Tagebuch 12.02.07

Das Einführungskapitel weitgehend durchgesprochen. Kurz:

- Unsere Welt enthält große Bereiche, die wir gesetzmäßig beschreiben und so verstehen können
- Allerdings sind viele Versuche dazu fehlerhaft und erfolglos
  - Hierzu Beispiele (Orakelknochen, Kinesiologie,..)
  - Beschreibung allgemeiner Eigenschaften solcher Versuche, etwa
    - Unzulässige Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches
    - Unnötige Zusatzhypothesen,...
- Uns interessiert: Wie sehen die von der modernen Naturwissenschaft geprägten erfolgreichen Methoden aus?
  - Dazu Beispiele: Determinismus in der Mathematik, Datendarstellung
  - Wissenssammlung: Bau des Erdinnern!
  - ...
- Herangehensweisen - Facetten der Physik:
  - Theor. Physik - $\boxed{\text{Mit Aufgabe}}$
  - Exp. Physik - $\boxed{\text{Mit Aufgabe}}$
  - Computational physics - Billardmodell. Uns nicht zugängliches sichtbar machen.
- Hilfsmittel Mathematik und Technik
- Das Begriffssystem Größe-Änderung - Änderungsraten.
  - Es interessieren Gesetze zwischen Größen, die Grundgeseze der Natur sind eher solche für die Änderungsraten. Dazu zwei Aufgaben: Partielle Ableitung und monentane Änderungsrate!
  - Herleitung der Differentialgleichung für Absorbtion

Spezielle Konkretisierung des allgmeinen Begriffssystems:

- Größe: Das Skalarfeld s=s(x,y,z).
- Halte y und z konstant, x verändern: x$\longmapsto s(x,y,z)$
- Änderung von s wenn x von x nach Δx geht:

$$\Delta s = s(x+\Delta x, y, z) - s(x,y,z)$$

- Mittlere Änderungsrate von s, ...

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{s(x+\Delta x, y, z) - s(x,y,z)}{\Delta x}$$

- Momentane Änderungsrate mit neuer zugehöriger Bezeichnung:

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(x+\Delta x, y, z) - s(x,y,z)}{\Delta x}$$

Partielle Ableitung, erhaltbar über Ableitungsregeln!

☐ Noch stärkere Konkretisierung: s(x,y,z)=$\frac{xy}{x^2+y^4+z^2}$. Bestimme die momentane Änderungsrate von s in x-Richtung im Punkte (x$_0, y_0, z_0$) =(1,2,3).

▼ Partielle Ableitung nach x gibt: $\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{y(x^2+y^4+z^2) - xy2x...}{(x^2+y^4+z^2)^2} = ... \\ \frac{\partial s}{\partial x}(1,2,3) &= ... \quad \text{Die gesuchte momentane ÄR.} \end{aligned}$$

☐ Gegeben 5000 Lichtstrahle. Die Wahrscheinlichkeit, das auf einem Meter eines LichtstrahlesWeg ein "Fänger" sitzt sei p=0.01.

a) Wieviel Fänger sind auf einem Lichtstrahl auf 2m Länge zu erwarten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf 2m auf ein unhd demselben Strahl sogar 2 Fänger zu finden sind?

b) Wieviel Fänger findet man auf 1m bei 100 Strahlen?

c) Wieviel bei 5000 auf die Entfernung Δx?

Wir groß ist etwa der relative Fehler, den man bei den 5000 Strahlen und $\Delta x = 0.1m$ macht, wenn man die Möglichkeit der Doppelbesetzung eines Strahles vernachlässigt?

- ---

13.2

1) Oben gegebene Warmdenkübung! Mit Ratschlag *Erst das Triviale, dann ohne Ballast das Anspruchsvolle!*

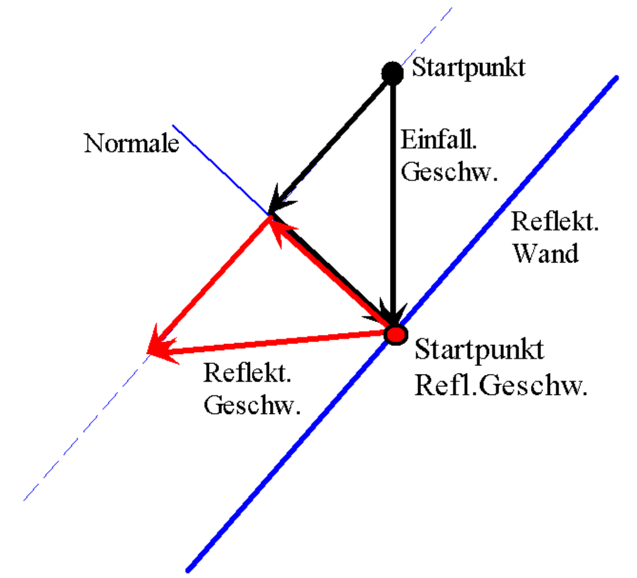
Zunehmende Konkretisierung: Das allgemeine Schema / Dann für x$\longmapsto$s(x,y,z) / Dann für obiges spezielles s und $\vec{x}_0 = ...$

2) Was ist eine realtive Zerfallsrate? Beispiel Größe n(x) / Zugehörige momentane Rate ist $\frac{dn}{dx}(x)$ /Relative momentane Rate ist dann $\frac{1}{n(x)}\frac{dn}{dx}(x)$ / Achtun wert dieser Größe an der Stelle x=a ist $\frac{1}{n(a)}\frac{dn}{dx}(a)$. D.h. das x aus dx ja nicht ersetzen!!

2) Erinnerung an die beiden häuslichen Aufgaben!

3) Computerprogramm "Zerfall der Biertröpfche. Mit diskretem unabhängigen Parameter!

3) Billard. Aus der letzten Figur eine Vektorgleichung herleiten!



Zwei vektorielle Geschwindigkeiten.
★ die des einfallenden Körpers (schwarz)
★ die des reflektierten.(rot)
Beide Pfeile als Weg aus zwei Teilen zusammensetzen! (mit unterschiedlichen Startpunkten)
Der rote Weg entsteht aus dem schwarzen durch Umkehrung des einen Teiles!
Daran den verschobenen 2. Teil anschliessen

Dazu: **Wichtiger Einschub:**

Wir haben es mit 4 Dasstellungsformen der Vektorrechnung zu tun, die alle leicht schematisch ineinander umwandelbar sind. Der Einstieg in ein Problem legt meist eine Form nahe. Bei der Lösung muss man dann in eine andere umwandeln,

1. Die Form einer geometrischen Konfiguration mit gerichteten Wegen zur Beschreibung interessierender Größen. (Die Wege führen jeweils von einem Anfangspunkt zu einem Endpunkt)

2. Die Form vektorieller Formeln die die Wege beschreiben

3. Die Form einer Konfiguration mit festgelegtem Koordinatensystem. Das führt leicht zu einer speziellen Forem von 2) oder aber zu 4)

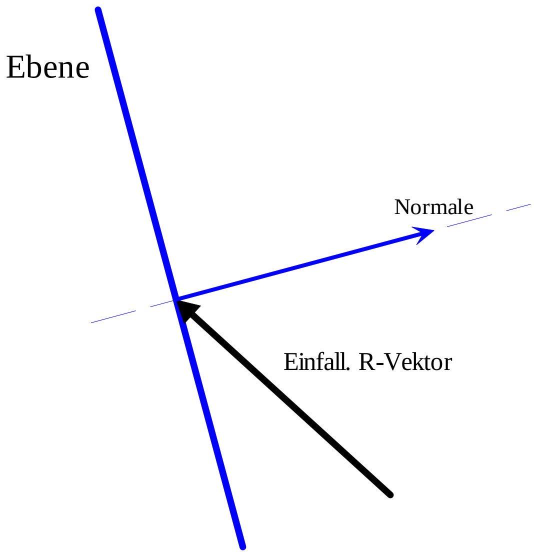
4. Die quantifizierte Form: Als Formel für die Koordinatenvektoren

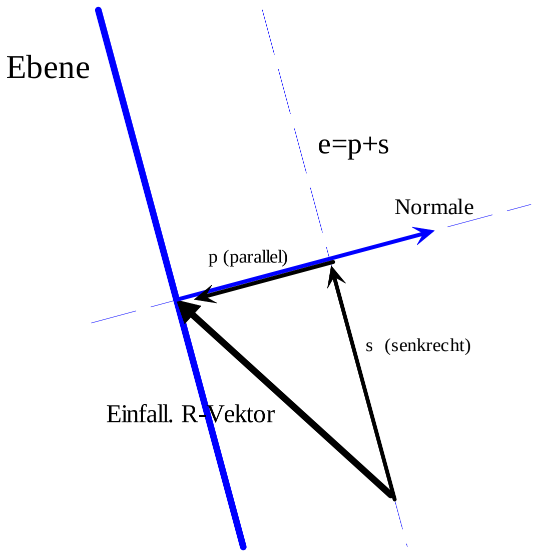
---

Zu den Koordinatensystemen: Karteische Koordinaten und Polarkoordinaten Beschreibung der zugehörigen Wegkonstruktionen

---

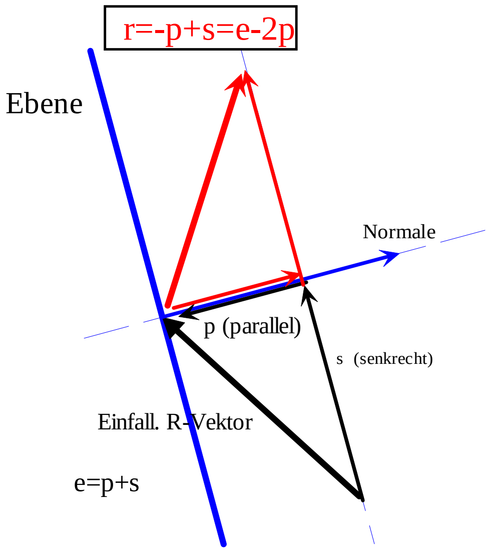
Obige Aufgaben: Man beginnt mit der vorgegebenen geometrischen Konfiguration. Gesucht ist ein Richtungsvektor des reflektierten Strahles





Im zweiten Bild der der Einfallsvektor $\vec{e}$ durch einen Weg beschrieben $\boxed{\vec{e} = \vec{p} + \vec{s}}$, wobei $\vec{p}$ parallel zur Normalen der Reflexionsebene ist. Und $\vec{s}$ ist senkrecht zu $\vec{p}$. (Man muss eine Schema haben, das die Berechnung von $\vec{p}$ gestattet. Wird später gegeben!)

Jetzt ist es leicht einen Vektor in Richtung des reflektierten Strahles geometrisch anzugeben und in eine Formel umzuwandeln:



Für den gesuchten Vektor $\vec{r}$ liest man ab:
$\vec{r} = -\vec{p} + \vec{s} = \vec{e} - 2\vec{p}$
Das ist der rote Weg.
Oder in kartesischen Koordinaten:
$\vec{r}^K = \vec{e}^K - 2\vec{p}^K$.

Weiteres Beispiel einer geometrischen Wegkonstruktion: Die Zykloide!

Methodische Mahnung: Skizzen machen

Weiters Beispiel für den Umgang mit Vektoren

Die Aufgaben zur Beschreibung von Lichtbündeln: Parallelbündel und von einem Punkt ausgehendens Bündel.

Inhaltlich wurden jetzt die Teilkapitel 2.1 bis 2.3 zur geometrischen Optik besprochen.

- Zu Beginn Inhaltsverzeichnis inspzieren und durchdenken.

  Hier: 2.1: Lichtstrahlen

  2.2 Das Reflexionsgesetz

  2.3 Einige Anwendungen der **Vektorrechnung und des Reflexionsgesetzes**

  Die **Brennpunktseigenschaft der Parabel und der Ellipse**

  Fokuspunkte

  Reflexion an der Kugel (1. Beispiel für Größenformel)

  2.4 Das Brechungsgesetz

  Formulierung

  Begründungen

  Regenbogen

  2.5 Die Linsenformel (für dünne Linsen. 2. Beispiel einer Größenformel)

  Herleitung

  Anwendungen

- "Was ist Licht?" Etwas zur Geschichte
- Beschreibung des Lichtes durch Bündel von Lichtstrahlen im Rahmen der geometrischen Optik.
- Beschreibung des Sehvorganges mit Hilfe von Lichtbündeln.
- Das Auftreten von Fokuspunkten und die Strategie ihrer Bestimmung mit Hilfe der Vektorrechnung!!
  - Zugehörige Computersimulationen
  - Brennpunkt bei der Parabel. Strategie des Nachweises.mit hilfe der Vektorrechnung. *Wichtige methodische Hilfe am Beispiel illustriert. Die eigentliche REchnung dann morgen!*
  - Reflexion an Kugeloberflächen. **Hier haben nur achsennahe Bündel näherungsweise einen Fokuspunkt. Aber dessen Lage läßt sich rechnerisch näherungsweise bestimmen (nicht vorgeführt) und das Ergebnis in einer Formel darstellen!**
- Die Formel, ihre Interpretation und Aneignung sowie die zugehörigen Koordinatenvereinbarungen. Das wurde eingehen besprochen. (2.3.17-23)

Heute mehrfach angesprochenes **methodisches Thema**. Bei einer Problembehandlung sollte man mögllichst einen strategischen Vorgehensplan entwickeln, der sich aus einzelnen bekannten Bausteinen zusammensetzt. Beispiele solcher Bausteine:

- Bestimmung eines Richtungsvektors eines reflektierten Strahles
- Parametrisierung einer Geraden (Lichtstrahl!) bez. eines Geradenbündels
- Schnittmengenbestimmung usw.

.

Jetzt einige angesprochene Aufgaben und deren Lösung

☐ (2.1.1) **Welche Eigenschaften sind (im Zusammenhang mit der Beschreibung des Verhaltens von Licht) wesentlich und voneinander weitgehend unabhängig ??? Was sollte man messend erfassen und quantifizieren?**

> **(Versuchen Sie eine Analogie zum Schall herzustellen!!!** Es kann günstig sein, die Antwort in Form von Fragen zu geben! Die Antworten sollten prüfbar sein und Erklärungen und korrekte Vorhersagen sowie technische Hilfsmittel erlauben)

▼
Mögliche Fragen:

a) Wie breitet sich Licht aus? ("Ruhendes" Licht)
b) Wie sind die Farben (des Lichtes) zu verstehen?
c) Was ist die "Stärke" oder "Intensität" des Lichtes
d) Was für **Wechselwirkungen hat das Lichtes mit Materie**?
e) Wie entsteht Licht?

▽ Zu a) **: Die Idealisiserung der Lichtausbreitung (für einen bestimmten Gültigkeitsbereich) erfolgt durch $\boxed{\textbf{"Lichtstrahlen"}}$. Die Gültigkeitsgrenzen sind zunächst vage, aber in vielen (alltäglichen) Fällen unproblematisch. Technisches Hilfsmittel zur Herstellung von Lichtstrahlen sind etwa Blenden. In homogenen Medien, (Licht, Wasser Vakuum) verlaufen die Lichtstrahlen geradlinig. Eine Ausbreitungsgeschwindigkeit ist nicht zu beobachten.**

Wichtig dagegen sind $\boxed{\text{"Lichtbündel"}}$, die von einem Punkt ausgehen. Sie werden zum Verständnis des Sehvorganges benötigt.

$\Rrightarrow$ Erforderliche **Mathematik:**

Elementare Vektorrechnung zur Beschreibung des Lichtweges von Punkt zu Punkt.

Winkel -Bogenmaß $\not\square$ Sehwinkel (einer Figur) und Öffnungswinkel des Auges.... .

▽Zu b): Mit einem Prisma (Gitter) läßt sich Licht in solches reiner Farben zerlegen und weiter durch eine Zahlangabe ("Wellenlänge") charakterisieren. Das erweist sich als Spezialfall einer elektromagnetischen Welle. Orientierung: Elektromagnetisches Spektrum Aus dem reinen Licht kann man dann durch Überlagerung beliebiges Licht zurückgewinnen (Benötigte Mathematik: Vektorrechnung und Integration / Fouriertransformation)

▽ Zu c) Lichtstrahlen enthalten Energie, die man auf unterschiedliche Weise in andere Energieformen umwandeln und in diesen anderen Formen messen kann (Photozelle).

▽ Zu d) Nach viel Erfahrung: Die Wechselwirkung ist nach Idealisierung reduzierbar auf "Reflexion (und Streuung) " / "Brechung" / "Absorbtion"

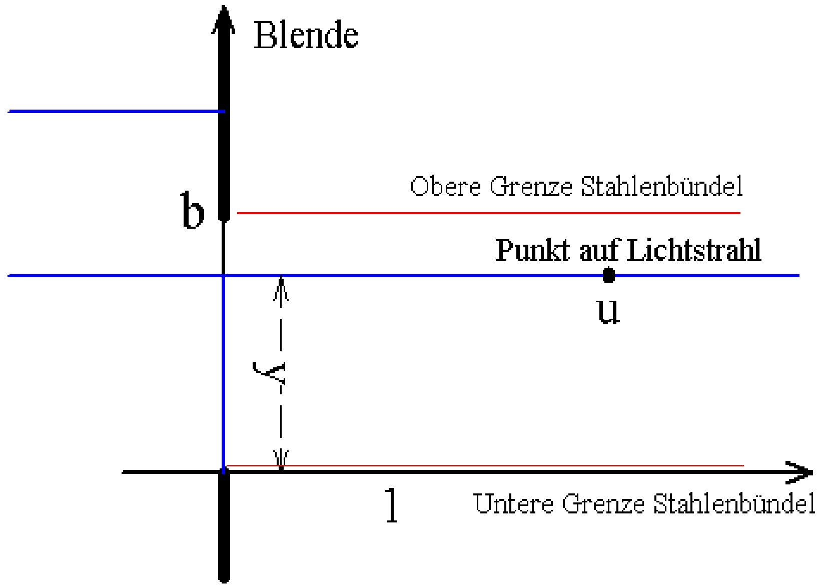
Wir behandeln nacheinander: Reflexion, Brechung und Absorbtion!

Idealisierung bei Reflexion und Brechung: Lichtstrahl trifft eine ebene Grenze zwischen zwei homogenen Stoffen. (Vektorrechnung) ▲

☐ (2.1.3) **Aufgabe zu den Lichtbündeln -** Ebenes Problem (d.h. Koordinatenvektoren mit nur 2 Komponenten):

> Durch einen Spalt (der Breite b und senkrecht zur Lichtrichtung) wird ein Bündel paralleler Lichtstrahlen ausgeblendet. Führen Sie ein günstiges Koordinatensystem ein und geben Sie eine Parametrisierung der ausgeblendeten Lichtstrahlen.

▼ Das Licht verlaufe parallel zu x-Achse. Der Spalt lieg auf der y-Achse mit $0<y<b$. Zu jedem dieser y-Werte gehört dann ein (ausgeblendeter) Lichtstrahl.



Der zu y gehörige Lichtstrahl werde mit $\vec{r}_y$ bezeichnet. Mit 0<y<b. Wir benötigen die Koordinatenvektoren aller Punkte auf diesem Strahl. Der zugehörige achsenparallele Weg ergibt sich wie folgt zu

$$\vec{r}_y^K(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

y äußerer Parameter
u freier Parameter.

♦Jede Wahl des äußeren Parameters y liefert einen zulässigen Lichtstrahl, benennt diesen.

♦ Zu festem y liefert jede Wahl des freien Parameters u einen Punkt auf dem Lichtstrahl. u>0 gibt die Punkte hinter dem Spalt!

Kommentar: Will man das Problem räumlich zu einem Spalt der Höhe H verallgmeinern, muss man die dritte Dimension hunzunehmen. Dann hat man es mit zwei äußeren Parametern zu tun.

$$\vec{r}_{y,h}^K(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ h \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ y \\ h \end{pmatrix}$$

y äußerer Parameter (0≤ $y \leq b$)
h äußerer Parameter (0≤ $h \leq H$)
u freier Parameter.

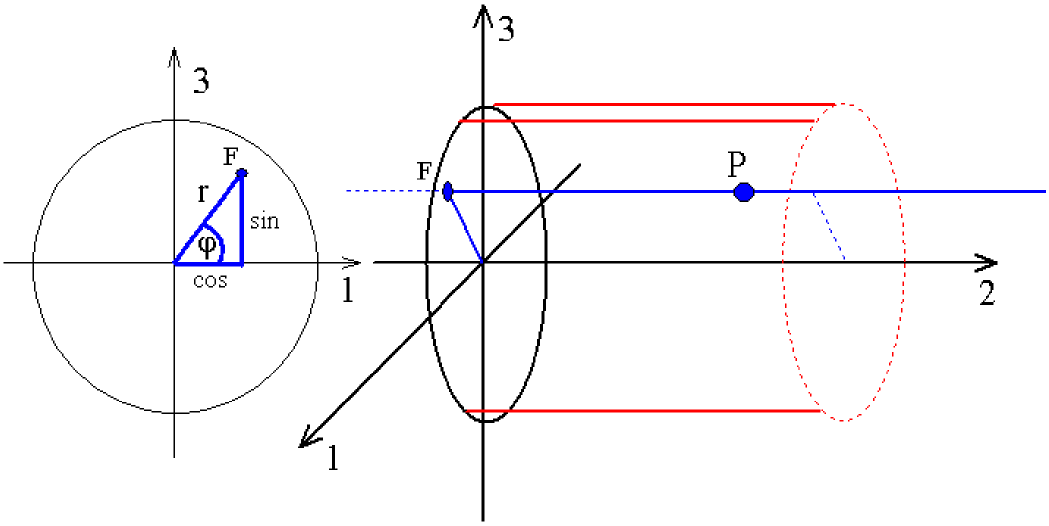
☐ **Lichtbündel -** Jetzt das nicht ebene Problem einer Kreisblende mit Radius R senkrecht zur Lichtrichtung. Erneut zusert ein Koordinatensystem. Dann die Paramwetrisierung.

▼ Das Koordinatensystem K wird. K wird so gelegt, dass die Kreisblende in der 1-2-Ebene liegt mit Mittelpunkt im Ursprung. Die Blendenpunkte selbst werden polar parametrisiert durch die Parameter r und φ mit 0≤ $r < R$ und 0≤ $\varphi < 2\pi$. Dann folgt

$$\vec{r}_{r,\varphi}^{KI}(u) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ 0 \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ u \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

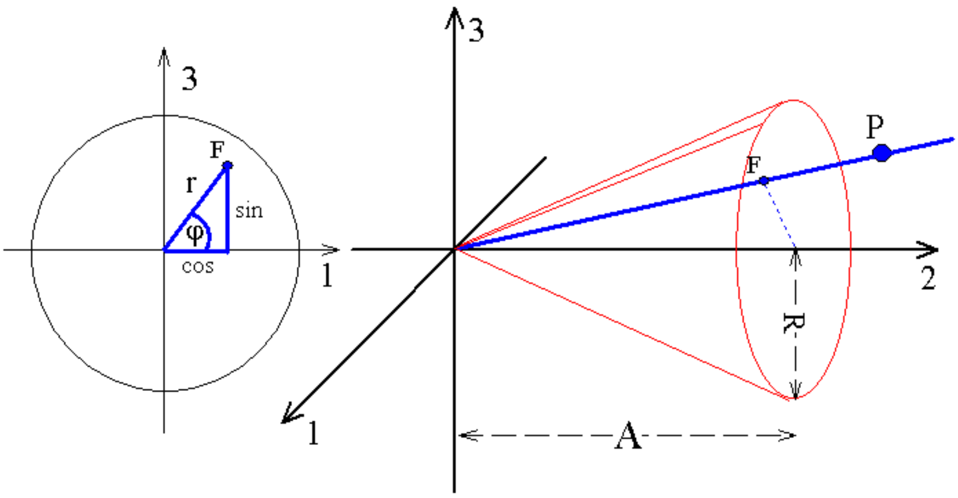
r äußerer Parameter (0≤ $r \leq R$)
φ äußerer Parameter (0≤ $\varphi \leq 2\pi$)
u freier Parameter.

Jede zulässige Wahl von (r,φ) gibt einen ausgeblendeten Strahl, dessen Punkte wieder durch $\vec{r}_{r,\varphi}$ parametrisiert werden. Die Figur zeigt den Sachverhalt mit dem Weg: *Vom Ursprung zum Punkt F und von dort zum Punkt P auf dem zugehörigen Lichtstrahl*



☐ **Lichtbündel - Punktquelle:** Parametrisieren Sie ein Strahlenbündel, das von einem Punkt Q ausgeht und das die Form eines Kreiskegels annimmt. Das Koordinatensystem werde wie folgt gelegt: Ursprung im Quellpunkt Q. Die Kegelachse sei die 2-Achse. In der Ebene y=A liefert das Lichtbündel einen Kreis vom Radius R.

▼



Der Weg auf dem Punkt P auf dem zulässigen Lichtstrahl führt vom Ursprung zum Punkt F. Dieser Vektor wird dann um einen Faktor u (unser freier Parameter) verlängert. Also

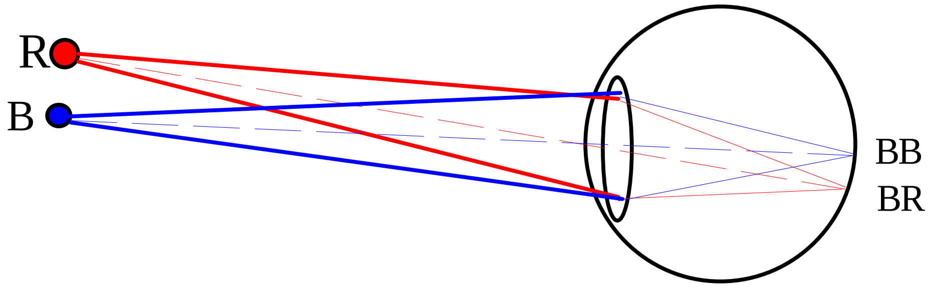
$$\vec{y}_{r\varphi}(u) = u \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ A \\ R\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uR\cos(\varphi) \\ u\,\mathrm{A} \\ uR\sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{R} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{matrix}$$

Das liefert das gesuchte Strahlenbündel!

☐ (2.1.4) Wie versteht man mit Hilfe des Lichtstrahlmodelles das " **Sehen von Gegenständen** - Vom Gegenstand bis zum Augenhintergrund?" Wieso benötigt man hierzu Lichtbündel?

▼ Vorbemerkung: Man betrachtet einen einfachen Fall: Wie sieht man einen leuchtenden Punkt? (Und denkt sich später das Gesamtbild aus derartigen Punkten zusammengesetzt!)

Dann eine Skizze! Wieso benötigt man ein ganzes Lichtbündel? Nicht nur einen einzigen Strahl? Erst das Problem bewußt machen!



Ein kleines von R ausgehendes Bündel wird durch das Auge im Punkte BR der Netzhaut fokussiert. Entsprechend der Punkt B in BR. Die Von den Quellpunkten ausgehenden Lichtbümdel unterscheiden sich in Farbe und Intensität. So entsteht ein Bild auf der Netzhaut, das dann weiter verarbeitet wird. .

Weiteres Beipiel Skript (2.3,5)

▲

☐ (2.1.5) **"Was ist Licht?"**: Erste Erfahrungen legen ein Teilchenmodell nahe

Ein Lichtstrahl besteht aus einem Schwarm kleiner Teilchen, die sich unter gewissen Umständen geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen! An Grenzlächen werden Sie reflektiert oder beeinflußt (gebrochen)

Das Modell liefert bereits große Erfolge zum Verständnis vieler Lichtphänomene sowie der optischen Instrumente und deren Konstruktion!

☐ (2.2.3) Das Teilchenmodell der Lichtstrahlen "erklärt das Gesetz" und erlaubt seine Verfeinerung im Sinne, dass weitere Umfeldphänomene mit einbezogen werden.. Wieso?

▼ Die Teilchen werden elastisch an der ideal glatt gedachten Oberfläche reflektiert. Das liefert sofort *Einfallswinkel=Ausfallswinkel.*

Ist die Oberfläche nicht ideal glatt, kann ein Teil des Teilchenstromes auch in andere Richtungen reflektiert werden. Man kann dann diffuse Reflexion erwarten und muss in geeigneter Weise die Stärke der Streuung in die andern Richtungen beschreiben. ▲

Formel $\vec{p} = \frac{(\vec{e}\vec{n})}{\vec{n}^2}\vec{n}$ zur Bestimmung der zur Normalen parallelen Komponente!

(2.2.8) *Zur **Konsolidierung** einer derartigen Formel liegen zwei Typen von Konkretisierungsaufgaben nahe: Einmal solche, die die Ergebnissformeln konkret durchgehen und dann solche (Typ vertrauensbildende Maßnahmen) bei denen man das berechnete Resultat auch geometrisch finden kann.*

Aufgaben beider Art sollte man durchaus bei Bedarf selbst erfinden!

☐ Numerisches Beispiel $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme $\vec{r} =$

Hier kommt es darauf an, das Ergebnis rechnerisch möglichst schnell zu erhalten.

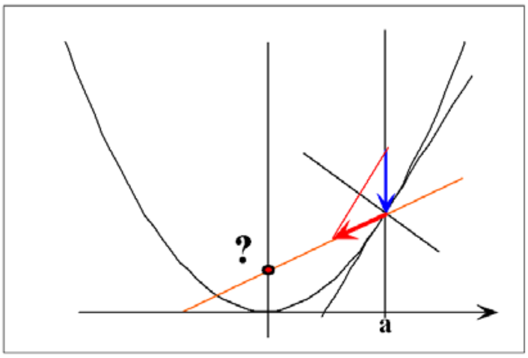
☐ Erfinden Sie jetzt ein Beispiel, für das man das Resultat selbst unmittelbar geometrisch kontrollieren kann. Also einerseits rechnen und andererseits geometrisch berstimmen.

Das beendet die Einführung der Regel selbst. Jetzt kommen Beispiele der Anwendung und Nutzung.

Hier kommt es darauf an, das Ergebnis rechnerisch möglichst schnell zu erhalten.
☐ Erfinden Sie jetzt ein Beispiel, für das man das Resultat selbst leicht geometrisch kontrollieren kann. Also einerseits rechnen und andererseits geometrisch berstimmen.

▼
▲

☐ (2.3.1) Beweisen Sie die Brennpunkteigenschaft der Parabel mit Hilfe der Vektorrechnung
Der Nachweis der Brennpunktseigenschaft der Parabel! in Aufgaben
⧫ Wir wählen die Parabel mit Gleichung $\boxed{y=\sigma x^2}$. Die Koordinaten y und x mögen dieselbe Einheit haben. Dann ist σx einheitenfrei, eine Zahl. Die Strahlen sollen parallel zur y-Achse verlaufen. Die Skizze fasst die Konfiguration zusammen. (Blau Richtungsvektor des einfallenden Strahles. Rot Richtungsvektor des reflektierten Strahles, gesucht der Schnittpunkt mit der y-Achse)



♢

Die Einfallsgerade hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt $\begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix}$ auf der Parabel. Dabei ist a äußerer Parameter. Jede Wahl von a ergibt einen Lichtweg, dessen Schnitt mit der y-Achse zu bestimmen ist!

♢

Die Richtung der Tangente an $\begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix}$ ist durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sigma a \end{pmatrix}$ gegeben. (y=σx^2, dann gilt für die Ableitung y$' = 2\sigma x$!) Die dazu senkrechte Richtung der Normalen ist durch $\boxed{\vec{n} = \begin{pmatrix} -2\sigma a \\ 1 \end{pmatrix}}$ gegeben. (Der Pfeil zeigt ins Innere der Parabel, da 1>0. Ein Nachweis, dass $\vec{n}$ senkrecht auf der Tangente steht, ist leicht mit Hilfe des Skalarproduktes zu führen!)

⧫ Jetzt kann die zu $\vec{n}$ parallele Komponente $\vec{p}$ von $\vec{e}$ bestimmt werden. Vgl das allg. Schema. Es ist

$$\vec{p} = \frac{-1}{1+4\sigma^2 a^2}\begin{pmatrix} -2\sigma a \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4\sigma^2 a^2}\begin{pmatrix} +2\sigma a \\ -1 \end{pmatrix}$$

⧫ Das gibt für den reflektierten Strahl folgenden Richtungsvektor:

$$\vec{e} - 2\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1+4\sigma^2 a^2}\begin{pmatrix} +2\sigma a \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+4a^2\sigma^2}\begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Da es nur auf die Richtung, nicht aber die Länge ankommt, können wir den Nennerfaktor $\frac{1}{1+4a^2\sigma^2}$ fortlassen und wählen als Richtungsvektor des reflektierten Strahles:

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}(\mathrm{a})=\begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix}.}$$

⧫ Das gibt als Parametrisierung der reflektierten (zum Parameter a gehörigen) Geraden:

$$\vec{x}_{r,a}(\alpha)=\begin{pmatrix} a \\ \sigma a^2 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} -4a\sigma \\ 1-4a^2\sigma^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{a}\text{-}4\alpha\sigma\mathrm{a}} \\ \sigma a^2+\alpha\left(1-4a^2\sigma^2\right) \end{pmatrix}$$

⧫ **Wo trifft der reflektierte Strahl die y-Achse?** Dazu muss der eingerahmte x-Weg den Wert Null haben (Merkmal der Punkte der y-Achse). Das bestimmt den $\alpha - Wert$ des Schnittpunktes zu

$$\alpha_S=\frac{1}{4\sigma} \qquad \text{Unabhängig von a! Gilt für alle Lichtwege}$$

Einsetzen dieses Wertes in die zweite Koordinate gibt die gesuchte y-Koordinate, aus der erneut die a-Abhängigkeit herausfällt:

$$\boxed{\mathrm{y}_S=\sigma \mathrm{a}^2+\tfrac{1}{4\sigma}\left(1-4a^2\sigma^2\right)=\tfrac{1}{4\sigma}}$$

⧫ Also: Alle (an der Parabel y=σx^2) reflektierten achsenparallelen Geraden schneiden sich in einem Brennpunkt mit Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4\sigma} \end{pmatrix}$.

In diesem Beispiel **kommt der Fokuspunkt direkt heraus. Man benötigt keine spezielle Methoden mit Infinitesimalrechnung zu seiner Bestimmung. Das ist also untypisch einfach!**

⧫ Ein Test zur Gültigkeit des Resultates: Zu y=$\frac{1}{4\sigma}$ gehört x=$\frac{1}{2\sigma}$ auf der Parabel. Für dieses x ist die Steigung 1. Und das heißt, der reflektierte Strahl verläuft horizontal durch den Brennpunkt mit der berechneten Höhe!

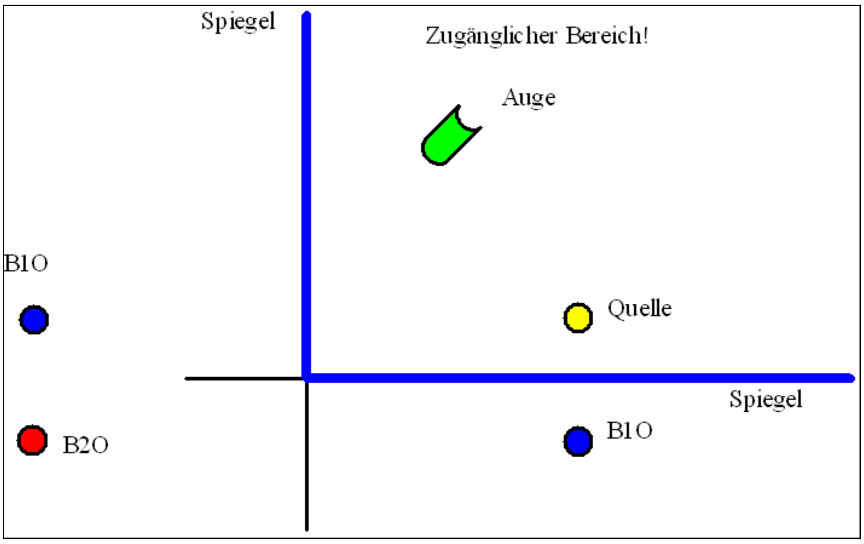
□ Änderung der Rechnung, wenn der einfallende Strahl eine andere Richtung hat.

□ (2.3.4) Wie bestimmt man die Brennpunkte einer Ellipse formelmäßig? Wie merkt man sich das?

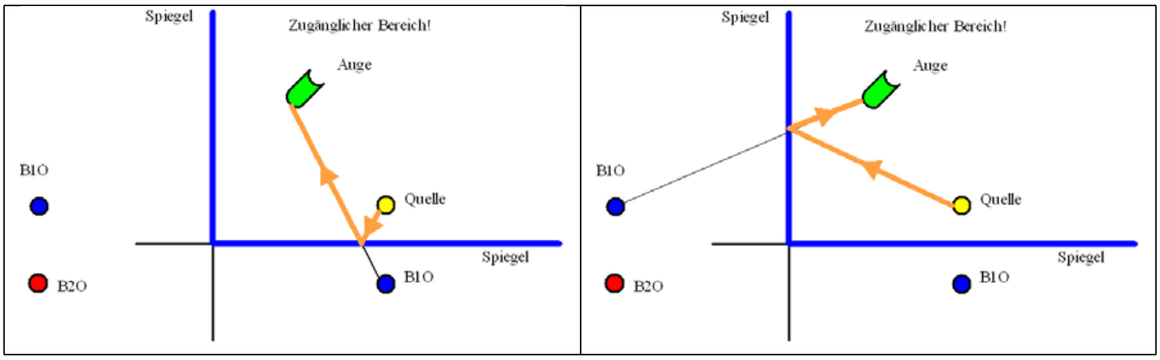
Die Brennpunkte haben einen Abstand e vom Mittelpunkt (Zentrum) der Ellipse, sie leigen *exzentrisch.* Es gilt die Gleichung a^2 $= e^2 + b^2$, wenn a die große und b die kleine Halbachse ist. Das läßt sich leicht graphisch darstellen und merken!

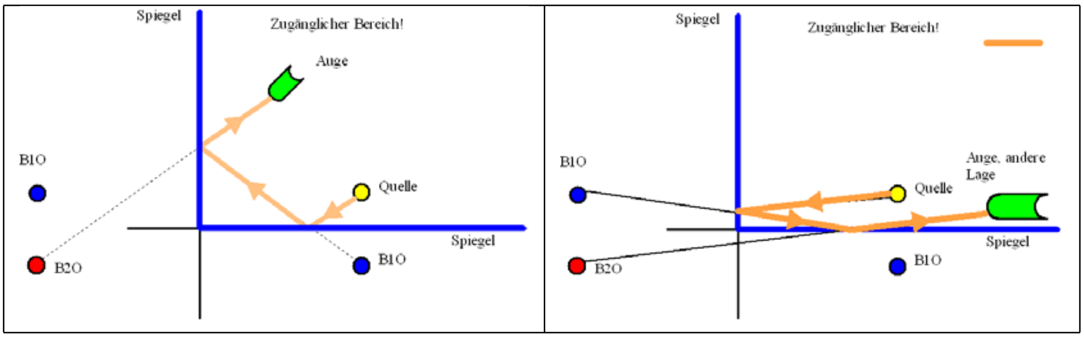
□ Gegeben zwei Spiegel, die einen rechten Winkel miteinander bilden. Dazwischen eine Lichtquelle, eine "Kerze". Sie, als Beobachter befinden sich auch in diesem Bereich. Wieviel Spiegelbilder der Kerze sehen Sie? Skizzieren Sie die zugehörigen tatsächlichen Lichtwege sowie deren virtuelle Verländerungen von der Quelle zum Auge

▼ Bei dieser Lage der beiden Spiegel gibt es 3 Spiegelbilder, wie die erste Figur zeigt. Zwei davon entstehen durch Spiegelung der Kerze an nur einem Spiegel.



Jetzt zeichnen wir einen Lichtweg von der Qelle zum Auge ein, derart dass die Verlängerung des aufs Auge treffenden Bündels sich im virtuellen Spiegelpunkt trifft. Im Fall des vierten Punktes, der zwei Spiegelungen erfordert, sind noch zwei unterschiedliche Augenpositionen eingezeichnet.





:

☐ (2.3.10) Wie rechnet man derartige Mehrfachspiegelungsprobleme vektoriell? Beschreiben Sie die **Strategie**. Was für Leistungen muss die Vektorrechnung erbringen?

▼

⧫ (a) Der Punkt sei vektoriell durch seinen Ortsvektor gegeben. Bezeichnung.$\vec{x}_P$.

⧫ (b) Weiter benötigt man einen Punkt $\vec{a}$ der reflektierenden Ebene.

♦ (c) Bilde den Differenzvektor $\vec{D} = \vec{x}_P - \vec{a}$.

♦ (d) Zerlege $\vec{d}$ in zur Ebene parallele und senkrechte Komponente (!!! Benötigt Parametrisierung der Ebene)

♦ (e) Die senkrechte Komponente $\vec{s}$ gibt den Lotvektor von P auf die Ebene! (Achtung Richtung)

♦ (f) Dann ist (nach dem Wegkonzept) $\boxed{\vec{x}_R = \vec{x}_P - 2\vec{s}}$. Usw.

14.2.2007

1) Morgen in F.13.11

Eigenständige Übungen:

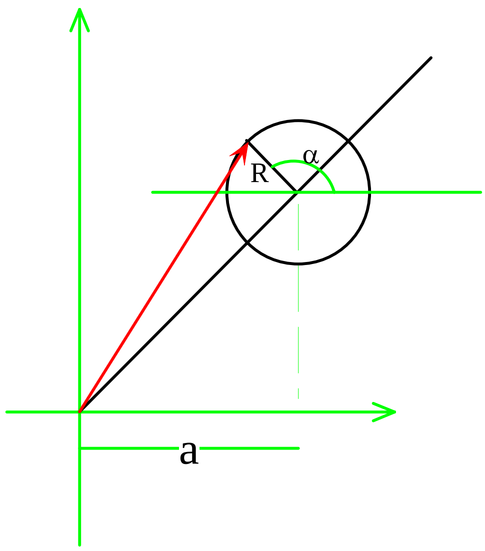
2) Rekonstruktion von 3 besonders wichtigen Formeln des gestrigen Tages

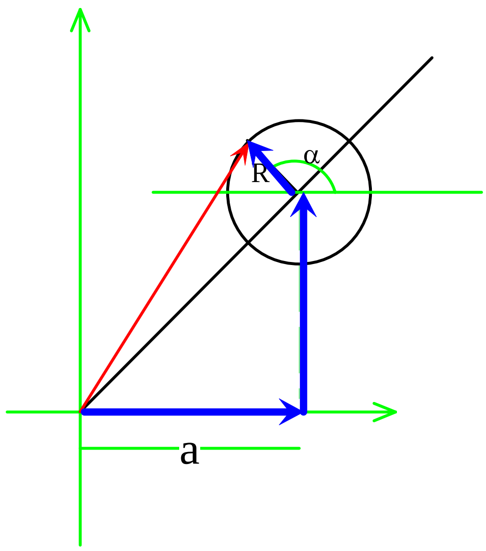
- ..
$$\vec{r} = \vec{e} - 2\vec{p} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \frac{(\vec{e}\cdot\vec{n})}{\vec{n}^2}\vec{n} \quad \text{Rictungsvektor refl. Strahl}$$

-
$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}$$

- 3) Mehrere Zugänge zur Vektorrechnung wie gestern besprochen:
- Über eine geometrische Konfiguration mit Gerichteten Wegen
- Über eine vektorielle Formel
- Über eine geometrische Konifuration mit zugehörigem Koordinatensystem
- Über eine Koordinatenvektorformel

Beispiel:





Links die geometrische Konfiguration mit Koordinatensystem. Gesucht ist der rot gezeichnete Ortsvektor. Wir bezeichnen ihn mit $\vec{r}(\alpha, a)$.

Daraus können wir entweder eine Vektorformel oder eine Koordinatentupelformel machen. Die Wegdarstellung ist rechts zu finden. Jedes Wegstück ist direkt als Vektorsummand interpretierbar: $\vec{r}(\alpha, a) = a\vec{e}_1 + a\vec{e}_2 + R \cdot \vec{e}_r(\alpha) = A(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + R(\vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_2 \sin\alpha)$

$$\vec{r}(\alpha, a) = (A + R\cos\alpha)\vec{e}_1 + (A + R\sin\alpha)\vec{e}_2$$

.

4) Strategie zur Brennpunktbestimmung bei der Parabel : *Ein Haupthema heute: Formulierung der Strategie beim Lösen einer Gleichung - Aufbrechen in definierte und bekannte Einzelleistunghen .* Wir gingen von der zur Aufgabe gehörenden Skizze aus und formulierten die Schritte. Dann Durgehen der Lösung. Tagebuch vom Vortag!

4a) Ausführung

Nach der Pause: Die Katzenaugenaufgabe: Problem formulieren

Dreifache Anwendung der Bestimmung von $\vec{r}$ aus $\vec{e}$ und $\vec{n}$.

Im Optikkapitel:

- Brechungsgesetz eingeführt. Dazu "Aneignung einer Formel" diskutiert
- Begründung des Brechungsgesetzes (Partikelzugang und Fermat, nicht Welle)
- Erste Anwendungen: **Tiefe des Wasserbeckens** und **Regenbogen** (Dort das Bild des Skriptums hergenommen, den Lichtweg vom Auge zur Sonne verfolgt und daraus das Konzept entwickelt!)
- Prisma! War z.T. nicht bekannt / Applet gezeigt:

□ Aufgabe zum Brechungsgesetz, die jeder können sollte:

Was ist der "Ablenkwinkel?" Machen Sie eine Skizze, die das zeigt und stellen Sie eine Formel für diesen Winkel auf.

15.2

Heute das Kapitel über Optik beendet. Beim Vorgehen gewisse Punkte gegenüber dem Skript hervorgehoben:

- Wie erhält man aus den beiden Grundregeln "Reflexionsgestz" und "Brechungsgesetz" Folgerungen, sei es in Form einer Erklärung eines Phänomens (Regenbogen), sei es in Form einer Anwendungsformel, wie der Linsengleichung**.**
- Und wie wendet man erhaltene Resultate auf neue Probleme an. Dazu müssen wichtige Resultate verstanden und im Kopf verfügbar sein. Das Einstiegsbeispiel und die dabei erforderliche Nutzung des Brechungsgesetzes zeigte das..
- Viele Beispiele zur Linsneformel, immer mit Blickrichtung: Das Beispiel soll das Verständnis der Formel fördern. Dazu Animation. .

Zum Warmdenken
a) Formelrekonstruktion Brechungsgesetz mit Skizze
b) Was versteht man unter einem *Fokuspunkt* ? Unterschied zum *Brennpunkt*

Einstiegsübung

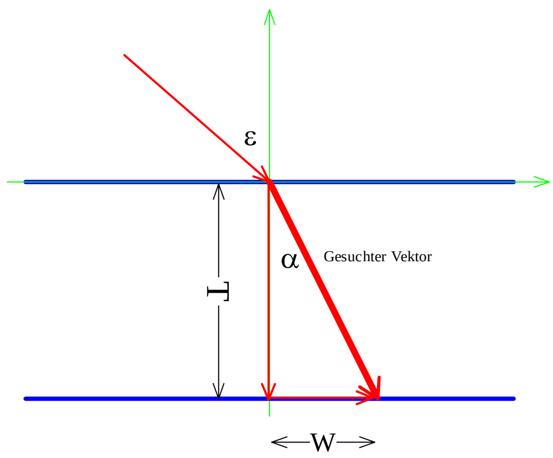
Ein Lichtstrahl trifft unter einem Einfallswinkel ε auf ein Wasserbecken der Tiefe T. Wo trifft der Lichtstrahl den Beckenboden? Und was für ein Unterschied ergibt sich, wenn einmal blaues und einmal rote Licht genommen wird für $\varepsilon = 1$ und T=1m?

Zum Vorgehen:

1. Einstieg: **Skizze der Konfiguration mit Koordinatensystem**. Dessen Ursprung in den Auftreffpunkt des Lichtes auf der Wasseroberfläche legen.
2. Was wird gesucht? Als **Wegkonstruktion**, benötigte Bezeichnungen ergänzen
3. Wie erhält man die fehlenden Größen für den ersten Teil der Aufgabe?
   (a) Allg.Formel für den ersten Teil der Aufgabe angeben.
4. Welche Zahlwerte werden zusätzlich für den zweiten Teil der Aufgabe benötigt? Wo würden Sie diese suchen?
   (a) Formel für die gesuchte Größe aufstellen, Antwort durch Werteinsetzen berechnen.

Mit diesen Hinweisen und etwas Anschub bei Bedarf war die Augfgabe zu lösen und das klappte vielfach auch.

Die skizze sollte etwa so aussehen:



Der gesuchte Vektor des Auftreffpunktes ist $\vec{r}^K = \begin{pmatrix} W \\ -T \end{pmatrix}$. W ist gesucht. Es folgt $\boxed{\text{W=T}\cdot\tan(\alpha)}$ und über das Brechungsgesetz $\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{n}\sin(\varepsilon))$.

Die gesuchten Zahlwerte findet man im Skript im Bereich der Regenbogenbesprechung. Die Formeln verlangen folgende Berechnungen:

$\mathrm{n}_{rot} = 1.33$	$\alpha_{rot} = \arcsin(\frac{1}{1.33}\sin(1)) = 0.685\,02$	$\tan 0.685\,02 = 0.817\,00$	
$\mathrm{n}_{blau} = 1.34$	$\alpha_{blau} = \arcsin(\frac{1}{1.34}\sin(1)) = 0.678\,93$	$\tan 0.678\,93 = 0.806\,89$	

Also mit $\Delta W = T(\tan\alpha_{rot} - \tan\alpha_{blau}$

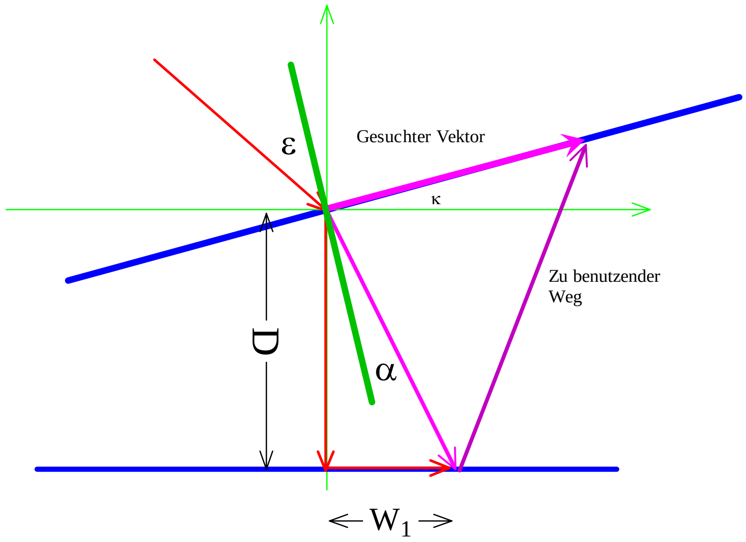
$$\boxed{\Delta W \approx 0.01 m = 1 cm}$$

Man findet einen Unterschied von etwa 1cm.

Diese Aufgabe wurde jetzt modifiziert:
Man hat eine ebene Glasplatte der Dicke D auf die ein Lichtstrahl einfällt (Einfallswinkel ε) Der Strahl wird in die Platte hinein gebrochen, dann am boden der Platte reflektiert und oben wieder hinausgebrochen. **Wie weit sind Eintrittsort und Austrittsort vonein ader entfernt?**

▼Skizze und dann sieht man, dass man das Resultat der vorigen Aufgabe verwenden kann, um sofort das Resultat anzugeben!▲

Dann: Was ist, wenn die Platte keilförmig ist? mit Keilwinkel κ?
Die Skizze sollte etwa wie folgt aussehen (Auch eine anderes Koordinatensystem liegt nahe!):



Der gesuchte Vektor läßt sich jetzt über dem angegbenen Weg bestimmen. Alle Schritte gehören zu besprochenen Aufgaben.. :

- Zum Vertrautmachen mit der Linsenformel wurden praktisch alle FRagen aus (2.6.8) besprochen
- Wichtig die graphische Konstruktion des Bildpunktes aus (2.6.7) mit Hilfe von zwei Lichtwegen!
- Dann wurde die Herleitung der Linsenformel abgeändert für den Fall, dass rechts neben der Linse ein Material mit Brechungsindesc n_G ist. (Auge)

Das verlangt folgende Rollenzuweisung für die Formelgrößen: (Selbst eine Skizze anfertigen!)

n_1	n_2	g	b	r	Allgemein	$\frac{n_1}{g}+\frac{n_2}{b}=\frac{n_2-n_1}{r}$
1	n	g	b_1	r_1	1. Grenze	
n	n_G	$-b_1$	b	$-r_2$	2. Grenze	

Anwenden der Formel auf die beiden Fälle gibt zwei Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} + \boxed{\tfrac{n}{b_1}} &= \frac{n-1}{r_1} \\ \boxed{\tfrac{n}{-b_1}} + \frac{n_G}{b} &= \frac{n_G - n}{-r_2} \end{aligned}$$

Die Größe b_1, die zum Zwischenbereich gehört, muss herausgeworfen werden! Addieren gibt die gesuchte **Linsenformel:**

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{-n_G + n}{r_2} = \frac{1}{r_1}(n-1) + \frac{1}{r_2}(n - n_G)$$

:und

$$\boxed{\tfrac{1}{g} + \tfrac{n_G}{b} = \tfrac{1}{f}} \qquad \boxed{\tfrac{1}{f} = \tfrac{1}{r_1}(n-1) + \tfrac{1}{r_2}(n - n_G)}.$$

Daraus folgt, das jetzt linke und rechte Brennweite verschiedene Werte haben. Aber es gibt immer noch zwei Brennpunkte und die graphische Konstruktion der Bildpunkte.(außßerhalb der Achse) ist weiter möglich!

Es wurde ein numerisches Beispiel einer bikonvexen Linse gerechnet (g, $r_1 = -R_1$ und $r_2 = -R_2$ sowie n gegeben. b war zu bestimmen.
