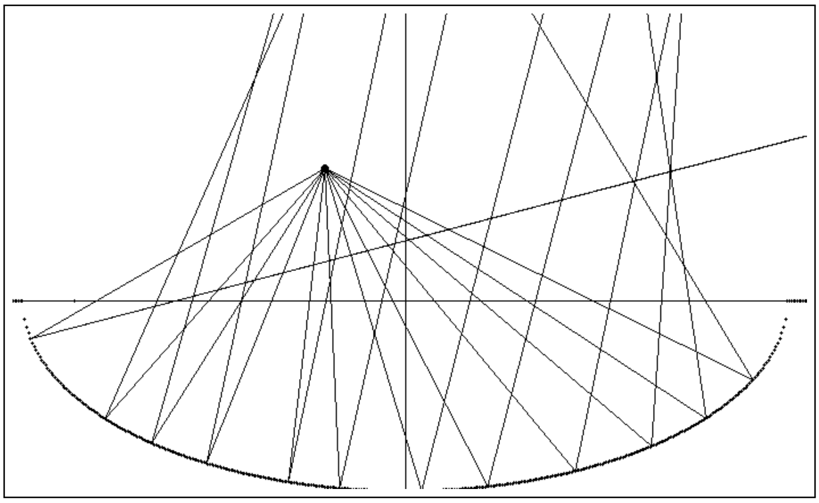
☐ Beweisen Sie die Brennpunkteigenschaft der Parabel mit Hilfe der Vektorrechnung

---

(2.3.2) Jetzt betrachten wir anstelle der Parabel eine Ellipse und betrachten Lichtbündel, die von einem geeigneten Punkt auf der Achse ausgehen. Wir sehen: Alle Punkte des Bündels gehen erneut durch einen Punkt und dieser Punkt ist für alle gezeichneten Bündel derselbe! (Genauer: Gehen durch einen Bereich, den man auf dem Bildschirm zumindest nicht von einem Punkt unterscheiden kan.)



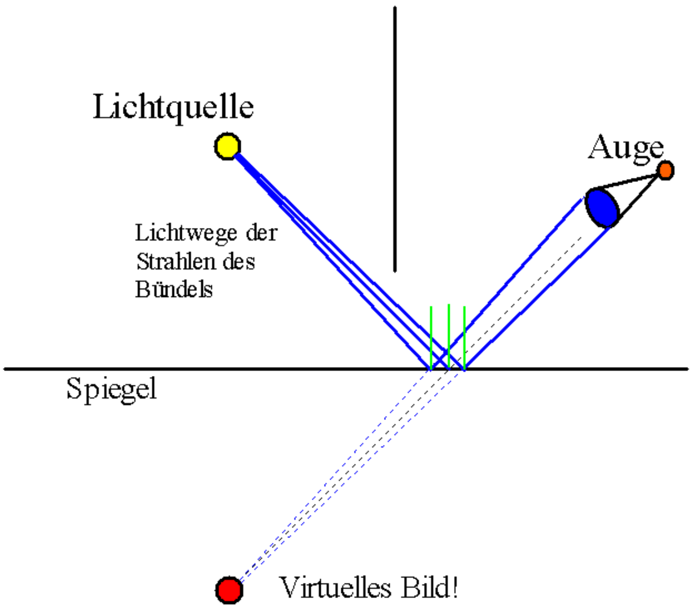
Das sind die beiden Brennpunkte der Ellipse. Startet man das Bündel von einem anderen Punkt (als einem der beiden Brenpunkte), gehen die Strahlen keineswegs wieder durch einen gemeinsamen Punkt. Das folgende Bild zeigt das:



☐ (2.3.4) Wie bestimmt man die Brennpunkte einer Ellipse formelmäßig?

(2.3.5) Eine zweite Anwendung:
Was sieht man, wenn man in den Spiegel sieht? Wie entsteht so ein Spiegelbild?

Die von der Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen des Strahlenbündels werden nach dem Brechungsgesetz reflektiert und gelangen zum Auge. Geometrisch ist das ein Bündel, das vom "virtuellen" Spiegelbild der Quelle ausgesandt wird. Die Augenlinse fokussiert diese Bündel in einem Punkt auf der Netzhaut. Und das Auge sieht den virtuellen Spiegelpunkt von dem die Strahlen herzukommen scheinen.



(2.3.6) **Fokuspunkte**

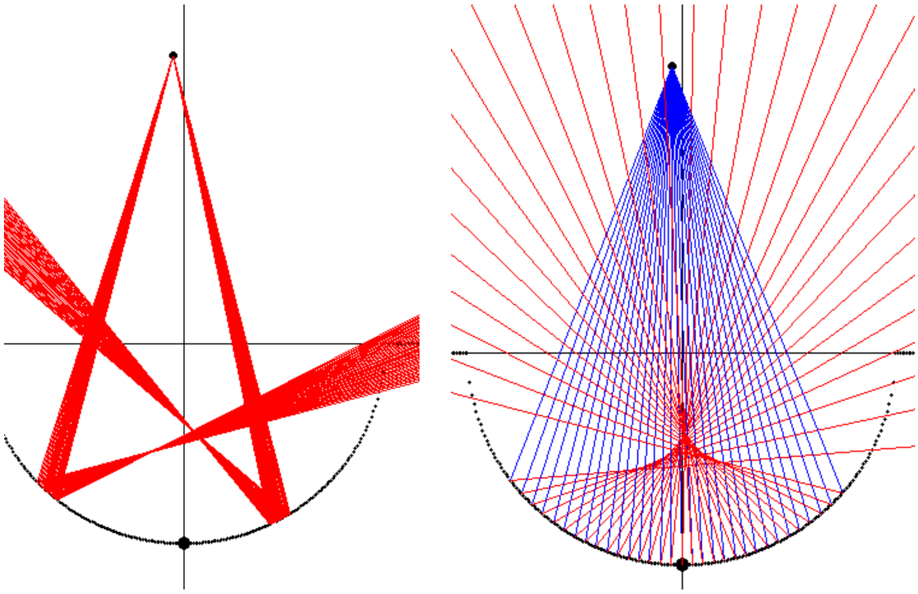
Das in unseren Beispielen gefundene Verhalten der Lichtbündel tritt im Bereich der geometrischen Optik häufig auf und erweist sich als ausgesprochen wichtig. Wir abstrahieren daraus das folgende Konzept:

Von einem Punkt G gehe ein (schmales) Lichtbündel aus. Dieses Bündel "erlebt einiges", wird reflektiert, gebrochen usw. Und wird am Ende wieder in einem Punkt B konzentriert ("fokussiert"). Einen solchen Punkt nennen wir $\boxed{\textit{Fokuspunkt}}$.

Ein Fokuspunkt kann $\boxed{\text{virtuell}}$ sein, d.h. zur geometrischen Verlängerung eines Lichtstreckenbündels gehören wie oben im Beispiel des Spiegelbildes.

Und vielfach ist es auch so, dass die Strahlen nur **näherungsweise** durch ein und denselben Punkt gehen. Für ausreichend schmale Bündel gehen sie dann auf dem Bildschirm scheinbar alle durch einen Punkt. Nimmt man breitere Bündel, dann tun sie das nicht mehr.

Das folgende linke Bild einer Reflexion an einem Kreis zeigt dies: Von ein und demselben Punkt gehen zwei schmale Bündel aus. Beide haben einen (näherungsweisen) Fokuspunkt. Aber die Fokuspunkte der beiden Bündel sind verschieden!



Im rechten Bild geht von dem Punkt ein breites (blaues) Bündel aus. Die reflektierten Strahlen sind rot gezeichnet. Wir sehen, dass sie nicht mehr durch einen Punkt gehen, aber so etwas wie eine Figur hoher Dichte erzeugen. Das ist in gewissem Sinne die Figur - der geometrische Ort - aller Fokuspunkte schmaler Bündel.

In der Computersimulation wird jeweils nur die erste Reflexion berücksichtigt. Eine Reihe der reflekrierten Stahlen trifft noch ein zweites Mal auf den reflektierenden Kreis, der für diesen Strahl dann aber einfach durchlässig ist.

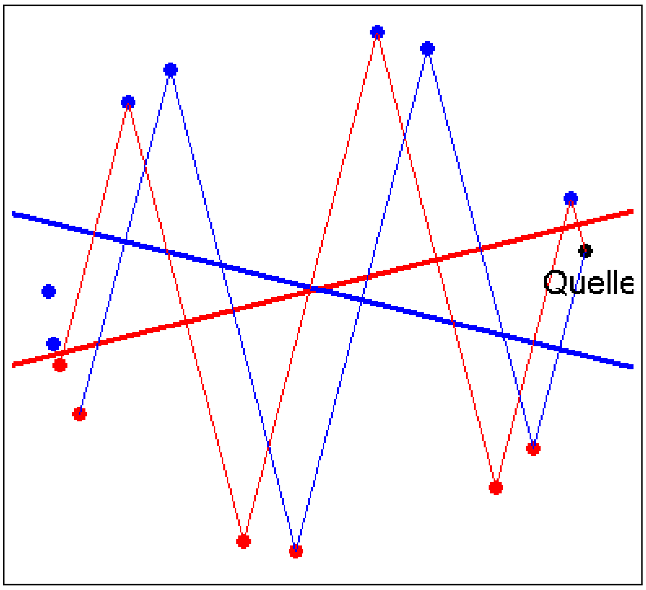
(2.3.7) **Unser Hauptproblem: Bestimme zu einem gegebenen optischen Lichtweg eventuelle Fokuspunkte, auch die näherungsweisen, für schmale Bündel.**

(2.3.8) Im Falle der Reflexion am Spiegel ist diese (vielfach komplizierte) Bestimmung nicht nötig. Wir können den fokussierenden Spiegelpunkt mit Hilfe eines einzigen Strahles rechnerisch oder geometrisch bestimmen, wie wir oben gesehen haben. Hier benötigt man zur Bestimmung nicht das gesamte Bündel!

Zwischengeschaltet eine Anwendung bzw. ein neues Übungsbeispiel:

□ (2.3.9) Zwei gegeneinander geneigte Spiegel, die einen Winkel α miteinander bilden. Dazwischen eine Lichtpunktquelle Wieviele Spiegelbilder gibt es? Wo liegen sie? (Skizze für einige nahleigende Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$.) Punkt und erste Speigelbilder einzeichnen. Allgemein vermutlich nicht machbar. Nur Einstieg)

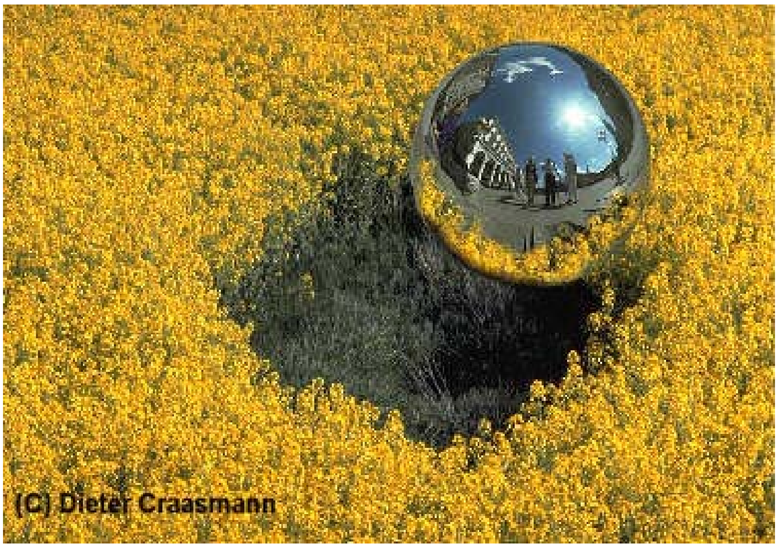
Die Figur zeigt ein Beispiel sich so ergebender Spiegelbilder. Wie verläuft die geometrische Konstruktion? Kann man die Spiegelteile links vom Schnittpunkt fortlassen?



☐ (2.3.10) Wie rechnet man derartige Spiegelungsprobleme vektoriell? Beschreiben Sie die **Strategie**. Was für Leistungen muss die Vektorrechnung erbringen?

☐ (2.3.11) Konzipieren Sie einen Computerbefehl, der (in der Ebene) das Problem der Strahlreflexion löst. Was muss man eingeben? Was soll herauskommen? Welche Formel benötigt man?

☐ ■ (2.3.12) Das allgemeine Problem: Gegeben eine u.U. gekrümmte reflektierende Fläche und eine punktförmige Lichtquelle mit davon ausgehendem schmalen Strahlenbündel. Bestimme das Bündel der reflektierten Strahlen! Wo liegen - sofern vorhanden - die Fokuspunkte der reflektierten Strahlenbündel? (Lösung wird hier nicht besprochen)



(2.3.13) Zusammenfassender Einschub: Wie sieht hier beim Reflexionsgrstz **der Weg zu den relevanten Ergebnissen in modularer Formulierung aus??**

1. Einstieg:

   (a) Das Reflexionsgesetz. (**Erfahrung**, Gültigkeit - Mathematisch vektorielle Formulierung)

   (b) Das Fokussierungsphänomen (dazu: Computerexperimente!)

2. Das entstehende mathematische Problem:

   (a) Vektorielle Beschreibung (schmaler) Strahlenbündel

   (b) Behandlung des mathematischen Problems der Bestimmung von Fokuspunkten

      i. Einfallsbündel vorgeben

      ii. Reflektiertes Bündel bestimmen. Mit (2.2.7)

      iii. Mathematisch nach Fokussierungspunkten des Bündels suchen $\Leftarrow$ $\boxed{\text{Grenzwertproblematik!!!}}$

   (c) Ergebnis bzw. Problem geeignet nähern, so dass ein handhabares / nützliches Resultat entsteht. Optimal ist eine Formel, die global die geometrische Lage von Gegenstand und Bild in Beziehung setzt! Das klappt im Fall des Kugelspiegels.

   (d) Geht das nicht bleibt beispielsweise eine Computersimulation

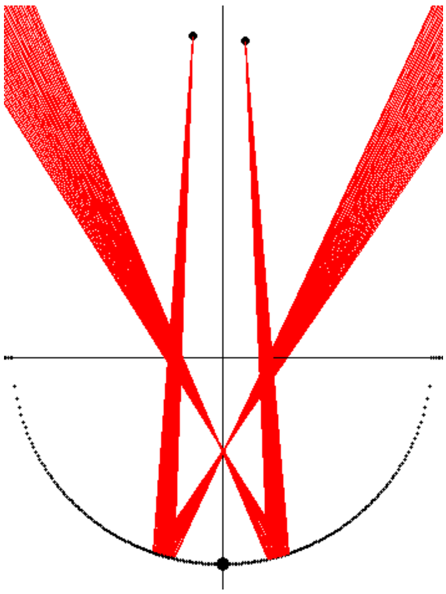
Mathematisch ist der Punkt 2.b.iii neu und anspruchsvoller. Wir behandeln ihn hier nicht. Im Vorkurs Mathematik wird er besprochen. Einzelne Teilaufgaben wie 2.b.ii können in der Ausführung aufwendig und schwierig werden.

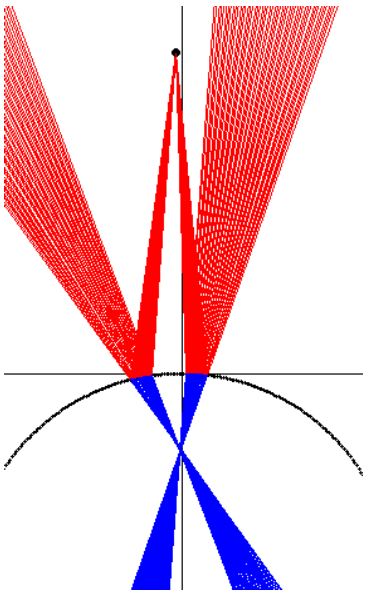
Für die folgenden drei Fälle läßt sich das besprochene Programm relativ leicht ausführen:
◊ Brennpunkt der Parabel
◊ Brennpunktsverhalten der Ellipse
◊ **Kugelspiegel: Hier kann man für Bündel achsennahe Strahlen den Brennpunkt näherungsweise bestimmen. Das tun wir unten.**

(2.3.14) Typischerweise lässt sich die Lage eventueller beliebiger Fokuspunkte **nicht** mit Hilfe einfacher Formeln bestimmen. Aber es gibt einige wichtige und nützliche Ausnahmen.

(2.3.15) Das allgemeine Resultat der Suche nach Fokuspunkten kann auf den Fall eines **Kugelspiegels** angewandt werden. Es zeigt sich, dass das Verhalten **achsennaher** Strahlen durch eine einfache Formel zusammengefasst wird:

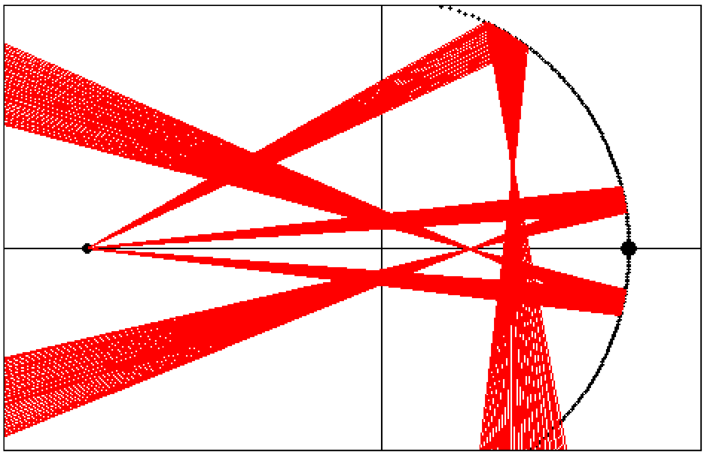
Zunächst einmal zwei Bilder für achsennahe Bündel. (Solche für achsenferne haben wir oben bereits gezeigt.)





Im linken Bild haben wir Reflexion an einer Hohlkugel. Wir sehen einen reellen Fokuspunkt etwa im Abstand des halben Kugelradius auf der Achse. Das zweite Bild zeigt die Reflexion an einer Vollkugel. Rot die tatsächlichen Lichtwege und blau die Verlängerung der reflektierten Strahlen. Wir sehen einen virtuellen Fokuspunkt erneut mit einem Abstand des halben Kugelradius vom Mittelpunkt.

□ (2.3.16) Welcher Unterschied besteht zwischen *achsennahen* und *achsenparallelen* Bündeln? Was zeigt das nachfolgende Bild für die Reflexion an einer Hohlkugel?



(2.3.17) Die allgemeine Rechnung bestätigt diese (durch Computersimulation gewonnenen) Beobachtungen. Wir führen diese Rechnung hier nicht aus. Das Ergebnis kann in einer **Formel** zusammengefasst werden. Die Form der hier auftretende Formel taucht später bei dfer Linsenformel wieder auf, so dass man sie sich gut erarbeiten sollte.

Nochmals: In Fällen wie diesen ist es wichtiger, sich gründlich mit dem Gehalt der resultierenden Formel vertraut zu machen, als deren Begründung oder Herleitung durchzugehen. D.h. insbesondere eine Reihe von Konsolidierungsfragen zu behandeln.

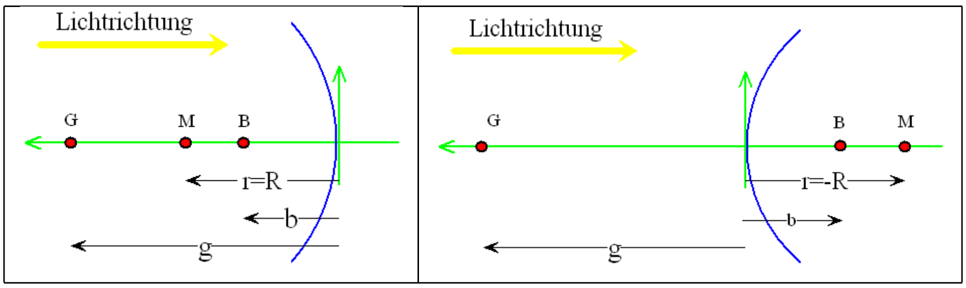
(2.3.18) Bei der vorliegenden Formel ebenso wie in vielen ähnlichen Fällen ist es wichtig, sich über eine Skizze die zugehörigen **Koordinatenvereinbarungen** einzuprägen. (Vektorrechnung in einer Dimension!).

◊ Der Lichtweg geht von von links nach rechts

◊ Der Koordinatenursprung liegt im Scheitel der Kugel

◊ Die Koordinaten der Achsenpunkte werden nach links positiv gerechnet (=Abstand vom Scheitel), nach rechts negativ.

◊ Der Startpunkt G ("Gegenstand") des achsennahen Bündels erhält die Koordinatenbezeichnung g und der zugehörige Fokuspunkt B ("Bildpunkt") die Koordinatenbezeichnung b. Ist R der Kugelradius, dann liegt der Kugelmittelpunkt M bei r=+R im Fall der Hohlkugel und bei r=-R im Fall der Vollkugel!



(2.3.19) Die Figur fasst die Bezeichnungen zusammen. Dann gilt:

◊ Zwischen den drei Größen g, b und r=(Koordinate des Kugelmittelpunktes, nicht Kugelradius!) besteht eine deterministische Beziehung in Form der folgenden Formel

$$\boxed{\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}}$$

♦Gehalt dieser Gleichung: $\boxed{\textbf{??}}$ (ganz unten)

Konsolidierungsaufgaben

(2.3.20) In den folgenden Aufgaben sei R>0 ein fester äußerer Parameter. Die typische zugehörige Rollenverteilung ist dann: Unabhängig gegebenes g. Über die Formel wird b festgelegt.

☐ Lösen Sie die Formel nach b auf. (Für die nachfolgenden Beispiele ist es trotzdem vielfach nützlich , jeweils die ursprüngliche, nicht aufgelöste Formel zu verwenden, um sich mit deren Struktur vertraut zu machen.)

☐ Was liefert die Formel dann für g=R, g=$\frac{1}{2}R$?

☐ Was für 0<g<$\frac{1}{2}R$

☐ Wann liegt B im Brennpunkt (b=$\frac{1}{2}R$) ?

Jetzt sei r=-R (Vollkugel)

☐ Kann es einen reellen Fokuspunkt geben? Wo liegt die Lichtquelle im Fall $b = -\frac{1}{3}R$?

☐ Wo muss G liegen (Wert für g), damit das ausfallende Bündel achsenparallel ist?

☐ (2.3.21) Die Erde habe eine reflektierende Oberfläche. Wo spiegelt sich der Mond? (Welche Zahlwerte werden benötigt? Verallgemeinerungsfähige Präsentation der Antwort!)

2.4 Das Brechungsgesetz

Dieses Gesetz erfasst eine zweite Art von Wechselwirkung von Lichtes mit Materie: Beim Durchgang durch inhomogene Materie verändert der Lichtstrahl (u.U) seine Richtung! (Fata Morgana,......) Das Gesetz selbst beschreibt, wie sich die Richtung des Lichtstrahles beim Durchgang durch eine scharfe Stoffgrenze (etwa Luft-Wasser) ändert.

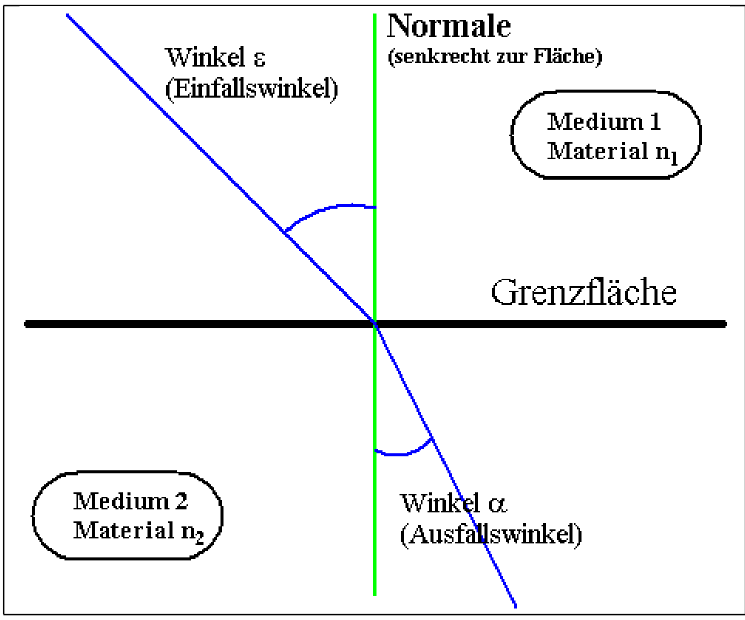
(2.4.1) Vorbemerkungen zur Geschichte des Brechungsgesetzes. Die Schwierigkeit, das Gesetz zu finden!!
Besipiele erfasster Phänomene

Übersicht: Der Zugang zum Verständnis des Gesetzes erfolgt in mehreren Schritten, die im Schema zusammengefasst sind und anschließend durchgegangen werden.

Umfeld		Formulierung			Anwend.	Begründ.
Geschichte	Erfasste Phänom.	Merken	**Skizze**	Mathem.	....	3x

2.4.a Formulierung und Verstehen des Gesetzes

(2.3.2) Skizze zur Geometrie des Gesetzes



Brechungsgestz:
Es gilt:

$\boxed{n_1 \sin(\varepsilon) = n_2 \sin(\alpha)}$

oder besser (**Merkform**):

$\boxed{\sin(\varepsilon) = n \sin(\alpha)}$ mit $\boxed{n = \frac{n_2}{n_1}}$.

$\boxed{n_1 \sin\varepsilon = n_2 \sin\alpha}$
ε Einfallswinkel
α Ausfallswinkel

Übliche Rollen:
n_1, n_2 äußere Parameter.
ε unabhängige Variable
α abhängige Variable

n_1 und n_2 sind *Materialkonstanten. ("Absoluter Brechungsindex")* Sie hängen von der Art der beteiligten Stoffe und deren Temperatur ab. Schließlich hängen sie auch von der Art des gewählten Lichtstrahles (dessen Wellenlänge) ab.

(2.4.2) Damit ist sowohl die Richtung weiterer experimenteller wie auch theoretischer Arbeit klar:

- – Experimentelle Bestimmung der Brechungsindizes !
  – Theoretische Erklärung, besser vorhersagende Berechnung für einzelne Materialien
  – Klärung der Abhängigkeit von weiteren Parametern wie Temepreatur, Wellenlänge,....

Dagegen hängen bei festen Materialien die Winkel α und ε **nur** von der geometrischen Konfiguration des Lichtstrahles ab.

(2.4.3) *Wir geben alle Winkel im Bogenmaß an. (Denken Sie an die Einstellung des Modus für Bogenmaß am Tschenrechner)*

Umrechnungsformel:

$$\frac{\alpha_{Bogen}}{2\pi} = \frac{\alpha^0}{360} \qquad \alpha_{Bogen} = \underbrace{\frac{2\pi}{360}}_{0.017}\alpha^0 \qquad \alpha^0 = \underbrace{\frac{360}{2\pi}}_{57}\alpha_{Bogen}$$

und einige Beispiele

α^0	α_{Bogen}	α_{Bogen}
1^0	0.017	
45^0	0.78	$\frac{\pi}{4}$
57^0	1	1
90^0	1.57	$\frac{\pi}{2}$

□ Rechnen Sie selbst einige numerische Aufgaben zur Konsolidierung des Gesetzes (α bestimmen bzw. n bestimmen!)

(2.4.4) Wir haben $\boxed{n=\frac{n_2}{n_1} \geq 1}$ gesetzt. Das ist der relativer Brechungsindex. n>1 besagt, $n_2 > n_1$. Dann ist 2 das *optisch dichtere Medium.* Ist Medium 1 das Vakuum, dann ist $n_1 = 1$ und wir haben $n=n_2$. Für Luft ist der Index auch fast 1. Zur Orientierung geben wir einige Beispiele:

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{\mathrm{Luft}} \approx n_{vac} = 1 \\ n_{Wasser} = 1.33 \\ n_{Diamant} = 2.42 \end{array}}$$

(2.4.5) Wie wirkt sich das Gesetz geometrisch aus? Angenommen wir haben n>1. Dann wird der ausfallende Strahl zur Normalen hin "abgelenkt" oder gebrochen. Das folgende Konkretisierungsbeispiel erläutert diese Verkleinerung des Ausfallswinkels:

$\overbrace{sin(\varepsilon)}^{\leq 1} = \overbrace{n}^{>1} \overbrace{\sin(\alpha)}^{noch\ kleiner..}$	
$0.8 = 1.5 \cdot \boxed{0.533..}$	Konkretisierung
$\arcsin(0.8) = \boxed{0.927}$ $\arcsin(0.5333) = \boxed{0.562}$	Die beiden Winkel

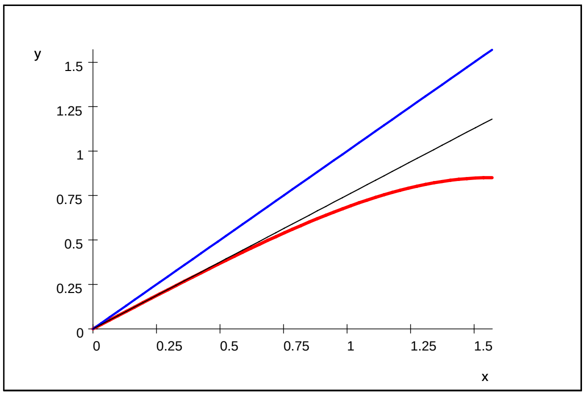
(2.4.6) Jetzt einige Umformungen des Gesetzes $\boxed{\sin(\varepsilon)=n\sin(\alpha)}$

Zuerst lösen wir nach dem (in vielen Problemsituatonen gesuchten) Ausfallswinkel auf:

$$\boxed{\boxed{\sin(\varepsilon)=n\sin(\alpha)}} \qquad \sin(\alpha) = \frac{1}{n}\sin(\varepsilon) \qquad \boxed{\alpha = asn(\frac{1}{n}\sin(\varepsilon))}$$

(Wir schreiben asn statt arcsin oder $\sin^{-1}$. Vgl. Anhang über trig. Funktionen)

Für Wasser mit n=1.33 ergibt sich graphisch das folgende Bild, wobei wir den unveränderten Winkel noch blau einzeichnen (horizontal ε und vertikal α):



Für kleine α gilt $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$. Das bedeutet, dass für kleine Einfallswinkel $\boxed{\alpha \approx \frac{1}{n}\varepsilon}$ gilt. In der Figur ist das schwarz mit eingezeichnet. Wir sehen, dass hierdurch für kleine Winkel das Gesetz gut wiedergegeben wird.

Alle Winkel	Für kleine Winkel
$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{1}{n}\sin(\varepsilon)}$	$\alpha \approx \frac{1}{n}\varepsilon$

□ (2.4.7) Was ergibt das Brechungsgesetz für n=1? Was für n=∞?

□ (2.4.8) Geben Sie eine Formel für den "*Ablenkwinkel*" an. (Wie ist das in der Figur zu interpretieren?)

□■ (2.4.9) Bestimmen Sie eine vektorielle Formel für den Richtungsvektor des gebrochenen Strahles. Zunächst: Wie muss die aussehen, was muss sie leisten? Die Herleitung selbst ist anspruchsvoller. Resultat unter (2.4.17).

□ (2.4.10) Denken Sie sich einfache Aufgaben mit unterschiedlicher Rollenverteilung für die drei Größen α, ε und n des Gesetzes aus.

□ (2.4.11) Im "optisch dichteren Medium" (das, mit dem größeren n) gibt es das Phänomen der **Totalreflexion**. D.h. der (dortige) Ausfallswinkel (mit der Normalen) kann einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten. Kommt der Lichtstrahl umgekehrt aus dem dichteren Medium, dann wird er an der Grenzfläche vollständig reflektiert! Wie lautet die Formel für diesen Grenzwinkel? Wie groß ist der Grenzwinkel im Fall von Wasser und von Diamant? Wie liest man ihn - den Grenzwinkel - aus obiger Figur ab?

■ (2.4.12) Gegeben eine punktförmige Lichtquelle in Diamant mit ebener Oberfläche. Wieviel Prozent des Lichtes dringt nach aussen ? Was für eine Formel wird benötigt? Oder: Wieviel wird total reflektiert Was wird vernachlässigt?

Die bisherigen Überlegungen samt der Behandlung der Fragen gehören zum Vertrautmachen mit dem Gesetz.

2.4b **Begründungen des Brechungesetzes:**

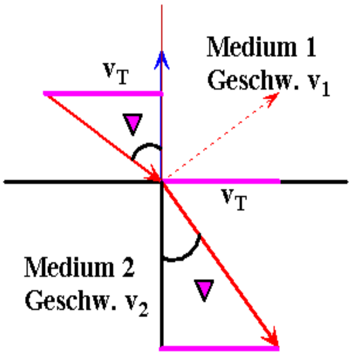
Man findet üblicherweise ***drei*** *Herleitungen unterschiedlicher Art, die alle von ausgesprochen unterschiedlichen (allgemeineren) Voraussetzungen ausgehen.*

(2.4.13) $\boxed{\text{1. Herleitung:}}$ über das Korpuskelmodell des Lichtes: **D.h. Richtung des Lichtstrahles gleich Richtung der vektoriellen Geschwindigkeit!**

An der Grenzfläche wird auf die Korpuskel eine Kraft in Richtung der Normalen ausgeübt, die die Teilchen für n>1 in das zweite Medium "hineinzieht" ! Dann ändert sich die Normalkomponente der Geschwindigkeit, nicht aber die der Tangentialkomponente. Aber: Eine Vergrößerung der Normalkomponente gibt **Vergrößerung der Gesamtgeschwindigkeit**.

Die Figur zeigt:

$$n = \frac{v}{v_T} \qquad \text{"Erhaltung der Tangentialkomponente!"}$$



$\sin\varepsilon = \frac{v_T}{v_1}$
$\sin\alpha = \frac{v_T}{v_2}$
...?..
...

☐ Führen Sie die Rechenschritte zur Figur weiter aus.
Ergebnis ist das Brechungsgestz mit einer zusätzlichen inhaltlichen Interpretation des Brechungsindex:

$$\sin\varepsilon = n \sin\alpha \qquad \text{mit } \boxed{n=\frac{v_2}{v_1}}$$

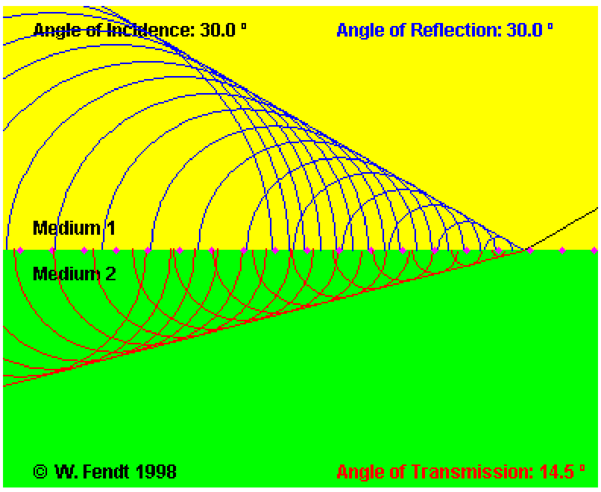
Konsequenz: Die Lichtgeschwindigkeit im optisch dichteren Medium 2 ist größer als die in 1. Oder $v_2 > v_1$!.*Das* stimmt weder mit der Erwartung überein noch mit dem Experiment! Damit haben wir ein erstes **Argument gegen die Teilcheninterpretation** des Lichtes! Vgl. (2.1.5).

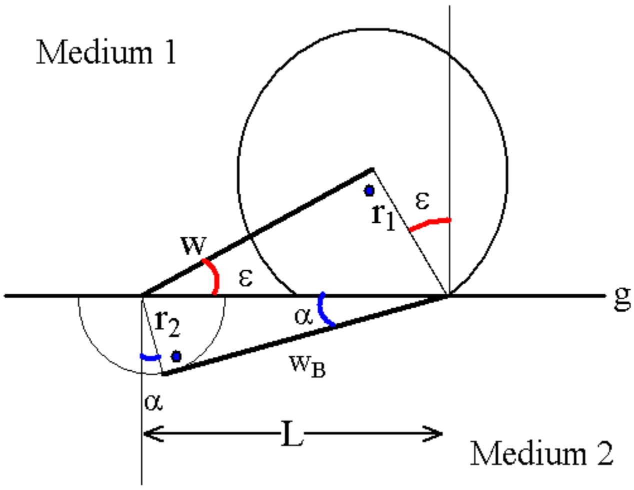
■ (2.4.14) Übung: Wie groß sollte hiernach die Lichtgeschwindigkeit v_D in Diamant im Vergleich zur Vakuumlichtgeschwindigkeit sein?

(2.4.15) $\boxed{\text{2. Herleitung}}$ Sie erfolgt im Wellenbild des Lichtes, wird hier nicht gegeben und gibt für den Brechungsindes ein plausibleres Resultat, nämlich

$$n = \frac{v_1}{v_2}$$

■ Versuchen Sie die Herleitung und Begründung mit Hilfe der folgenden zwei Bilder zu verstehen, die die Ausbreitung einer "Wellenfront" in den beiden Medien beschreibt. "Wellenfront" statt Lichtstrahl" :

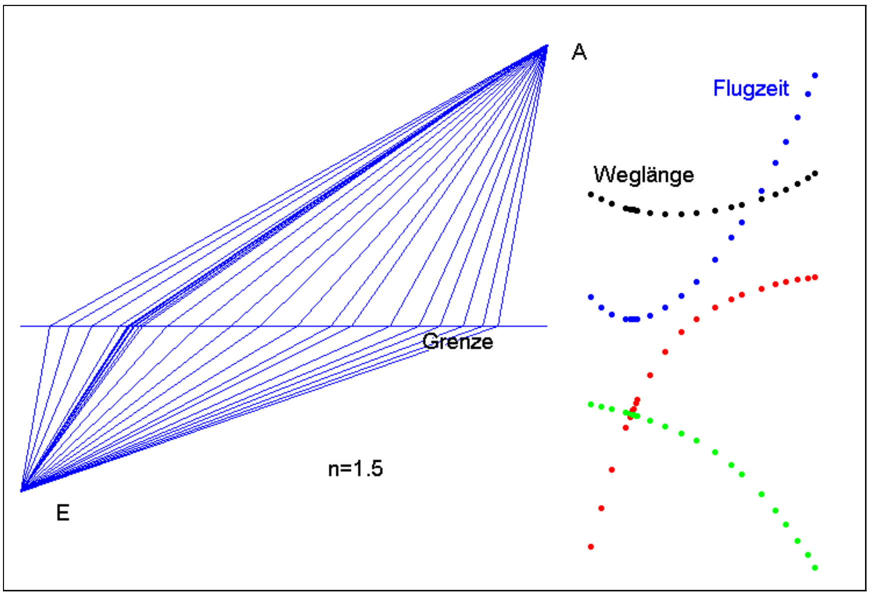




■ Wie ist nach dieser Beziehung das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit in Diamant zur Vakuumlichtgeschwindigkeit?

(2.4.16) $\boxed{\text{3. Herleitung}}$ Über das Fermatsche Prinzip. Auch hier ergibt sich die zweite (experimentell korrekte) Formel für das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten.

Bei dieserHerleitung werden Anfangs- und Endpunkt des Lichtweges vorgegeben. Das Licht habe überall eine bestimmte, eventuell ortsabhängige Geschwindigkeit. Man berechnet für jeden denkbaren Lichtweg vom Anfangs- zum Endpunkt die Zeit aus, die das Licht für den Weg benötigt. **Der tatsächliche physikalische Weg ist der, der am wenigsten Zeit benötigt**. In einem homogenen Medium mit konstanter Lichtgeschwindigkeit ist das die kürzeste Verbindung. Grenzen zwei Medien mit unteschiedlicher Geschwindigkeit aneinander, folgt das Brechungsgesetz mit derselben Formel für den Brechungsindex wie im Wellenmodell! Das leiten wir hier nicht rechnereisch her, sondern geben das Resultat einer Computersimulation der Verhältnisse.



In der Figur sind verschiedene Lichtbahnen von A nach E eingezeichnet. Rechts daneben blau die zugehörige Flugzeit und schwarz die Bahnlänge. (rot und grün noch die Flugzeit für die beiden Teilstrecken). Die Bahn mit der kürzesten Flugzeit befindet sich im Bereich mit der Bahnverdichtung. Sie erfüllt das Brechungsgesetz für n=1.5 und ist **nicht** gleich der kürzesten Verbindung von A mit E. Plausibel: Im Medium mit der kleinen Geschwindigkeit - unten- fliegt das Teilchen nur eine kürzere Strecke als zur geradlinigen Verbindung erforderlich! . .

□ (2.4.17) Zur vektoriellen Bestimmung der Richtung des gebrochenen Strahles. Wie immer stellt sich hier die Frage, wie man das Koordinatensystem legt. Es liegt nahe, dieses so zu legen dass Einfalls- und Ausfallrichtung beide in der x-y-Ebene liegen und dass weiter die horizontale Achse (x-Achse) mit der Grenzlinie zwischen den beiden Medien übereinstimmt. Leiten sie diese Formel her mit nachfolgenden Vorgaben her

Ein Richtungsvektor des einfallenden Stahles: $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

und y=0 ergibt die Grenzfläche

▼ Ergebnis (ohne Herleitung): Wir bezeichnen die Richtungsvektoren des gebrochenen Strahles mir $\vec{g}$. Man kann zwei Lösungen mit unterschiedlicher Länge angeben, nämlich ($e^2 = \vec{e}^2 = e_1^2 + e_2^2$)

$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \sin\varepsilon \\ \sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} \end{pmatrix}$	$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} e_1 \\ \sqrt{n^2\vec{e}^2 - e_1^2} \end{pmatrix}$

Anmerkung: Für viele Anwendungen ist diese Formel leider nicht brauchbar, weil das Koordinatensystem bereits anders festgelegt ist. Was folgt für n=1? Für n=0?

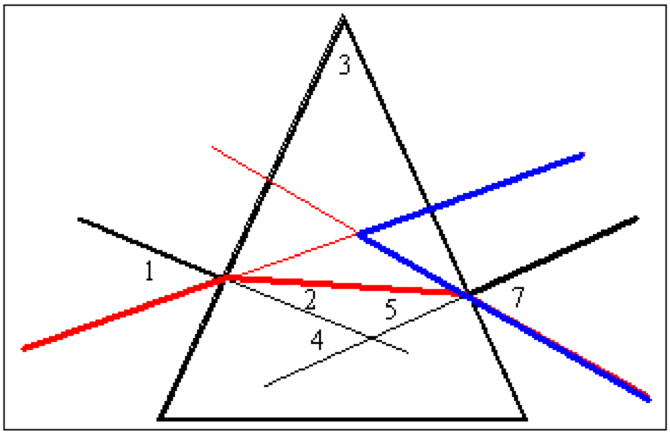
▲

Bemerkung: Totalreflexion erfolgt für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ also $\sin\varepsilon = 1$ und damit $\vec{g}_{grenz} = (1, \sqrt{n^2 - 1})$.
Also $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{n^2-1}^2}} = \frac{1}{n}$ wie früher bereits bestimmt.

2.4c Einige Folgerungen und Anwendungendes Gesetzes
(Im Kurs: Totalreflexion, Prisma, Regenbogen dünne Linse)

Das Phänomen der **Totalreflexion** wurde bereits besprochen.

□ (2.4.18) Eine weitere Konsequenz des Brechungsgesetzes ist das Verständnis des Lichtverlaufes in einem Prisma. Zunächst eine Skizze mit ersten Bezeichnungen in Form einer Durchnumerierung beteiligter Winkel
.

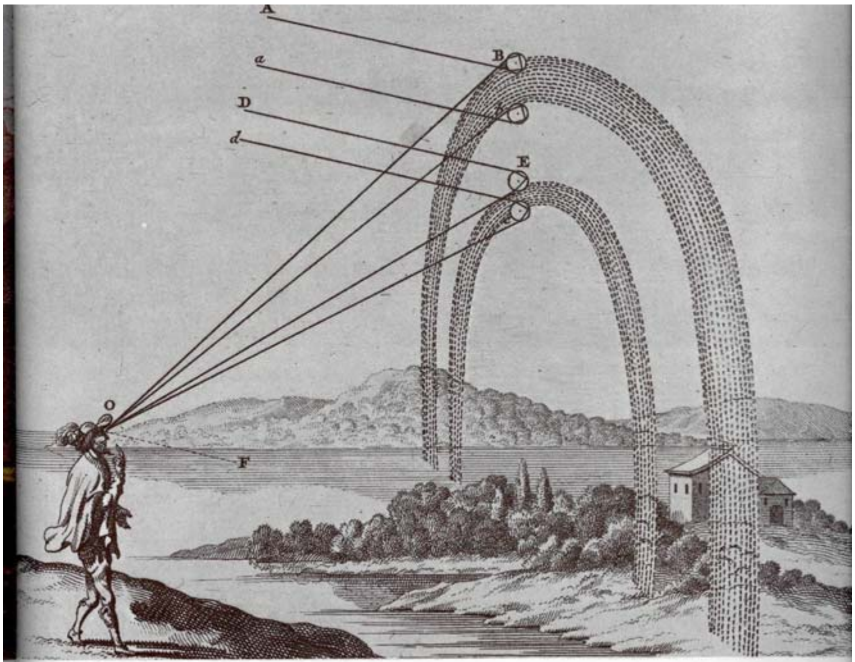


□ Welche Bedeutung hat der blau markierte Winkel? **Wie sollte eine Formel aussehen, die die Lichtablenkung in einem Prisma beschreibt?** Was sollte sie leisten?

Genauer: Welche (abhängige) Größe sollten durch die Formel durch welche unabhängige ausgedrückt werden, was wird dabei als äußere Parameter eingehen?

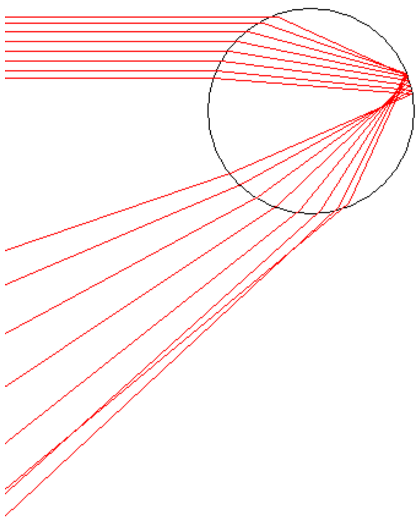
(2.4.19) Erste größere Anwendung des Brechungsgesetzes: Das **??** **und seine ??** :

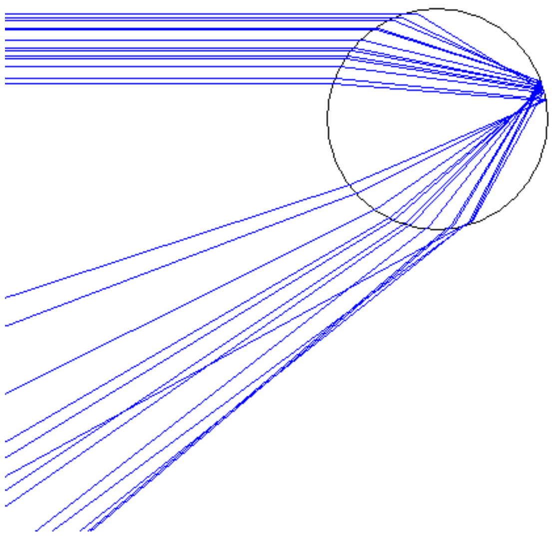
Das Bild zeigt die Erklärung des Regenbogenphänomens. Für uns ist der untere Bogen relevant. Verfolgen Sie den Strahlengang. Das Lichtbündel (am Auge) entsteht über die gemeinsame Wirkung vieler Regentropfen.



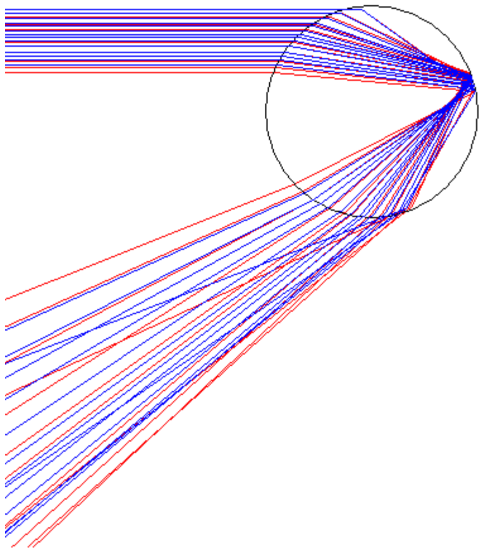
Der Regenbogen in der cartesianischen Physik

Wir machen eine Computersimulation des Strahlenganges (in einem einzigen Tropfen): Von links fällt ein Bündel paralleler Strahlen ein und trifft auf einen kugelförmigen Regentropfen. Im Schnitt mit der Ebene ergibt das einen Kreis. Die Lichtstrahlen werden gebrochen, an der Rückwand (zumindest teilweise) reflektiert und dann erneut gebrochen. Das Ergebnis ist ein nicht mehr paralleles Bündel. Dabei entsteht die untere Grenze des ausfallenden Bündels **nicht** durch die alleroberstenLichtstrahlen des Einfallsbündels. Vielmehr liegt ein Minimum des Ausfallswinkels etwas darunter vor. Links haben wir rotes Licht, rechts blaues Licht einfallen lassen. Der Brechungsindex ist für beide etwas unterschiedlich.



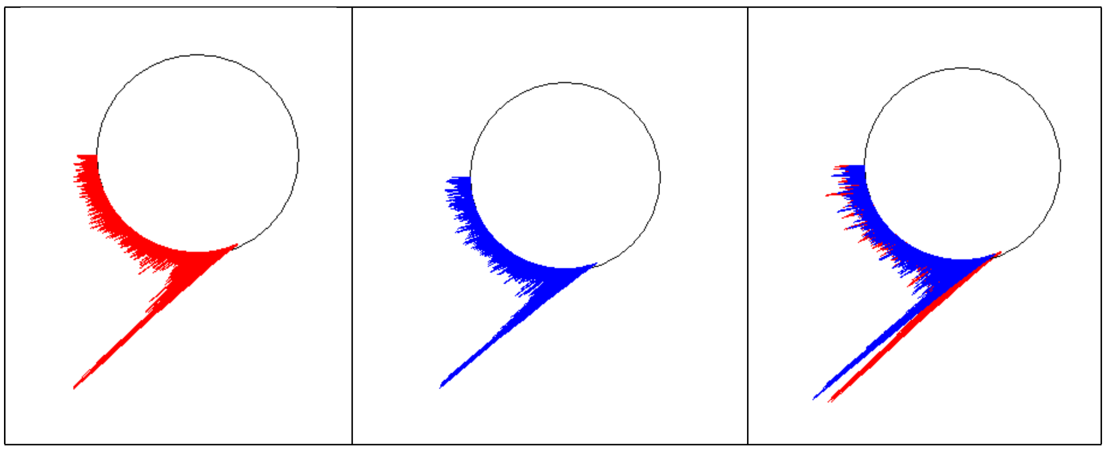


Im nächsten Bild überlagern wir beide Einfallsbündel, um zu sehen, was der unterschiedliche Brfechungsindex bewirkt:



Tatsächlich hat das Minimum des Ausfallswinkels im roten Fall einen etwas größeren Wert al im blauen. Und das liegt nicht an unserer Wahl der gezeichneten Einfallstrahlen. **Aber wir ausfallende** Strahlen mit **einer Vielzahl überlappender Winkelwerte. Wieso sollte man gerade die zum Minimum gehörigen sehen?**

Dazu machen wir ein weiteres Computerexperiment. Wir wählen die Höhe des einfallenden Strahles gleichverteilt aus und tragen die Lage des ausfallenden Strahles dann histogrammartig am zugehörigen Ausfallswinkel an. D.h. doppelte Höhe im Histogramm - doppelte Anzahl der mit diesem Winkel austretenden Strahlen



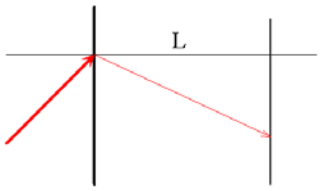
Und jetzt sehen wir: Zum Minimum gehören viel mehr Lichtstrahlen als zu den übrigen Winkeln. D.h. dort ist die Intensität des Lichts deutlich höher. Und das Minimum für das rote Licht hat einen größeren Ausfallswinkel als das für das blaue, erscheint daher dem beobachtenden Auge steiler. Und so entsteht durch das Zusammenwirken vieler Tropfen die Farbtrennung im Bogen.

(2.4.

20) Übung: Der Brechungsindex von rotem und blauen Licht unterscheidet sich etwas. Für Wasser gilt $n_{blau} = 1.34$ und $n_{rot} = 1.33$. Der für beide Farben gleiche Einfallswinkel sei $\frac{\pi}{4}$. Wie weit muss der Strahl im Waser laufen, damit sich roter und blauer Strahl etwa 1cm voneinander entfernen? (Auf einer zur Grenzfläche parallelen Ebene im Abstand L)

Wo liegen in der nachfolgenden Skizze α, ε und d ?

Was vermuten Sie? Wie groß wird etwa L sein?



arcsin $\frac{1}{1.34\sqrt{2}} = 0.555\,88$ (blau) arcsin $\frac{1}{1.33\sqrt{2}} = 0.560\,56 =$ (rot)
L=$\frac{1}{\tan 0.560\,56 - \tan 0.555\,88} = 153.\,73$

Mit dem BR folgt zunächst $\alpha_R = \sin^{-1}(\frac{1}{n_{rot}\sqrt{2}})$ und $\alpha_B = \sin^{-1}(\frac{1}{n_{blau}\sqrt{2}})$. Mit den gegeb. Werten für n folgt: $\alpha_{rot} = ...$

Aus der (ergänzten) Skizze folgt für die Ablenkung A des Lichtstrahles A=Ltanα. D.h. für den gesuchten Unterschied der Ablenkungen

$$\Delta A = A_R - A_B = L\,(\tan\alpha_{rot} - \tan\alpha_{blau.})$$

Also

$$L = \frac{\Delta A}{(\tan\alpha_{rot} - \tan\alpha_{blau.})}$$

D die Verschiebung gesucht
Was ist gegeben: Quaderbreite B mit Brechungsind. n
Geom. Konf. Winkel zw. Einfallsrichtung und Normalen ε

2.6 **Dünne Linsen**: Die Linsenformel.

Mehrfache Anwendung des Brechungsgesetzes liefert den Lichtweg durch Linsen. Für dünne Linsen erhält man ein Resultat, dass sich durch eine einfache Formel darstellen läßt. Und diese Formel hat dieselbe Forme wie die für die Reflexion achsennaher Strahlen bei einer Kugel. Und mit Hilfe von Linsen läßt sich wieder die Funktion von der Lupe, der Brille, dem Mikroskop oder dem Fernroh verstehen. D.h. wir sind mit unseren Überlegungen an einem Punkt angelangt, der größte kulturhistorische und technologische Bedeutung hat.

(2.6.1) Mit etwas aufwendigeren Rechnungen können wir das folgende allgemeine Programm angehen und ausführen:

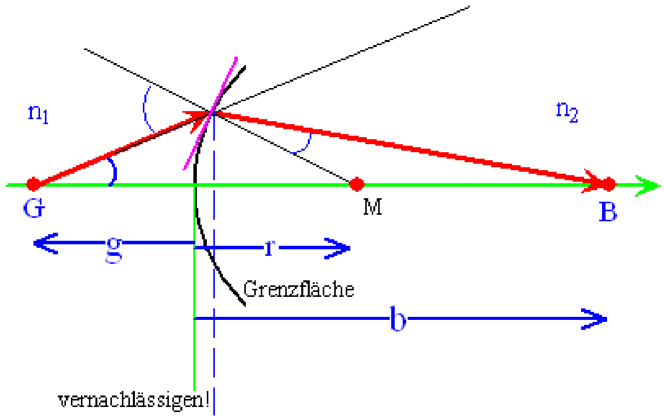
1. Berechne bzw. bestimme den Durchgang eines Lichtstrahl durch eine Kugeloberfläche, die **zwei** Medien trennt. Der relative Brechungsindex sei gegeben.
   (a) Führe wieder eine optische Achse samt zugehörigen Koordinaten ein. (Richtungswahl jetzt etwas anders als oben im Fall der Kugelreflexion)
2. Bestimmen erneut eventuelle Fokuspunkte

3. Suche eine vereinfachende Näherung für achsenparallele Strahlen

   (a) Formuliere das Näherungsresultat als Formel,

(2.6.2) Von diesem Programm führen wir 1a) und 3a) aus.

Zur Koordinatenwahl: Der Lichtweg geht wieder von links nach rechts. Und die 1-Achse hat jetzt dieselbe Richtung (grün). Der Koordinatenursprung liegt wieder im Schnitt Achse - Kugeloberfläche. Die Größen g und b und r sind positiv in den eingezeichneten Richtungen, d.h. der Koordinatenvektor des Punkte G ist $\vec{r}_G^K = \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix}$. In der Figur ist ein Lichtweg (rot) eingezeichnet. Man sieht wie er an der Kugeloberfläche gebrochen wird. Die Vereinfachung in Schritt 3 für achsenparallele Strahlen besteht vornehmlich darin, die x-Koordinate des Auftreffpunktes Null zu setzen, was natürlich nur für achsennahe Strahlen korrekt ist.

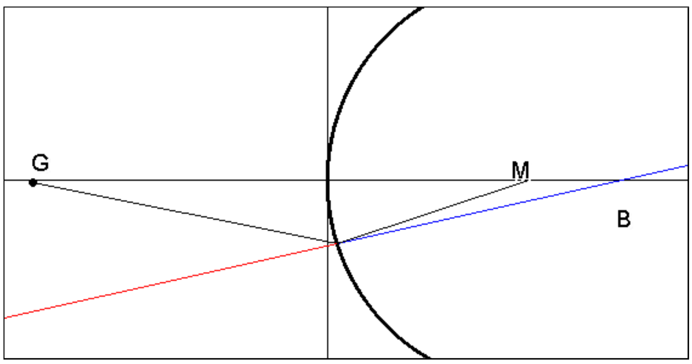


Die Durchführung dieses Programms ergibt:

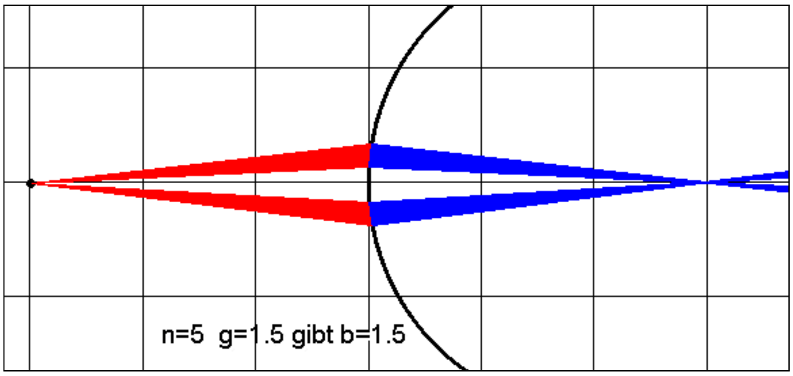
(2.6.3) **Ein achsennahes Lichtbündel, das von G ausgeht, hat B als Fokuspunkt, sofern die folgende Beziehung erfüllt ist:**

- $\boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}}$ Differenz, nicht Quotient!!!

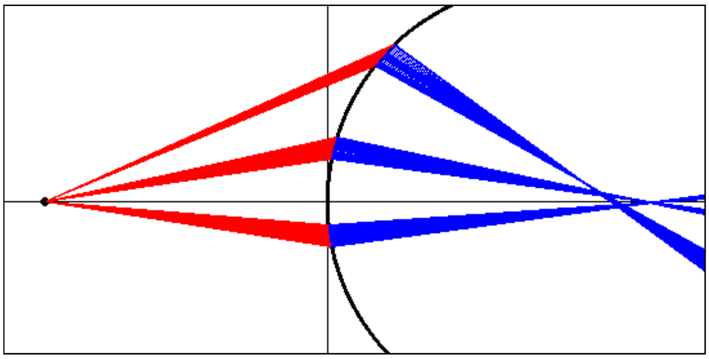
Einige Bilder einer Computersimulation, die nicht etwa diese Formel, sondern die exakte Brechung benutzt. Zunächst ein Einzelstrahl. Der gebrochene Strahl ist rot nach links verlängert.



Das nächste Bild zeigt das Verhalten von zwei achsennahen Bündeln. Es ist $n_1 = 1$ und $n_2 = n = 5$. Man verifiziert sofort, dass die abgeleitete Beziehung erfüllt ist.



Schmale Bündel, die nicht achsennah sind, können auch einen Fokuspunkt haben, aber dieser liegt an einer anderen Stelle. Dies zeigt das nächste Bild.



(2.6.4) Zugehörige Überlegungen

- g $\to \infty$ ergibt ein achsenparalles Bündel einfallender Strahlen. Dann liegt b=$\frac{n_2-n_1}{n_2}$. Für $n_2 = n_1$ wird b=∞, d.h. die Lichtstrahlen nehmen die Grenze nicht wahr. Ist $n_2 - n_1 < 0$, dann wird b negativ und wir erhalten einen virtuellen Fokuspunkt.
- ist g=$\frac{n_2-n_1}{r}$, dann wird b=∞, d.h. das gebrochene Bündel ist ein achsenparalleles.
- Die beiden Punkte F_r mit $b_r = \frac{n_2-n_1}{n_2}$ und F_l mit $g_l = \frac{n_2-n_1}{r}$ haben daher die *Brennpunkteigenschaft* : Ein achsennahes Bündel durch diese Punkte wird auf der anderen Seite der Brechungsfläche zu einem Parallelbündel.

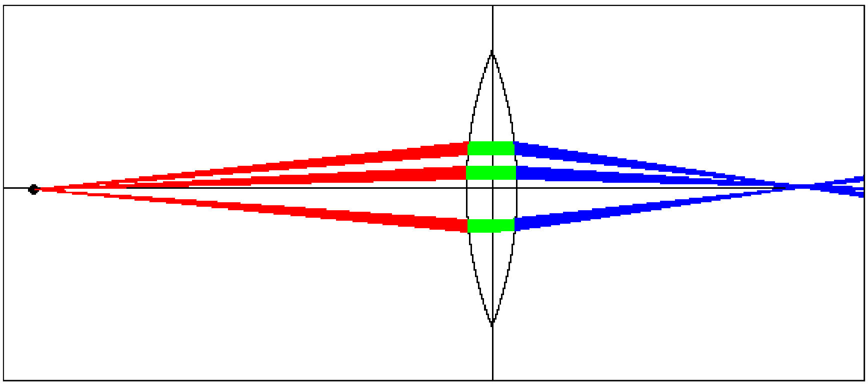
☐ Konsolidierungsfragen:

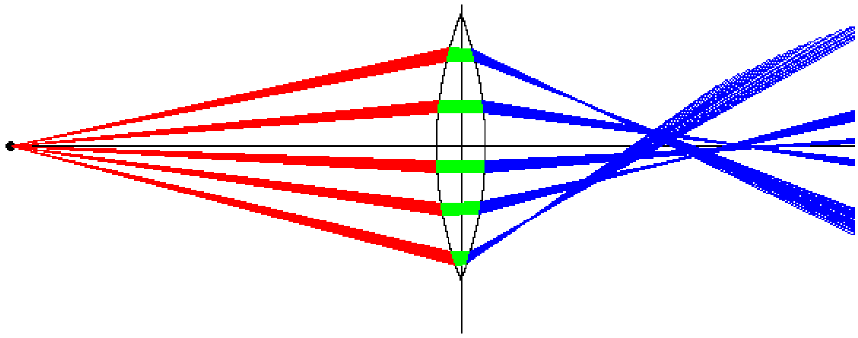
a) $n_1 = 1$ und $n_2 = 1.5$ sowie r=1m. Wo liegt der Fokuspunkt für ein g=0.5m? Was folgt für r=-1m bei gleichem Rest?

b) Wieso sollte man zwischen Brennpunkten und Brennweiten unterscheiden? Wo liegen die Brennpunkte im Fall des in a) beschriebenen Systems? ......

(2.6.5) Eine Linse entsteht nun dadurch, dass wir zwei derartige Grenzflächen hintereinander schalten und bei jedem Durchgang obige Formel anwenden. Wir betrachten hier nur den Fall, dass beide Grenzflächen ganz nahe beieinander liegen, dass man den Abstand der beiden Scheitel vernachlässigen kann.

Zunächst einmal wieder zwei Bilder eines Computerprogramms, das den Durchgang exakt mit hilfe des Brechungsgesetzes berechnet. Im ersten Bild werden nur achsennahe Bündel betrachtet, im zweiten auch einige achsenferne. Der Lichtweg innerhalb der Linse ist grün gezeichnet.





(2.6.6) **Herleitung der Linsenformel:** Wir haben die allgemeine Formel für die achsennahe Brechung an einer Kugeloberfläche

$$\boxed{\frac{n_1}{g}+\frac{n_2}{b}=\frac{n_2-n_1}{r}}$$

positiv: g nach links
r,b nach rechts
vom Scheitel

Diese (mit Radien r_1 und $-r_2$) ist jetzt zweifach hintereinander anzuwenden. Dabei sollen die Abstände der beiden Oberflächen vernachlässigt werden

Das gibt folgende Rollenzuweisung für die Formelgrößen: (Selbst eine Skizze anfertigen!)

n_1	n_2	g	b	r	Allgemein
1	n	g	b_1	r_1	1. Grenze
n	1	$-b_1$	b	$-r_2$	2. Grenze

Anwenden der Formel auf die beiden Fälle gibt zwei Beziehungen:

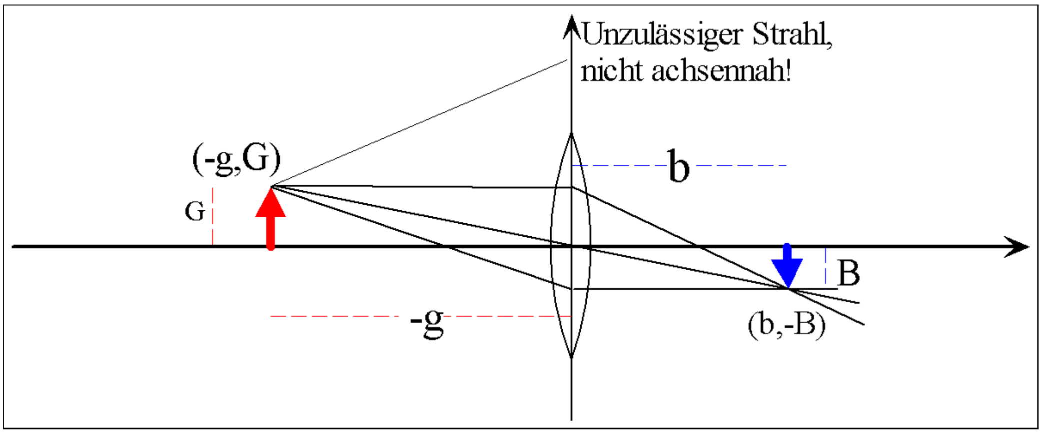
$$\begin{aligned}\frac{1}{g}+\boxed{\frac{n}{b_1}} &= \frac{n-1}{r_1}\\ \boxed{\frac{n}{-b_1}}+\frac{1}{b} &= \frac{1-n}{-r_2}\end{aligned}$$

Die Größe b_1, die zum Zwischenbereich gehört, muss herausgeworfen werden! Addieren gibt die gesuchte **Linsenformel:**

$$\boxed{\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}} \qquad \boxed{\frac{1}{f}=(\text{n-1})\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}.$$

Das ist unser zentrales Resultat. Denn damit kann man leicht die deterministische Beziehung zwischen Gegenstand und Bild einer Linse realisieren und bearbeiten.

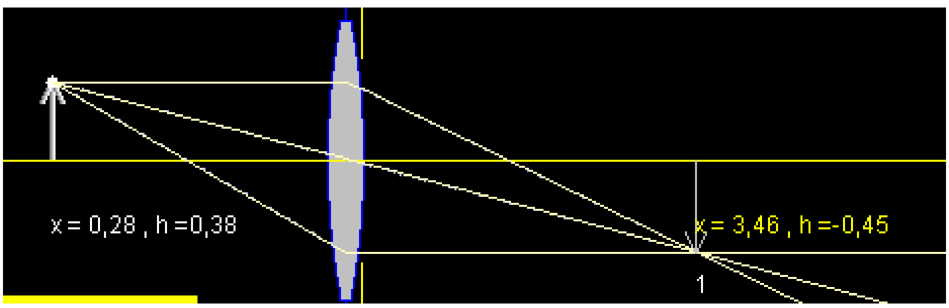
(2.6.7) Diskussion: Wie oben gesagt liefert diese Formel eine einfache Beschreibung der exakten Suche nach Fokuspunkten. Das Ergebnis sieht wie folgt aus:



Geht von einem Punkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix} -g \\ G \end{pmatrix}$ ein achsennahes Lichtbündel aus, dann ist der Punkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix} b \\ -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b\frac{G}{g} \end{pmatrix}$ (näherungsweise) ein zugehöriger Fokuspunkt! Dabei erfüllen die beiden Größen b und g die Linsengleichung! Sind somit etwa g und G gegeben, dann erhält man unmittelbar den zugehörigen Bildpunkt!

Weitere Bemerkungen:

- Anders als in (2.6.3) haben wir es nur noch mit einer Brennweite für beide Seiten zu tun.
- g=f gibt ausgehendes Parallelbündel
- Einfallendes Parallelbündel gibt b=f.
- g=b genau für g=b=$\frac{1}{2}f$ usw.
- Wenn man sicher ist, dass ein Bündel einen Fokuspunkt besitzt (das ist der schwere Teil!) , dann **genügen zu dessen Bestimmung zwei Lichtstrahlen des Bündels**. Deren Schnittpunkt liefert dann den Fokuspunkt. Mit Hilfe der Linsenformel kann man - bei bekanntem f - sofort drei Strahlengänge angeben, also immer problemlos den Fokuspunkt bestimmen. Das zeigt die Bedeutung dieser Formel. Sie macht ein ansonsten ohne Computer sehr schwieriges Problem leicht zugänglich.



(2.6.8) Hinzu kommt, dass diese Formel samt zugehöriger Konstruktion nicht nur für Punkte auf der optischen Achse gilt, sondern auch für solche in deren Nähe, **so daß man das man ein gesamtes Bild konstruieren kann.** Die oben gegebene Beziehung B=b$\frac{G}{g}$ benutzt das.

Natürlich sind das alles nur Näherungen, Abweichungen machen sich als "Linsenfehler" bemerkbar.

☐ Konsoldierungsaufgaben: f und g gegeben, b gesucht. Formulieren Sie kurz die zugehörige Lösungsstrategie. Dann muss klar sein, dass Sie diese Aufgabe für beliebige Zahlwerte beherrschen, auch wenn Sie n och kein Beispiel gerechnet haben./ Wann ist b negativ? (Virtuelles Bild). Was bedeutet negatives g? .. / Zwei dünnen Linsen in gegebenem Abstand.auf der optischen Achse anbringen (Zusammenfassende Skizze! Wie sieht das typische Problem aus? Wie die Lösungsstrategie?) / Wie müssen die beiden Linsen angeordnet werden, damit ein einfallendes achsenparalleles Bündel auch wieder achsenparallel aus der zweiten Linse ausstritt?

☐ Angenommen rechts von der dünnen Linse hat man ein Medium mit Brechungsindex n_2. Wie muss man die Herleitung abändern, um diesen allgemeineren Fall zu erfassen? Wie lautet die Linsenformel jetzt? Was folgt für die Brennpunkte? Kann man wie oben gegebene geometrische Bildpfeilkonstruktion auf diese neue Situation ausdehnen? Was ist anders? (Beispiel: Augapfel)

☐ Wie ändert sich die Brennweite einer dünnen Linse in Abhängigkeit von n (Endformel aus (2.5.6).)

Eine Inspektion des Inhaltsverzeichnisses und der Überschriften kann sich als ausgesprochen nützlich erweisen:

☐ Im Zusammenhang mit dem Stichwort "Vergrößerungsleistungen optischer Instrumente" findet man drei herausgearbeitete Begriffe, die unterschiedliche Aspekte des Themas quantitativ erfassen:

- Vergrößerungsfaktor (ein Winkelverhältnis)
- Abbildungsmaßstab (ein Längenverhältnis)
- Auflösungsvermögen (eines Gerätes, einer Methode...)

Zu jedem dieser "Bezeichnungen" gehört eine den Sachverhalt quantifizierende Zahlangabe. Überlegen Sie sich vermittels der sprachlichen Bedeutung dieser Worte worum es dabei physikalisch inhaltlich gehen wird.
