Absorbtionsprozesse

Herleitung einer Formel für eine Größenänderung über eine Modellbetrachtung

Aus dem **Begriffssystem *Größe* wird Änderung, Änderungsrate und relative Änderungsrate benötigt.**

---

(1) Wir betrachten ein Phänomens, das zum Stichwort "Wechselwirkung von Licht mit Materie" gehört, die **"Absorbtion (von Licht)".**

Geht Licht durch homogene Materie hindurch, dann wird es abgeschwächt, verliert beim Durchgang an Stärke.

Was benötigt man zur Beschreibung dieses Phänomens? Zunächst einmal eine Größe, die die Stärke, die **Intensität** des jeweiligen Lichts quantitativ angibt. Nehmen wir an, wir hätten etwas derartiges etwa in Form einer Energiedichte.

Wie üblich legen wir ein geeignetes Koordinatensystem, hier mit einer x-Achse in Richtung der betrachteten Lichtstrahlen. Dann interessiert uns I(x), die Abhängigkeit der Intensität in x-Richtung, sagen wir vom Koordinatenort $x_0 = 0$ an. Dort herrsche die Lichtintensität I_0. Wie sieht dann I(x) aus, für x>0. Oder auch: **Es ist eine Beziehung gesucht zwischen den beiden Größen I und x.**

(1a) **Im Teilchenmodell des Lichtes sollte die Absorbtion Lichtintensität der Teilchenzahl proportional sein. Wir wollen die Absorbtion in diesem Modell diskutieren.**

(1b) Wir werden sehen: Die einfache, grundlegende Gesetzmäßigkeit ist hier keine zwischen den Größen I und x selbst, sondern eine für deren Änderung $I'(x)$. Also eine Gesetzmäßigkeit für die momentane Äderungsrate.

---

(2) Ein **Modell für den Absorbtionsprozess:**

- ⧫ Wir haben für unsere Lichtstrahlen N Bahnen der (großen) Länge L.
- ⧫ Die Koordinate der Lichtrichtung werde mit x bezeichnet wobei 0<x<L.
- ⧫ Auf diesen Bahnen sind zufällig Absorbtionszentren ("Fänger") verteilt. (Genauer mit einer Wahrscheinlichkeit "p Zentren pro Längeneinheit". Oder: Auf die N Bahnen sind im Mittel N·p Zentren pro Längeneinheit zufällig verteilt. Auf 2 Meter wird man durchschnittlich 2NP Zentren finden. Usw.)

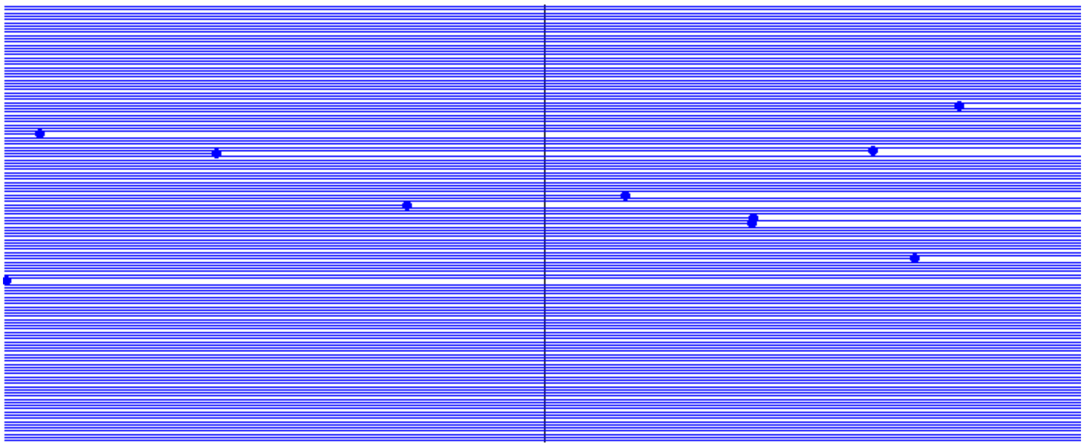
(3) Wir gehen jetzt bis zur Koordinate $x=x_0$. Dort seien noch $\boxed{n(x_0)}$ Lichtstrahlen vorhanden. (Bezeichnung!). Der Rest ist bereits weggefangen, "absorbiert". Etwas weiter bei $x_0+\Delta x$ sind es noch $n(x_0 + \Delta x)$. Die exakte Änderung ist $\Delta n = n(x_0 + \Delta x) - n(x_0)$. Nur: Wir kennen die Funktion, den Rechenausdruck n(x) leider nicht. Aber wir können inhaltlich wie folgt argumentieren:

(4) Wir wählen die Koordinatenänderung Δx, so klein, dass $p{\cdot}\Delta x$ eine Zahl sehr viel kleiner als 1. ist. Dann ist es ausgesprochen (vernachlässigbar!) selten, dass man innerhalb von Δx zufällig auf ein und derselben Bahn 2 oder mehr Absorbtionszentren vorfindet. (Denn in so einem Fall ist der zweite Fänger unwirksam!) Ist $p\Delta x = \frac{1}{100}$, so ist die Wahrscheinlichkeit auf derselben Bahn 2 Zentren zu finden $(p\Delta x)^2 = \frac{1}{10000}$.

Und das bedeutet, dass die **Änderung** $\Delta n = n(x + \Delta x) - n(x)$ von n, also die Zahl der im betrachteten Bereich absorbierten Lichtstrahlen, gleich $\boxed{p\Delta x \cdot n(x)}$ ist. **Denn jeder Fänger wird den Lichtstrahl seiner Bahn beseitigen, sofern der Strahl zu Beginn der Teststrecke noch vorhanden ist**. $p\Delta x \cdot n(x)$ ist die Zahl der Fänger auf bei x noch mit einem Lichtstrahl bestzten Bahnen. Vor ihm steht im Bereich zwischen $x_0+\Delta x$ und x kein anderer Fänger.

(5) Die Figur zeigt für etwa $n(x_0)$ =100 Bahnen ein Teilstück und einige zufällig darauf verteilte Absorbtionszentren. Überdies sind die Bahnen in der Mitte unterteilt. Im Mittel und bei sehr vielen Bahnen wird es auf beiden Teilstücken gleichviel noch wirksame Absorbtionzentren geben.In dem Bild sind links 4 und

rechts 6 Absorber zu sehen. Bei - sagen wir 1 Million Bahnen - würden wir ein Verhältnis finden, das viel näher bei 1 liegt.



---

(6) Damit haben wir **inhaltlich** begründet dass in diesem Modell die Abnahme (=Änderung mit negativem Vorzeichen) der Teilchenzahl wie folgt aussieht:

$$\boxed{\Delta n = -p \cdot n(x)\Delta x} \quad \text{Oder} \quad \boxed{\frac{\Delta n}{\Delta x} = -pn(x)}.$$

Im Grenzwert $\Delta x \to 0$ führt das zu der Differentialgleichung

$$\boxed{\dot{n}(x) = -pn(x)} \quad \text{Andere Schreibweise} \quad \boxed{\frac{dn}{dx}(x) = -pn(x)}$$

Die momentane Äderungsrate von n ist propotional zu n selbst. Oder

$$\boxed{\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = -p} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{1}{n(t)}\frac{dn}{dt}(\mathrm{t})\text{=-p}}$$

Die relative momentane Änderungsrate ist konstant gleich -p. Das negative Zeichen zeigt eine Abnahme an.

(7) Die Modellüberlegung liefert hier eine Beziehung für die **Änderungsrate der Größe**, nicht eine für die gesuchte Größe n(x) selbst. Die letztlich gesuchte Beziehung für n kann auf mehrere Weisen dargestellt werden.

- Nun kann man diese Differentialgleichung mit mathematischen Methoden lösen und es zeigt sich, dass die erhaltenen Funktionen die Verhältnisse korrekt wiedergeben. In unserem Beispiel ist dabei natürlich notwendig, dass die beteiligten Zahlen - hier n(x) - ausreichend groß sind. Wir werden auf die Lösung dieser Differentialgleichung später in Kap.4 zurückkommen.
- Man kann die Gleichung numereisch lösen.

☐ Für welche allgemeinen (im Kurs zu vermittelnden) Sachverhalte bildet dieser Teil über die Absorbtion ein Beispiel? Es handelt sich um zwei Stück. Formulieren sie eine kurze Antwort. Denken sie daran: Es geht um das allgemeine Verständnis dieser beiden Sachverhalte. Weiter: Was sollten Sie sich merken?

☐ Welche sachlichen Lücken zu diesem Teil sollten später im Kurs noch geschlossen werden?

☐ Die exakte Lösung der Differentialgleichung mit Nebenbedingung n(0) = n_0 lautet:

$$\boxed{\mathrm{n(x)=Ne}^{-px}}.$$

Wählen Sie $x_0 = 1$ und $\Delta x = 0.2$. Also $x_1 = 2.2$. Weiter sei p=0.3. Bestimmen Sie jetzt nacheinander:

a) Die Werte $n(x_0)$ und $n(x_1)$ und die Werteänderung von x_0 nach x_1.

b) Die mittlere Änderungsrate zwischen diesen beiden Werten

c) Die momentane Änderungsrate für $x=x_0$

d) Den relativen Fehler, den man macht, wenn man die mittlere Änderungsrate von x_0 nach x_1 durch die momentane bei x_0 ersetzt!

Bemerkung: Die Frage lautet nicht: "Beweisen Sie, dass das gegebene n(x) Lösung der Differentialgleichung ist". Die oben gegebene Lösung soll vielmehr benutzt werden, um a-d) zu beantworten. Beachten Sie: Für b) benutzt man das Resultat aus a). Nicht etwa neu rechnen! Für c) benutzt man die Differentialgleichung!

□ Was folgt mit der in (1a) gemachten Annahme, dass die Lichtintensität I proportional zur Anzahl n ist für die letztlich gesuchte Funktion I(x)
