

Fachbereich C

MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN
(PHYSIK)

Prof. Dr. Klaus Helbing
Prof. Dr. Robert Harlander



Übungsleiter:

Franziska Hofmann, F.10-09, 439-3516, fhofmann@physik.uni-wuppertal.de
Dr. Timo Karg, F.11-01, 439-3770, karg@physik.uni-wuppertal.de
Dr. Jens Vollinga, D.10-19, 439-2863, vollinga@physik.uni-wuppertal.de

Übungen zur Physik II (SS 2007)

Blatt 9

Die Hausaufgaben werden in der Übungsstunde am 19.06.2007 besprochen.

Präsenzaufgabe 1: Wellengleichungen

a) Leiten Sie die Wellengleichung

$$-\vec{\nabla}^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

für das skalare Potential ϕ aus den Maxwellgleichungen her. Benutzen Sie dabei die Lorentz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$.

b) Wir betrachten jetzt die Coulomb-Eichung, die Eichbedingung sei also $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Leiten Sie in dieser Eichung die Wellengleichungen für das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential \vec{A} aus den Maxwellgleichungen ab.

Hausaufgabe 1: allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung (5P)

Gegeben Sei die inhomogene Wellengleichung

$$\vec{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = s(\vec{x}, t).$$

a) Betrachten Sie erst die homogene Wellengleichung, d.h. den Fall $s = 0$. Wie lautet die Wellengleichung in Kugelkoordinaten (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten siehe Vorlesung)? Zeigen Sie dass $\psi(\vec{x}) = \frac{f(t - \frac{R}{c})}{R}$ mit $R = |\vec{x}|$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist. Dabei ist f eine beliebigen Funktion.

b) Um die genaue Form von f zu bestimmen betrachten wir nun sehr kleine R . Bei sehr kleinem R können die zeitlichen Ableitungen in der inhomogenen Wellengleichung vernachlässigt werden. Wie lautet die so vereinfachte inhomogene Wellengleichung?

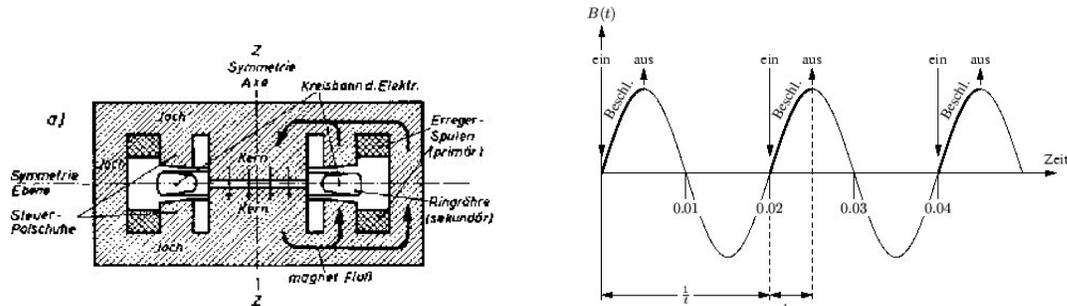
Die vereinfachte Wellengleichung ist aus der Elektrostatik bekannt. Wie lautet die Lösung für eine punktförmige Quelle $s(\vec{x}, t) = \delta(t - t') \delta(\vec{x} - \vec{x}')$? Was ergibt sich daraus für die Funktion f ? Beachten Sie, dass in dieser Näherung die Lösung aus Teil a) übergeht in $\psi(\vec{x}) = \frac{f(t)}{R}$.

c) Gewinnen Sie durch Integration der speziellen Lösung über $d^3 \vec{x}'$ und dt' die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung für beliebiges $s(\vec{x}, t)$. Versuchen Sie nicht das Integral auszuführen, sondern schreiben Sie die Lösung in Integralform.

Hausaufgabe 2: Betatron (5P)

Das Betatron ist ein Teilchenbeschleuniger in dem Elektronen nicht mit Hilfe von Beschleunigungselektroden oder -resonatoren beschleunigt werden, sondern durch Induktion in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld.

Die Elektronen bewegen sich in einer Vakuumröhre auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 um ein senkrecht dazu stehendes, radial-symmetrisches Magnetfeld $B(r)$. Wird nun die Magnetfeldstärke erhöht, so werden die Elektronen durch das induzierte elektrische Feld beschleunigt.



a) Finden Sie eine Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes $\dot{B}_0 = \dot{B}(r_0)$ auf der Elektronenbahn und der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\dot{\Phi}_m$ durch die Elektronenbahn, die garantiert, dass die Elektronen zu jeder Zeit auf der vorgegebenen Kreisbahn bleiben.

b) Nehmen Sie an, dass sich das magnetische Feld in der Nähe von r_0 durch ein Potenzgesetz beschreiben lässt: $B(r) \propto r^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Für welche α ist die Kreisbahn radial stabil? Das heißt, weichen die Teilchen nach außen ab, so wirke die Lorentzkraft rücktreibend, weichen die Elektronen nach innen ab, so sollen sie durch die Zentrifugalkraft wieder weiter nach außen kommen.

c) Das Betatron werde mit 50 Hz Wechselspannung betrieben. Die Elektronen werden aus einem Vorbeschleuniger eingeschossen wenn die magnetische Feldstärke Null ist, und werden ausgekoppelt wenn das Magnetfeld maximal ist. Nehmen Sie an, dass sich die Elektronen mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c bewegen und pro Umlauf im Betatron 10 eV^1 an kinetischer Energie gewinnen ($r_0 = 15 \text{ cm}$). Wieviel Energie gewinnen die Elektronen im Betatron? (nicht-relativistische Rechnung!)

¹1 Elektronenvolt (eV) ist die Energie, die ein Elektron gewinnt, wenn es eine Spannung von 1 V durchläuft.