

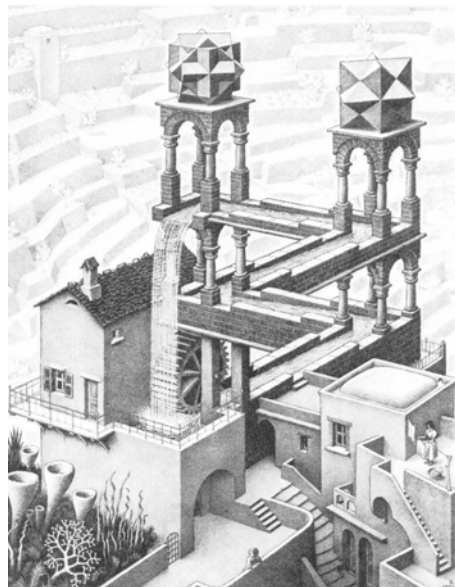
# Gleichstromkreise

Vom einfachen Modell zu anspruchsvollen Fragen

- a) Eine Modellbetrachtung zum Verständnis von Stromstärke und Spannung
  - b) Ein einfaches Grundgesetz mit zugehörigen Regeln: Das Ohmsche Gesetz
  - c) Die Vielfalt der so folgenden determinierten Sachverhalte
  - d) Textinterpretation und Problematik Regel-Beispiel
- 

- Stromstärke (in einem Leitungsquerschnitt) - Modellinterpretation: Flüssigkeitsmenge, die pro Sekunde den Querschnitt passiert. Konstant, solange keine Flüssigkeit verloren geht, hinzukommt oder eine Verzweigung auftritt.
- Spannung (zwischen zwei Leitungspunkten) - Modellinterpretation: Höhenunterschied im Wasserlauf zwischen den zwei Punkten.

Ein " unphysikalischer Stromkreis"

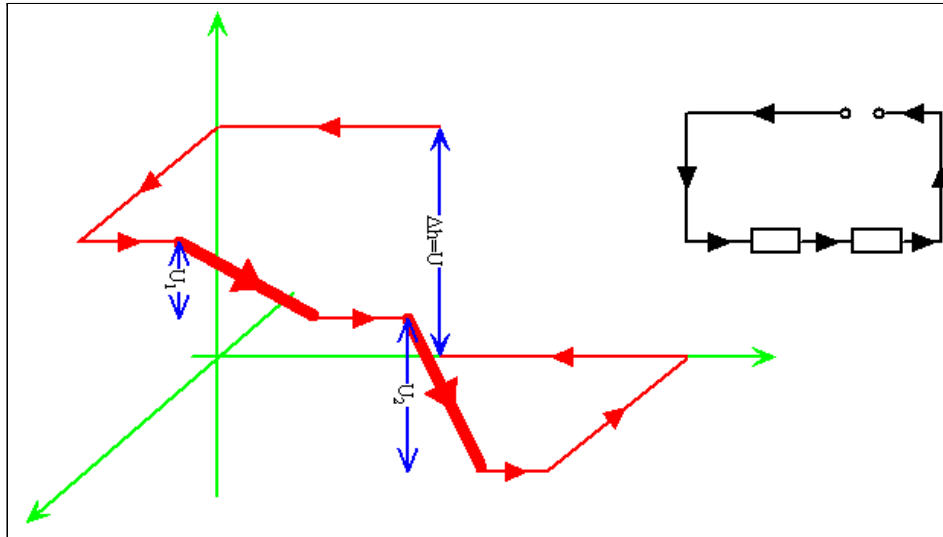


Atomistische Interpretation:

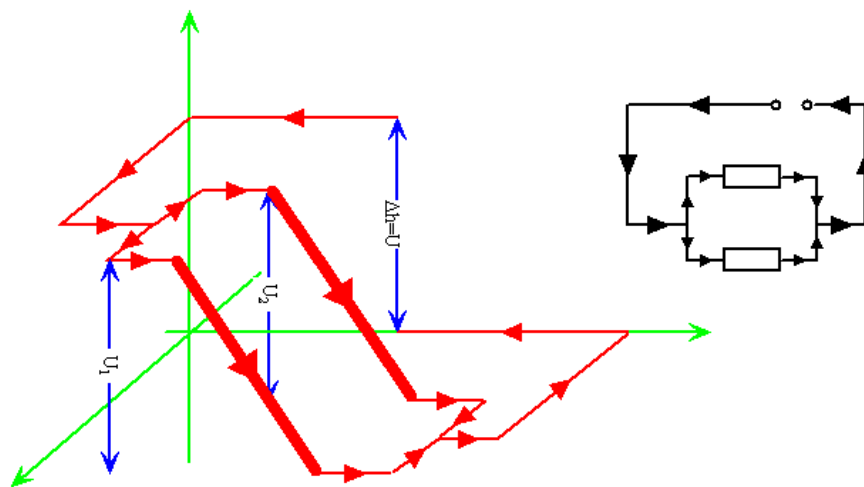
- **Stromstärke** ist die pro Zeiteinheit den Querschnitt passierende Elektrizitätsmenge
- **Spannung**: Die an einer Masse, die von im Schwerefeld von A nach B transportiert wird, zu leistende Arbeit ist proportional zum Höhenunterschied der beiden Punkte! **Entsprechend ist die Arbeit, die man an einer elektrischen Ladung leisten muss, um sie von A nach B zu transportieren, proportional zur Potentialdifferenz und das ist die Spannung!**

Modellinterpretation der beiden Grundstromkreise:

Die Reihenschaltung:



Die Parallelschaltung:



- Die Ausgestaltung der jeweiligen Gefällestrecke bzw. Röhre bestimmt die Beziehung zwischen Stromstärke und Höhendifferenz (Spannung). Im elektrischen Fall wird diese Beziehung gegeben durch das Ohmsche Gesetz:

$$\boxed{I = \frac{1}{R} U}$$

Eine angel. Spannung  $U$  bewirkt einen Strom der Stärke  $I$   
 $R$  eine Konfigurationskonstante. Genauer:  $\square$ ..

Diese Beziehung wird experimentell bestätigt!

$\square$  Die Spannung sei an einem homogenen Draht der Länge  $L$  und mit Querschnitt  $A$  angelegt. Was ist dann für  $R$  zu erwarten? Wie sollte die physikalische Analyse in Bezug auf  $R$  weitergehen?

- 

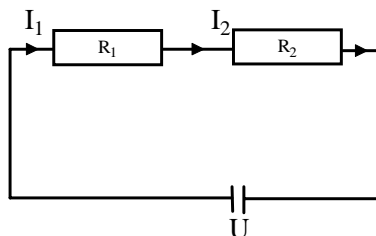
Zum Zweck der gedanklichen Verarbeitung arbeitet man mit *idealisierten Schaltungen*. Für diese leitet man die Vielzahl der Folgerungen her, die man dann mit der REalität vergleicht.:

- Eine solche idealisierte Schaltung besteht aus verlustfreien Leitungen und in einzelnen Widerständen lokalisierten Verluste. Über jedem Widerstand gilt das Ohmsche Gesetz mit zugehörigem spezifischen R-Wert. .
- Diese Bestandteile werden situationspezifisch (irgendwie sinnvoll) zusammengeschaltet
- Eine Spannung wird eingebaut
- Das verursacht (determiniert) in jeder Leitung einen ganz bestimmten Stromfluss - zusammenfassbar in einem Stromvektor  $\vec{I}$ .
- Darstellung in einer **Schaltskizze**
- Die beiden Kirchhoffschen Regeln:  $\square$  ...*Formulierung*....
- Was ist daher alles in einer solchen Schaltung messbar?
- Zielperspektive
  - Erfahrung sagt:  $\vec{I}$  ist eindeutig bestimmt durch die ideale Konfiguration..
  - Problem: **Vorhersage von  $\vec{I}$**  mit Hilfe der Konfiguration.

- Anwendung der Kirchhoffschen Regeln gibt lineares **Gleichungssystem für  $\vec{I}$**  U gehört zum Inhomogenitätsvektor.
- **Behandlung und Lösung** in der Mathematik . Resultat: Tatsächlich immer eindeutig lösbar! Formal: **Lösungsvektor  $\vec{I}$**  (Mathematisch berechnet und parallel physik. determiniert)

**Dieses einfache Konzept - also hauptsächlich die beiden Kirchhoffschen Regeln - bestimmen, determinieren jetzt eine unglaubliche Vielzahl nachprüfbarer Sachverhalte. Zunächst einmal für jede einzelne Schaltung und dann für die Vielzahl möglicher Schaltungen.**

Die erste Grundschaltung: **Reihenschaltung von Widerständen :**



$$\underbrace{R_1 I_1}_{H_1} + \underbrace{R_2 I_2}_{H_2} = U$$

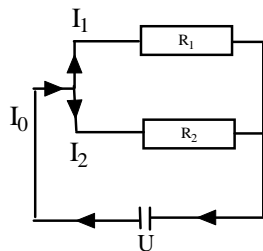
$$I_1 = I_2$$

$(R_1 + R_2)I_1 = U$
$R = R_1 + R_2$
$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2}$

$$\vec{I} = \frac{1}{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

$$R_{Gesamt} = R_1 + R_2$$

Die zweite Grundschaltung: **Parallelschaltung von Widerständen**



$I_0 - I_1 - I_2 = 0$
$R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$
$R_1 I_1 = U$

$I_1 = \frac{U}{R_1}$
$I_2 = \frac{U}{R_2}$
$I_0 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U$

Die Lösung erfolgt über Inspektion. (Ende der Elimination, Rückeinsetzen)  
 Aus dem Resultat abstrahiert man (rekursiv) die übliche  
 Regel für Parallelschaltung von Widerständen!

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_2} \end{pmatrix} U \quad R_{Gesamt} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{R_{Gesamt}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

□  $I_0 = 3A, I_2 = 1A, U = 100V$  Wie groß sind  $R_1, R_2$ ?

### 3. Beispiel!

Das Gleichungssystem lautet:

$$\begin{bmatrix} I_1 & -I_2 & -I_3 & = 0 \\ R_1 I_1 & +R_2 I_2 & +0 & = U \\ R_1 I_1 & +0 & +R_3 I_3 & = U \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3(1)+(3) \\ (2) \\ I_3 \text{ raus} \end{array}$$

□ Wie sieht die Schaltskizze aus?  
 Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} (R_3 + R_1)I_1 & -R_3 I_2 & = U \\ R_1 I_1 & +R_2 I_2 & = U \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2(1) + R_3(2) \\ \end{array}$$

$$[(R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3) I_1 = (R_2 + R_3)U]$$

Rückeinsetzen

$$I_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3 + R_1 (R_2 + R_3)} U = \frac{1}{\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right)} U$$

$$R_2 I_2 = U - R_1 \frac{U}{\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right)} = U - R_1 \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$= U \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \frac{U}{R_2} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} U$$

$$I_3 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} U$$

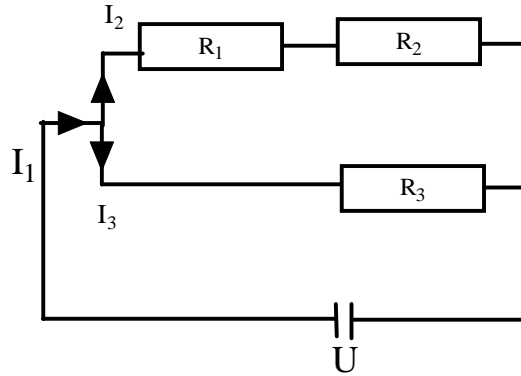
$$I_2 = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} U \quad I_3 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} U$$

Vektoriell geschriebenes Resultat:

$$\vec{I} = \frac{U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \begin{pmatrix} R_2 + R_3 \\ R_3 \\ R_2 \end{pmatrix} = U \cdot \frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \begin{pmatrix} R_2 + R_3 \\ R_3 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

□ Was ist hier  $R_{Gesamt}$ ??

4. Beispiel



$$\begin{bmatrix} I_1 & -I_2 & -I_3 & = & 0 \\ & +0 & +R_3 I_3 & = & U \\ 0 & +(R_1 + R_2)I_2 & +0 & = & U \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \frac{1}{R_3} U \quad I_2 = \frac{1}{R_1 + R_2} U$$

$$I_1 = \left( +\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3(R_1 + R_2)} U$$

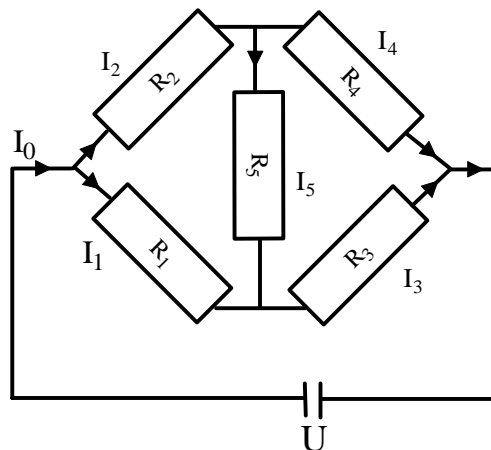
$$\vec{I} = \frac{1}{R_3(R_1 + R_2)} \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 \\ R_3 \\ R_1 + R_2 \end{pmatrix} U$$

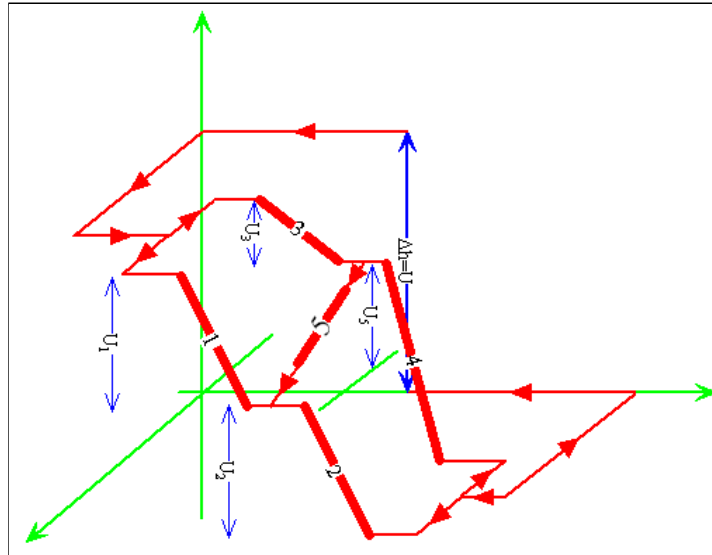
Benötigt wird vielfach nur ein Teil  $R_{Gesamt} I_1 = U$

$$R_{Gesamt} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Tests?  $R_3 = 0 / R_1 = \infty \quad R_1 + R_2 = 0 \dots Z_1 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}$

5. Beispiel: Die Wheatstonesche Brücke





Ein  $6 \times 6$ -Satz möglicher Gleichungen lautet: (3mal 1. Kirchh. u. 3mal 2. Kirchh)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 I_0 & -I_1 & -I_2 & 0 & & = 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & I_2 R_2 & & +I_4 R_4 & = U & 0 & 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 \\
 & I_1 R_1 & & +I_3 R_3 & & = U & 0 & R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\
 & & I_2 & & -I_4 & -I_5 & = 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
 -I_0 & -I_1 R_1 & I_2 R_2 & & & +I_5 R_5 & = 0 & 0 & -R_1 & R_2 & 0 & 0 & R_5 \\
 & & & I_3 & +I_4 & & = 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
 \end{array}$$

Gibt als Lösung:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \frac{U}{\text{Det}} \begin{pmatrix} R_5 R_2 + R_3 R_2 + R_4 R_2 + R_5 R_4 + R_5 R_3 + R_5 R_1 + R_3 R_1 + R_4 R_1 \\ R_5 R_2 + R_3 R_2 + R_4 R_2 + R_5 R_4 \\ R_5 R_3 + R_5 R_1 + R_3 R_1 + R_4 R_1 \\ R_5 R_2 + R_4 R_2 + R_5 R_4 + R_4 R_1 \\ R_3 R_2 + R_5 R_3 + R_5 R_1 + R_3 R_1 \\ R_1 R_4 - R_2 R_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_4 R_5 + R_1 R_2 R_5 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3$$

• Weiterverarbeitung:

- Spannungsabfälle, Leistung, "Ohmsches Gesetz"-  $R_{\text{Gesamt}}$ -Bestimmung
- Kurzschluss / Sperrfall
- **Vereinfachte Regeln zur Bestimmung** von  $R_{\text{Gesamt}}$  für rekursiv aus Parallel- und Reihenschaltung aufbaubare Schaltungen
- Experimentelle Prüfung
- Technische Anwendungen
- Verallgemeinerungen

### Weiterführende Fragen:

- Wieviel unterschiedliche Schaltungen gibt es zu vorgegebener Anzahl von Widerständen?
- Wieviel davon kann man rekursiv durch Parallel- und Reihenschaltung aufbauene

---

---

---