Fachbereich C

MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

(PHYSIK)

Prof. Dr. Klaus Helbing
Prof. Dr. Robert Harlander

Übungsleiter:

Franziska Hofmann, F.10-09, 439-3516, fhofmann@physik.uni-wuppertal.de
Dr. Timo Karg, F.11-01, 439-3770, karg@physik.uni-wuppertal.de
Dr. Jens Vollinga, D.10-19, 439-2863, vollinga@physik.uni-wuppertal.de

Übungen zur Physik II (SS 2007) — Blatt 2

Die Hausaufgaben werden in der Übungsstunde am 17.04.2007 besprochen.

Präsenzaufgabe 1: Einheitensysteme

Wir vergleichen die beiden häufig in der Elektrodynamik verwendeten Einheitensysteme cgs (Zentimeter, Gramm, Sekunde) und mksA (Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampére).

a) Die Einheit der Kraft im cgs-System ist 1 dyn. Wie viel ist das in Newton?

Die Einheit der Energie im cgs-System ist 1 erg. Wie viel ist das in Joule?

b) Betrachten Sie die Gleichung für die Coulomb-Kraft F in mksA-Einheiten und in cgs-Einheiten:

$$\text{mksA: } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2}, \qquad \text{cgs: } F = K\,\frac{q_1' q_2'}{|\vec{r}|^2}$$

Überlegen Sie, warum Sie im Fall der cgs-Einheiten die Proportionalitätskonstante $K = 1$ wählen dürfen. Was ergibt sich bei dieser Wahl als Grundeinheit der Ladung im cgs-System?

Hausaufgabe 1: δ-Distribution (4 Punkte)

Die Diracsche Delta-Funktion (genauer Distribution) kann dargestellt werden als

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}e^{-x^2/a^2}\,, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie folgenden Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x) = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x) f(x) = f(0); \quad \delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x),\ c \neq 0;$$

$$x\delta(x) = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta'(x) f(x) = -f'(0).$$

Hinweis: Verwenden Sie nur das Gaußsche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2/a^2} = \sqrt{\pi}a$$

sowie die Taylor-Entwicklung für $f(x)$ um $x = 0$.

Hausaufgabe 2: Gradient, Divergenz, Rotation (6 Punkte)

In kartesischen Koordinaten hat der Nablaoperator $\vec{\nabla}$ die Darstellung

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Für Skalarfelder $s(\vec{x})$ und Vektorfelder $\vec{v}(\vec{x}) = (v_x(\vec{x}), v_y(\vec{x}), v_z(\vec{x}))^T$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} s(\vec{x}) &= \vec{e}_x \frac{\partial s(\vec{x})}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial s(\vec{x})}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial s(\vec{x})}{\partial z} && \text{(Gradient)} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}) &= \frac{\partial v_x(\vec{x})}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\vec{x})}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\vec{x})}{\partial z} && \text{(Divergenz)} \\
\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z(\vec{x})}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\vec{x})}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x(\vec{x})}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\vec{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y(\vec{x})}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\vec{x})}{\partial y} \end{pmatrix} && \text{(Rotation)}
\end{aligned}$$

a) Betrachten Sie die beiden folgenden Strömungen (in kartesischen Koordinaten):

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1(\vec{x}) &= y^2 \cdot \vec{e}_x \\
\vec{v}_2(\vec{x}) &= x^2 \cdot \vec{e}_x.
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie die beiden Felder und berechnen Sie jeweils Divergenz und Rotation. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

b) Betrachten Sie das Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe und berechnen Sie Divergenz und Rotation. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

c) Betrachten Sie das Skalarfeld $s(\vec{x}) = \vec{x}^2$. Berechnen Sie das zugehörige Gradientenfeld und dessen Divergenz und Rotation. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

d) Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektorfelder, s ein Skalarfeld. Die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen seien stets erfüllt. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Vektoridentitäten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} s &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= 0 \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \vec{a} \\
\vec{\nabla} \cdot (s\vec{a}) &= \vec{a} \cdot \vec{\nabla} s + s \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \\
\vec{\nabla} \times (s\vec{a}) &= \vec{\nabla} s \times \vec{a} + s \vec{\nabla} \times \vec{a} \\
\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\
\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}
\end{aligned}$$