



Mathematische Methoden der Physik

Prof. Dr. Francesco Knechtli*

*Department of Physics, Bergische Universität Wuppertal,
Gaussstr. 20, D-42119 Wuppertal, Germany*

July 13, 2022

Abstract

The goal of this lecture and tutorial series is to introduce essential mathematical methods for the physical sciences. We recommend the textbook by K. F. Riley and M. P. Hobson [1]. You can find the syllabus, lecture notes and latest information at <https://moodle.uni-wuppertal.de/course/view.php?id=30187>. I thank Dr. Roman Höllwieser for his help to create these lecture notes.

*knechtli@physics.uni-wuppertal.de, office D.10.24

*“Great physics does not automatically imply
complicated mathematics!”*

— Martinus J. G. Veltman, *Dutch physicist,*
1931

Contents

1	Integrale und die Γ-Funktion	1
1.1	Anwendungen der Gauss Verteilung	1
1.2	Gauss Integrale I	2
1.3	Integrale über die Sphäre I	4
1.4	Gamma-Funktion	7
1.5	Konvergenzsätze für Lebesgue Integral	8
1.6	Gauss Integrale II	9
1.7	Integrale über die Sphäre II	12
2	Fourier Reihen	14
2.1	Dirichlet Bedingungen	14
2.1.1	Plausibilität	14
2.1.2	Orthogonalität	15
2.1.3	Fourier Reihe	15
2.2	Fourier Koeffizienten	16
2.3	Unstetige Funktionen	17
2.4	Nicht-periodische Funktionen	19
2.5	Integration und Ableitung	22
2.6	Komplexe Fourier Reihen	24
2.7	Symmetriebetrachtungen	25
2.8	Theorem von Parseval	27
3	Integraltransformationen	29
3.1	Fourier Transformationen	29
3.1.1	Die Unschärfe-Relation	31
3.1.2	Fraunhofer Beugung	32
3.1.3	Huygens-Fresnel Prinzip	35
3.2	Die Dirac δ -Funktion	36
3.2.1	Beziehung zw. δ -Funktion u. Fourier Transformation .	38
3.3	Eigenschaften der Fourier Transformation	40
3.3.1	Ungerade und gerade Funktionen	41
3.3.2	Konvolution und Dekonvolution	42
3.3.3	Theorem von Parseval	44
3.3.4	Fourier Transformation in höheren Dimensionen	46

4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	48
4.1	Allgemeine Betrachtungen	48
4.1.1	Allgemeine Form der Lösung	48
4.1.2	Lineare Differentialgleichungen	49
4.2	Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	51
4.2.1	Lösung des homogenen Problems $y_h(x)$	52
4.2.2	Die spezielle Lösung $y_{sp}(x)$	54
4.2.3	Die allgemeine Lösung $y_h(x) + y_{sp}(x)$	55
4.3	Lineare Gleichungen der Ordnung 2	55
4.4	Reguläre und singuläre Punkte einer gewöhnlichen Differentialgleichung	56
4.5	Lösung als Potenzreihe um einen regulären Punkt	58
5	Spezielle Funktionen	61
5.1	Legendre Funktionen	61
5.1.1	Legendre Funktionen für l ganzzahlig	61
5.1.2	Eigenschaften der Legendre Polynome	62
5.1.3	Orthogonalitätsbeziehung	64
5.1.4	Orthonormierte Basis von Eigenfunktionen eines Hermiteschen Operators	65
5.1.5	Sturm-Liouville Gleichung	67
5.1.6	Erzeugende Funktion	68
5.2	Laplace Gleichung in Polarkoordination	71
5.3	Kugelflächenfunktionen ("spherical harmonics")	74
6	Komplexe Integration	77
6.1	Analytische Funktionen	77
6.2	Komplexe Integrale	79
6.3	Satz von Cauchy	82
6.4	Integralformel von Cauchy	84
6.5	Taylor und Laurent Reihen	85
6.6	Residuensatz	89
6.7	Anwendungen des Residuensatzes	91
6.7.1	Integrale mit trigonometrischen Funktionen	91
6.7.2	Uneigentliche Integrale (Konturintegrale)	92
6.7.3	Fourier Transformation	93
6.7.4	Hauptwertintegrale ("principal value")	96

A Lebesgue-Integral	98
A.1 Elemente der Maßtheorie	98
A.2 Lebesgue Integral	100
A.3 Konvergenzsätze	104
A.4 Satz von Fubini	105
References	106

1 Integrale und die Γ -Funktion

1.1 Anwendungen der Gauss Verteilung

1. Zentraler Grenzwertsatz

Angenommen X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sind n *unabhängige* Zufallsvariablen.

Definiere die Zufallsvariable $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Im Limes $n \rightarrow \infty$

die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(z)$ von Z ist eine Gauss Verteilung

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

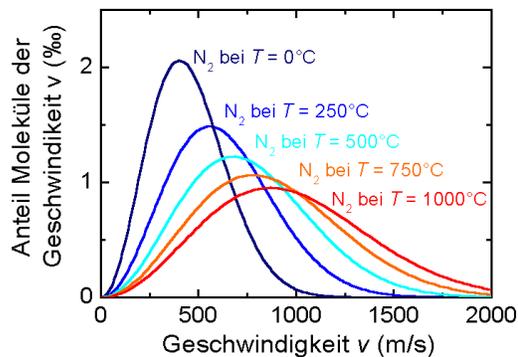
mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 von Z .

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

2. Die Verteilung der Geschwindigkeiten $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ von Gas- molekülen bei Temperatur T ist die Boltzmann Verteilung

$$P(v_1)P(v_2)P(v_3) = \frac{1}{(2\pi k_B T)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{k_B T}}$$

Das ist eine Gauss Verteilung. (k_B ist die Boltzmann Konstante)



1.2 Gauss Integrale I

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned} dx dy &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| dr d\varphi = \underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right|}_{\text{Jacobi-Determinante}} dr d\varphi \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| dr d\varphi = r dr d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-\frac{1}{2}r^2} r = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = 2\pi \left(-e^{-\frac{1}{2}r^2} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= 2\pi \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-e^{-\frac{1}{2}r^2} \right) + e^{-\frac{1}{2}0} \right] = 2\pi[0 + 1] = 2\pi \quad \square \end{aligned}$$

Sei $t > 0$, dann $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}}$ (Substitution: $x = \frac{1}{\sqrt{2t}}y$, $dx = \frac{1}{\sqrt{2t}}dy$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(y/\sqrt{2t})^2} \frac{1}{\sqrt{2t}} dy = \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2t}} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Verallgemeinerung auf Integrale über \mathbb{R}^n :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) d_{x_1} \dots d_{x_n}$$

Notation: $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $|\underline{x}|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, $d\underline{x} = d_{x_1} \dots d_{x_n}$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|\underline{x}|^2} d\underline{x} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n x_j^2} d_{x_1} \dots d_{x_n} &= \int_{-\infty}^{\infty} d_{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} d_{x_2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d_{x_n} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{1}{2}x_j^2} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d_{x_1} e^{-\frac{1}{2}x_1^2}}_{=\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d_{x_2} e^{-\frac{1}{2}x_2^2}}_{=\sqrt{2\pi}} \dots \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d_{x_n} e^{-\frac{1}{2}x_n^2}}_{=\sqrt{2\pi}} \\ &= (\sqrt{2\pi})^n = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Proposition: Sei $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$,

A symmetrisch: $A^T = A$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle} d\underline{x} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}}$$

Definition von $\det(A)$ via Integral

Notation: Skalarprodukt $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$

Beweis:

$$\begin{aligned} \exists O : OAO^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } O^T = O^{-1} \text{ orthogonal, } |\det O| = 1 \\ A &= O^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} O = O^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle} d\underline{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle \underline{x}, O^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} O\underline{x} \rangle} d\underline{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle O\underline{x}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} O\underline{x} \rangle} d\underline{x} \quad [\langle \underline{x}, O^T \underline{y} \rangle = \langle O\underline{x}, \underline{y} \rangle] \end{aligned}$$

Substitution: $\underline{x} = O^{-1}\underline{y}$ lineare Transformation

$$\begin{aligned} d\underline{x} &= d(O^{-1}\underline{y}) = |\det O^{-1}| d\underline{y} = \frac{1}{|\det O|} d\underline{y} = d\underline{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle \underline{y}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \underline{y} \rangle} d\underline{y} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2} d\underline{y} \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} dy e^{-\frac{1}{2} \lambda_j y_j^2} = \prod_{j=1}^n \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^n \lambda_j}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \end{aligned}$$

1.3 Integrale über die Sphäre I

$$S^{n-1} := \{ \underline{x}' \in \mathbb{R}^n \mid |\underline{x}'|^2 = \sum_{j=1}^n x_j'^2 = 1 \} \text{ Einheitssphäre in } \mathbb{R}^n$$

Polarkoordinaten:

Sei $\underline{x} \neq 0$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

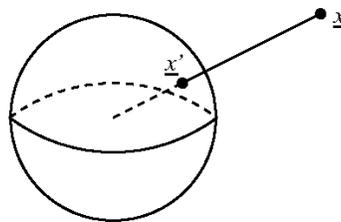
$$\underline{x} = r \underline{x}' \quad \text{wobei} \quad r = |\underline{x}| > 0$$

$$\underline{x}' \in S^{n-1}$$

$$\theta_1, \dots, \theta_{n-2} \quad 0 \leq \theta_j \leq \pi$$

$n - 1$ Winkel

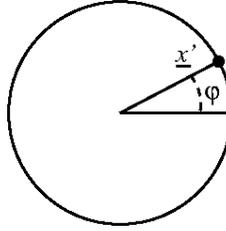
$$\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



$n = 2 :$

$$x'_1 = \cos \varphi \quad x_1'^2 + x_2'^2 =$$

$$x'_2 = \sin \varphi \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$



$n = 3 :$

$$x'_1 = \cos \theta_1$$

$$0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$x'_2 = \sin \theta_1 \cos \varphi$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 =$$

$$x'_3 = \sin \theta_1 \sin \varphi$$

$$\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$$

$n > 3 :$

$$x'_1 = \cos \theta_1$$

$$x'_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi$$

$$x'_3 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

\vdots

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$x'_{n-1} = \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \varphi$$

Parametrisierung von S^{n-1}

$$x'_n = \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \varphi$$

$$\int_{S^1} f(\underline{x}') d\underline{x}' := \int_0^{2\pi} f(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$$

$$\int_{S^2} f(\underline{x}') d\underline{x}' := \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \sin \theta_1 f(\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \varphi, \sin \theta_1 \sin \varphi)$$

$$d\underline{x}' = \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi$$

$n > 3 :$

$$\int_{S^{n-1}} f(\underline{x}') d\underline{x}' := \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \dots \int_0^\pi d\theta_{n-2} (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \dots$$

$$\dots \sin \theta_{n-2} f(\cos \theta_1, \dots, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \varphi)$$

$$d\underline{x}' = (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \dots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-2} d\varphi$$

Polarintegrale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_0^\infty dr r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(r\underline{x}') d\underline{x}'$$

Def.: $\text{Vol}(S^{n-1}) = |S^{n-1}| := \int_{S^{n-1}} 1 d\underline{x}'$

$$\text{Vol}(S^1) = \int 1 d\underline{x}' = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 2\pi$$

$$\text{Vol}(S^2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 = 2\pi(-\cos \theta_1)|_0^\pi = 4\pi$$

Satz: Für $n \geq 2$ $\text{Vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ ($\Gamma \dots$ 'Gamma'-Funktion)

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (2\pi)^{n/2} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|\underline{x}|^2} d\underline{x} = \int_0^\infty dr r^{n-1} \int_{S^{n-1}} e^{-\frac{1}{2}|\underline{x}|^2} d\underline{x}' \\ &= \int_0^\infty dr r^{n-1} \int_{S^{n-1}} e^{-\frac{1}{2}r^2} d\underline{x}' = \text{Vol}(S^{n-1}) \int_0^\infty dr r^{n-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Vol}(S^{n-1}) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\int_0^\infty dr r^{n-1} e^{-\frac{1}{2}r^2}}$$

$$\int_0^\infty dr r^{n-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} = \int_0^\infty dt (2t)^{-\frac{1}{2}} (2t)^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} = 2^{\frac{n}{2}-1} \overbrace{\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt}^{=\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Substitution: $t = \frac{1}{2}r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2t} \quad dt = r dr, \quad dr = \frac{1}{r} dt = \frac{1}{\sqrt{2t}} dt$

$$\Rightarrow \text{Vol}(S^{n-1}) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad \square$$

1.4 Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Lemma:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$
4. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2})(n - \frac{5}{2}) \dots \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Beweis:

$$\begin{aligned} (1) \quad \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \left(-e^{-t} t^x \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) \frac{d}{dt}(t^x) dt = \\ &\quad \text{partielle Integration} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{d}{dt}(t^x) dt = x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

$$\text{Bem.:} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{Bem.:} \quad \frac{d}{dt}(t^x) = \frac{d}{dt}(e^{x \ln t}) = \frac{x}{t} e^{x \ln t} = \frac{x}{t} t^x = x t^{x-1}$$

$$(2) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$\text{Substitution } s = \sqrt{2t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}s^2, \quad ds = \frac{dt}{\sqrt{2t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}s^2}}_{\text{gerade Funktion}} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$(3) \quad \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1 = 0!$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \Gamma(n-1+1) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)\Gamma(n-2+1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2) \dots 1\Gamma(1) = (n-1)! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2} + 1\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Korollar: $\text{Vol}(S^{2m-1}) = \frac{2\pi^m}{\Gamma(m)} = \frac{2\pi^m}{(m-1)!}$
gerade Dimension $n=2m$

Bem: $n=2 : \text{Vol}(S^1) = \frac{2\pi}{0!} = 2\pi$
 $\Leftrightarrow m=1$

$\text{Vol}(S^{(2m+1)-1}) = \frac{2\pi^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} = \frac{2\pi^{m+\frac{1}{2}}}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\dots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$
ungerade Dimension $n=2m+1$

$$= \frac{2\pi^m}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\dots\frac{1}{2}}$$

Bem: $n=3 : \text{Vol}(S^2) = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
 $\Leftrightarrow m=1$

1.5 Konvergenzsätze für Lebesgue Integral

Das Lebesgue Integral ist die Verallgemeinerung des Riemann Integrals.

\triangleleft Folge von Funktionen $f_n(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$:

Es gilt nicht immer, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int f(x) dx$.

Beispiel: $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ aber:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

Satz von Lebesgue:

Sei f_n eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\underline{x}) = f(\underline{x})$ fast überall¹ in $E \subset \mathbb{R}^n$ und es existiere eine integrierbare Funktion g mit $|f_n(\underline{x})| \leq g(\underline{x}) \forall n$ fast überall in E . Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) d\underline{x} = \int_E f(x) d\underline{x}$$

¹”fast überall” bedeutet überall außer in einer Teilmenge mit Maß 0 (Nullmenge).

Satz von Fubini:

Sei $f : E \subset \mathbb{R}^n \times F \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar*.
 $(\begin{matrix} \underline{x} \\ \downarrow \end{matrix}, \begin{matrix} \underline{y} \\ \downarrow \end{matrix}) \rightarrow f(\underline{x}, \underline{y})$

$$\text{Dann}^{**} \int_{E \times F} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} = \int_F \left(\int_E f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} \right) d\underline{y} = \int_E \left(\int_F f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right) d\underline{x}$$

*) Satz von Tonelli:

Existiert $\int_{E \times F} |f(\underline{x}, \underline{y})| d\underline{x} d\underline{y}$ (mit irgendeiner Integrationsreihenfolge), so ist f integrierbar.

***) die Integrale über E (F) müssen bis auf einer Nullmenge (Menge von Maß 0) in F (E) existieren. Für mehr Details siehe Appendix A.

1.6 Gauss Integrale II

Lemma: Sei $k \in \mathbb{R}$, dann

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{1}{2}k^2}} \quad (i = \sqrt{-1})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ikx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ikx)^j}{j!} dx \quad \left(e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{(-ikx)^j}{j!} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ik)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^j dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^{2m}}{(2m)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &\stackrel{(\Delta)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ik)^{2m}}{(2m)!} \sqrt{2\pi} \frac{(2m)!}{2^m (m!)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2m} (k^2/2)^m}{m!} \\
&= \sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (k^2/2)^m}{m!} \\
&= \sqrt{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k^2/2)^m}{m!} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}k^2} \quad \square
\end{aligned}$$

$$(*) \quad f_N = e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{j=0}^N \frac{(-ikx)^j}{j!}; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} f_N = e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-ikx} = f$$

$$|f_N(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{j=0}^N \frac{|-ikx|^j}{j!} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{j=0}^N \frac{|kx|^j}{j!} \leq \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{|kx|}}_{\text{integrierbar}^2}$$

Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

dann: Satz (H. Lebesgue): $\lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N dx = \int f dx$

$$(\Delta) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{2m} e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{\text{gerade Funktion}} dx = \sqrt{2\pi} \frac{(2m)!}{2^m (m!)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{2m+1} e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{\text{ungerade Funktion}} dx = 0$$

Beweis von (Δ) :

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m}{dt^m} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^m (1/2)^m (x^2)^m e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= (-1/2)^m \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx &= \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \quad t > 0 \\
\Rightarrow \frac{d^m}{dt^m} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} &= (-1/2)^m \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = \sqrt{2\pi} \frac{d}{dt} t^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} (-1/2) t^{-\frac{3}{2}}$$

²Beweis der Integrierbarkeit erfolgt mit Hilfe quadratischer Erweiterung!

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} &= \sqrt{2\pi}(-1/2) \frac{d}{dt} t^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{2\pi}(-1/2)(-3/2)t^{-\frac{5}{2}} \\ \frac{d^m}{dt^m} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} &= \sqrt{2\pi}(-1/2)(-3/2)(-5/2) \dots \left(-\frac{2m-1}{2}\right) t^{-\frac{2m+1}{2}} \\ &= \sqrt{2\pi}(-1/2)^m 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) t^{-\frac{2m+1}{2}}\end{aligned}$$

$$\cancel{(-1/2)^m} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi} \cancel{(-1/2)^m} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) t^{-\frac{2m+1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx = t^{-\frac{2m+1}{2}} \sqrt{2\pi} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) \quad (t > 1)$$

$$t = 1: \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)$$

$$\begin{aligned}1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m-1)(2m)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m} \\ &= \frac{(2m)!}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m} = \frac{(2m)!}{2^m(m!)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi} \frac{(2m)!}{2^m(m!)} \quad \square$$

Beweis von (Δ) alternativ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} 2 \int_0^{\infty} (x^2)^m e^{-t\frac{1}{2}x^2} dx$$

Symmetrie

$$\begin{aligned}&\stackrel{(*)}{=} 2 \int_0^{\infty} (2s)^m e^{-s} (2s)^{-\frac{1}{2}} ds = 2^{m+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} s^{m-\frac{1}{2}} e^{-s} ds \\ &= 2^{m+\frac{1}{2}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \underbrace{2 \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot \left(m - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{m=0} \\ &= \sqrt{2\pi} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) = \sqrt{2\pi} \frac{(2m)!}{2^m(m!)} \quad (\text{see above!})\end{aligned}$$

$$(*) \text{ Substitution: } s = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2s}, \quad ds = x dx, \quad dx = \frac{1}{x} ds = \frac{1}{\sqrt{2s}} ds$$

1.7 Integrale über die Sphäre II

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_{-1}^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 = \begin{cases} 0 & n = 2m+1 \text{ (ungerade)} \\ \frac{2}{n+1} & n = 2m \text{ (gerade)} \end{cases}$$

$$\int_{[-1,1]^d} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_d^{n_d} d\underline{x} = \int_{-1}^1 dx_1 \dots \int_{-1}^1 dx_d x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_d^{n_d} = \prod_{j=1}^d \int_{-1}^1 x_j^{n_j} dx_j$$

$$= \begin{cases} 0, \exists j, 1 \leq j \leq d \text{ mit } n_j = 2m+1 \\ 2^d \prod_{j=1}^d \frac{1}{n_j+1}, \text{ falls } n_j = 2m_j, j = 1 \dots d \end{cases}$$

Verallgemeinerung auf $\int_{S^{n-1}}$?

$$\int_{S^{n-1}} (x'_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x'_n)^{\alpha_n} d\underline{x}' = 0, \quad \exists j, 1 \leq j \leq n \text{ mit } \alpha_j = 2m+1$$

$$\alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1 \dots n$$

Beweis: Polarkoordinaten $\rightarrow x'_j = \cos \theta_1$

$$\int_0^\pi (\cos \theta_1)^{2m+1} (\sin \theta_1)^{n-2} d\theta_1 \stackrel{(*)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \right)^{2m+1} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \right)^{n-2} dt = 0$$

(*) Substitution $\theta_1 = \pi/2 + t$

wegen $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \right)^{2m+1}$ ungerade, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$ gerade in t

Satz:

$$\int_{S^{n-1}} (x'_1)^{2m_1} \cdot \dots \cdot (x'_n)^{2m_n} d\underline{x}' = \frac{2 \prod_{j=1}^n \Gamma(m_j + \frac{1}{2})}{\Gamma(\sum_{j=1}^n m_j + \frac{1}{2})}$$

wobei $m_j \in \mathbb{N}, j = 1 \dots n$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n x_j + j^{2m_j} \right) e^{-|\underline{x}|^2} d\underline{x} &= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_j^{2m_j} e^{-x_j^2} dx_j \quad | \quad x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}s \\
&= \prod_{j=1}^n 2^{-m_j - \frac{1}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s^{2m_j} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds}_{\Gamma(m_j + \frac{1}{2})} \\
&= \prod_{j=1}^n 2^{-m_j - \frac{1}{2}} 2^{m_j + \frac{1}{2}} \Gamma(m_j + \frac{1}{2}) = \prod_{j=1}^n \Gamma(m_j + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

aber auch in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n x_j^{2m_j} \right) e^{-|\underline{x}|^2} d\underline{x} &= \int_0^{\infty} dr r^{n-1} \int_{S^{n-1}} d\underline{x}' \left(\prod_{j=1}^n (r x'_j)^{2m_j} \right) e^{-r^2} \\
&= \int_0^{\infty} dr r^{n-1} r^{\sum_{j=1}^n 2m_j} e^{-r^2} \int_{S^{n-1}} \prod_{j=1}^n (x'_j)^{2m_j} d\underline{x}' \\
&\Rightarrow \prod_{j=1}^n \Gamma(m_j + \frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} dr r^{n-1+2\sum_{j=1}^n m_j} e^{-r^2} \int_{S^{n-1}} \prod_{j=1}^n (x'_j)^{2m_j} d\underline{x}' \\
&\Rightarrow \int_{S^{n-1}} \prod_{j=1}^n (x'_j)^{2m_j} d\underline{x}' = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(m_j + \frac{1}{2})}{\int_0^{\infty} dr r^{n-1+2\sum_{j=1}^n m_j} e^{-r^2}} \\
\int_0^{\infty} dr r^{n-1+2\sum_{j=1}^n m_j} e^{-r^2} &= \int_0^{\infty} ds \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}(n-1+2\sum_{j=1}^n m_j)} e^{-s} \\
\text{Substitution } s = r^2 &\Leftrightarrow r = \sqrt{s}, \quad dr = \frac{1}{2\sqrt{s}} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} ds e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1+\sum_{j=1}^n m_j} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \sum_{j=1}^n m_j\right) \\
&\Rightarrow \int_{S^{n-1}} \prod_{j=1}^n (x'_j)^{2m_j} d\underline{x}' = \frac{2 \prod_{j=1}^n \Gamma(m_j + \frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \sum_{j=1}^n m_j\right)} \quad \square
\end{aligned}$$

2 Fourier Reihen

Taylor Reihe: Darstellung einer Funktion als Potenzreihe, Funktion muss überall stetig und differenzierbar sein.

Fourier Reihe: Darstellung einer Funktion als Summe von trigonometrischen Termen (\sin , \cos), auch für Funktionen die nicht überall stetig und/oder differenzierbar sind. Jeder Term enthält nur eine charakteristische Frequenz. Anwendungen sind die Vibration einer endlichen Seite, die Beugung von Licht und die Transmission eines input Signals durch einen Schaltkreis.

2.1 Dirichlet Bedingungen

Definition: Die notwendigen Eigenschaften einer reellen Funktion $f(x)$, damit sie eine Fourier Reihe besitzt, heissen **Dirichlet Bedingungen**:

1. die Funktion muss periodisch sein;
2. sie muss eindeutig und stetig sein, mit Ausnahme einer endlichen Zahl von endlichen Sprungstellen;
3. sie muss eine endliche Zahl von Maxima und Minima innerhalb einer Periode haben;
4. das Integral über eine Periode von $|f(x)|$ ist endlich.

Wenn Bedingungen (1)-(4) erfüllt sind, dann konvergiert die Fourier Reihe gegen $f(x)$ für alle Punkte x , wo f stetig ist. Diskontinuitäten sind in 2.3 diskutiert. Es ist möglich, nicht periodische Funktionen so zu manipulieren, dass sie eine periodische Darstellung besitzen und somit eine Fourier Reihe, siehe 2.4.

2.1.1 Plausibilität

Wir brauchen sowohl \sin als auch \cos Terme.

Ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$, Beispiel: $\sin(x)$

Gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$, Beispiel: $\cos(x)$

Sinus Terme können nicht gerade Funktionen darstellen.

Kosinus Terme können nicht ungerade Funktionen darstellen.

Aber, man kann alle ungeraden Funktionen mit einer Sinus-Reihe und alle geraden Funktionen mit einer Kosinus-Reihe darstellen. Allgemeine Funktion:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}_{f_{\text{gerade}}(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}_{f_{\text{ungerade}}(x)}$$

⇒ jede Funktion kann als Summe einer Kosinus- und einer Sinus-Reihe dargestellt werden.

2.1.2 Orthogonalität

Sei L die Periode: $f(x + L) = f(x)$ und die Frequenzen $\frac{2\pi r}{L}$, $r \in \mathbb{N}$.

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi p x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall \quad r, p \in \mathbb{N},$$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi p x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & r = p = 0, \\ \frac{1}{2}L & r = p > 0, \\ 0 & r \neq p, \end{cases}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi p x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & r = p = 0, \\ \frac{1}{2}L & r = p > 0, \\ 0 & r \neq p, \end{cases}$$

Beweis: Trigonometrische Additionstheoreme

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B,$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.$$

Bemerkung: Wegen Periodizität $\sin\left(\frac{2\pi r(x+L)}{L}\right) = \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right)$ (ebenso für \cos) kann man x_0 beliebig wählen. Entwicklung einer Funktion in Basis von orthogonalen Funktionen siehe später...

2.1.3 Fourier Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[a_r \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) + b_r \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \right]$$

a_0, a_r, b_r sind Konstanten genannt *Fourier Koeffizienten*.

2.2 Fourier Koeffizienten

Gegeben $f(x)$, wie können wir ihre Fourier Koeffizienten berechnen?

Nützliche Formeln: Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin n\pi &= 0, & \sin(n + 1/2)\pi &= (-1)^n \\ \cos n\pi &= (-1)^n, & \cos(n + 1/2)\pi &= 0 \end{aligned}$$

Satz: Für eine periodische Funktion $f(x)$ mit Periode L gilt

$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx \\ b_r &= \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx \end{aligned}}$$

Bemerkungen: x_0 ist beliebig aber oft $x_0 = 0$ oder $x_0 = -L/2$. Der Faktor $1/2$ im Term $a_0/2$ der Fourier Reihe ist eingeführt damit der Ausdruck für a_r für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi p x}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{x_0}^{x_0+L} \cos\left(\frac{2\pi p x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} a_r \int_{x_0}^{x_0+L} \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi p x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} b_r \int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi p x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Orthogonalitätsrelationen:

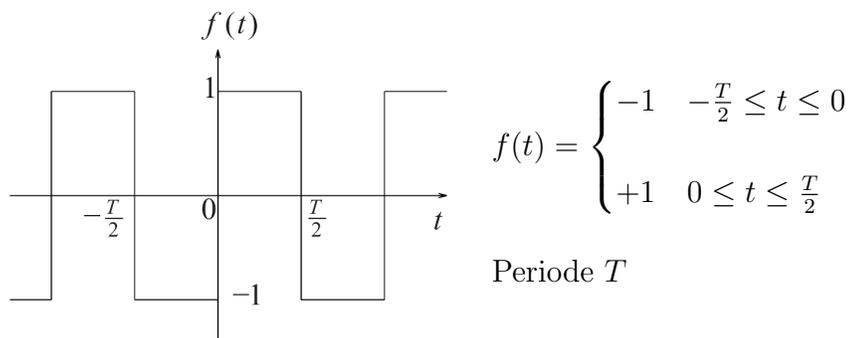
$$\text{wenn } p = 0: \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx = \frac{a_0}{2} L$$

$$\text{wenn } p \neq 0: \text{ nur } r = p \text{ trägt bei, } \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx = \frac{a_r}{2} L$$

Für die Koeffizienten b_r betrachte analog $\int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx$.

Bemerkung: Vertauschung $\int_{x_0}^{x_0+L} \sum_{r=1}^{\infty} \dots dx = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_0+L} \dots dx$ ist OK, weil das Integral von $|f(x)|$ existiert.

Beispiel 1: (aus [1])



$f(-t) = -f(t) \Rightarrow$ nur Sinus Terme (siehe 2.7)

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi r t}{T}\right) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi r t}{T}\right) dt \\ &= \frac{4}{T} \left(-\frac{T}{2\pi r}\right) \cos\left(\frac{2\pi r t}{T}\right) \Big|_0^{T/2} = \frac{-2}{\pi r} (\cos \pi r - 1) = \frac{2}{\pi r} [1 - (-1)^r] \end{aligned}$$

$\Rightarrow b_r = 0$ wenn r gerade, $b_r = \frac{4}{\pi r}$ wenn r ungerade.

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Winkelfrequenz ist. Siehe auch Fig. 1.

2.3 Unstetige Funktionen

Die Fourier Reihe existiert für unstetige Funktionen, aber die Reihe produziert keine unstetige Funktion.

Satz: An einem Punkt x_d , wo $f(x)$ eine endliche Sprungstelle hat, konvergiert die Fourier Reihe gegen $\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f(x_d + \epsilon) + f(x_d - \epsilon)]$.

In Beispiel 1 konvergiert die Fourier Reihe von $f(t)$ gegen $0 = \frac{1}{2}[1 + (-1)]$ bei $t = 0$.

Gibbs'sches Phänomen: Nahe den Unstetigkeitsstellen, hat die Fourier Reihe Spitzen (δ in Fig. 1d), welche die Funktionswerte übertreffen. Wenn mehr und mehr Terme der Fourier Reihe aufsummiert werden, bewegt sich zwar die größte Spitze beliebig nahe an die Sprungstelle, aber sie verschwindet nie, auch nicht im Limes unendlich vieler Terme.

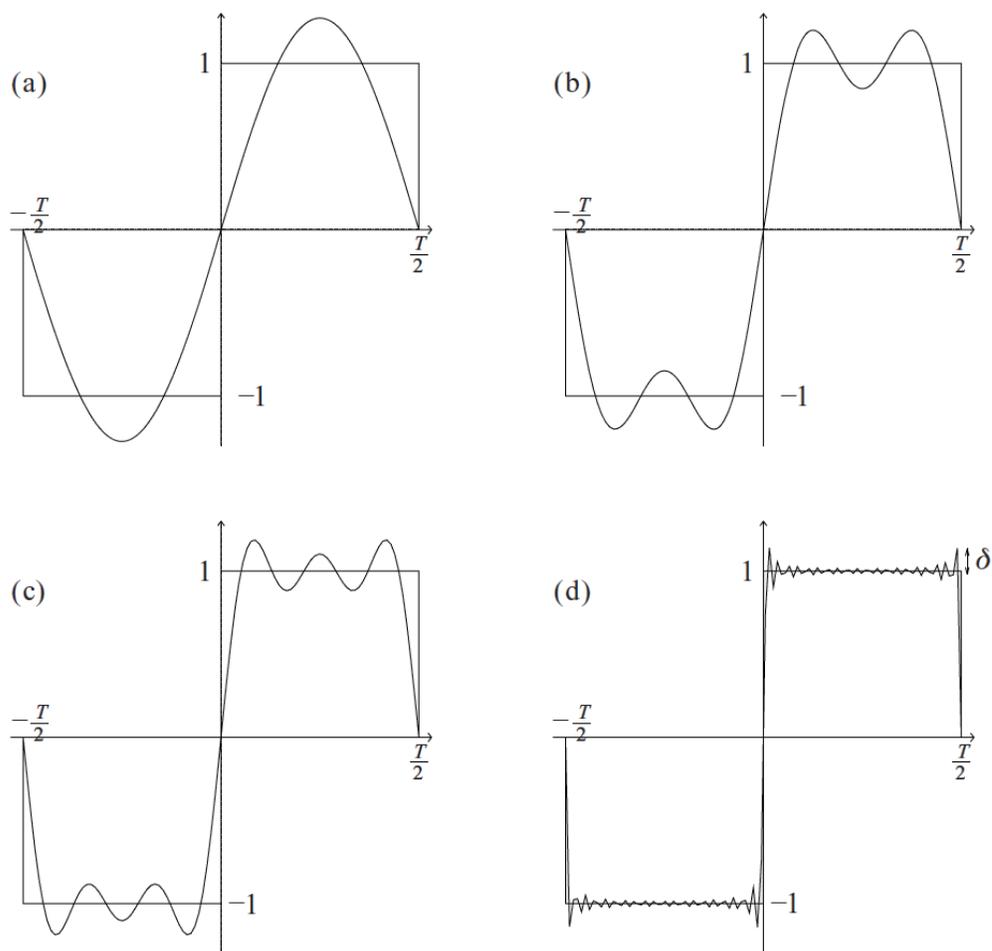


Figure 1: Konvergenz der Fourier Reihe der quadratischen Wellenfunktion in Beispiel 1, mit (a) einem Term, (b) zwei, (c) drei und (d) 20 Termen. (aus [1])

2.4 Nicht-periodische Funktionen

Ziel: Finde die Fourier Reihe einer nicht-periodischen Funktion nur innerhalb eines festen Bereiches

Trick: Periodische Fortsetzung der Funktion ausserhalb des Bereiches. Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie im folgenden Beispiel 2, Fig. 2:

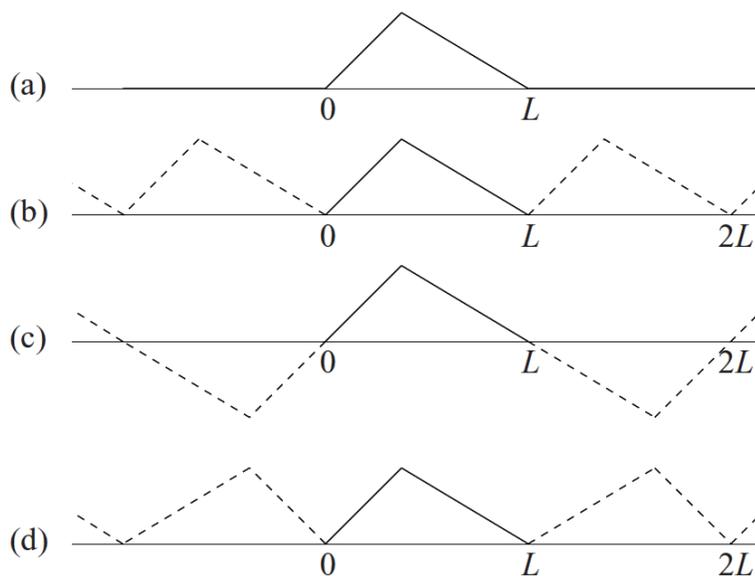


Figure 2: Möglichkeiten der periodische Fortsetzung von (a) $f(x)$: (b) keine Symmetrie, Periode L , (c) ungerade Funktion mit Periode $2L$ und (d) gerade Funktion mit Periode $2L$. (aus [1])

Die Fortsetzung sollte nicht unstetig an den Endpunkten des Bereiches sein, ansonsten konvergiert dort die Fourier Reihe nicht gegen die Funktionswerte.

Beispiel 3: Fourier Reihe für $f(x) = x^2$ für $0 < x \leq 2$, siehe Fig. 3.

Lösung: Fortsetzung $(0, 2] \rightarrow (-2, 2]$ mit $f(-x) = f(x)$.

$$f(x + 4k) = f(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ Periode } L = 4$$

$$\text{gerade Funktion} \Rightarrow b_r = 0 \quad \forall r$$

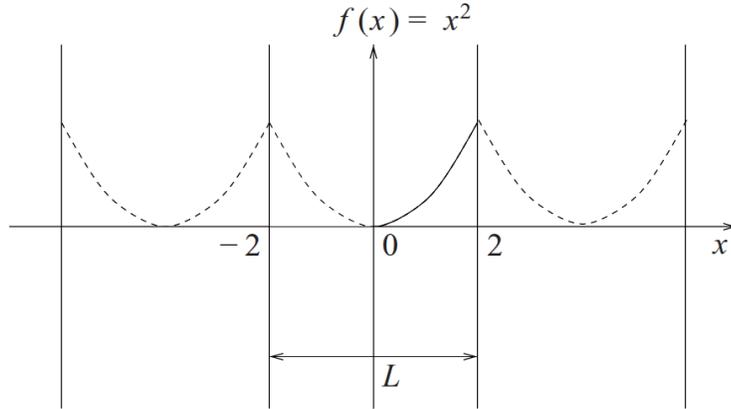


Figure 3: Gerade, periodische Fortsetzung von $f(x) = x^2$. (aus [1])

$$\begin{aligned}
 a_r &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 x^2 \cos\left(\frac{2\pi r x}{4}\right) dx = \frac{4}{4} \int_0^2 x^2 \cos\left(\frac{\pi r x}{2}\right) dx \\
 &\stackrel{r \neq 0}{=} \left[\frac{2}{\pi r} x^2 \sin\left(\frac{\pi r x}{2}\right) \right]_0^2 - \frac{4}{\pi r} \int_0^2 x \sin\left(\frac{\pi r x}{2}\right) dx \\
 &= \frac{8}{\pi^2 r^2} \left[x \cos\left(\frac{\pi r x}{2}\right) \right]_0^2 - \frac{8}{\pi^2 r^2} \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi r x}{2}\right) dx \\
 &= \frac{16}{\pi^2 r^2} \cos(\pi r) = \frac{16}{\pi^2 r^2} (-1)^r \\
 r = 0 : a_0 &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{4}{4} \int_0^2 x^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \\
 \Rightarrow x^2 &= \frac{4}{3} + 16 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\pi^2 r^2} \cos\left(\frac{\pi r x}{2}\right) \quad \text{für } 0 < x \leq 2
 \end{aligned}$$

Da wir eine gerade Fortsetzung gewählt haben, gilt dieser Ausdruck von x^2 auch für $-2 \leq x \leq 0$.

Die Konvergenz der Fourier Reihe der geraden Fortsetzung ist in Fig. 4 dargestellt.

Anwendung: Wenn wir $x = 0$ setzen, können wir dieses Ergebnis nutzen,

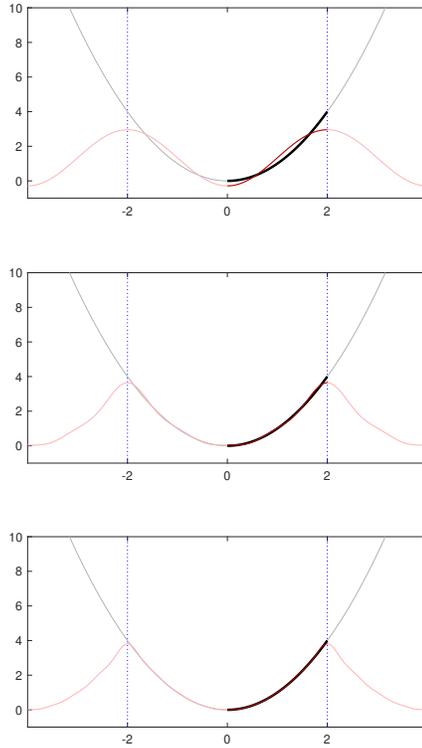


Figure 4: Konvergenz der Fourier Reihe zu Fig. 3.

um die unendliche Reihe auszurechnen:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Bemerkung: Wir hätten auch eine ungerade Fortsetzung $f(-x) = -f(x)$ wählen können mit $f(x + 4k) = f(x)$, siehe Fig. 5.

\Rightarrow Fourier Reihe nur mit Sinus Termen, das liefert die korrekten Werte für x^2 innerhalb des vorgegebenen Bereiches $0 < x < 2$, aber nicht bei $x = \pm 2$, wo die Sinus Reihe nicht gegen $f(x) = \pm 4$ sondern gegen $\frac{1}{2}[4 + (-4)] = 0$ konvergiert. Ein weiterer Nachteil dieser Wahl ist, dass die Koeffizienten nur

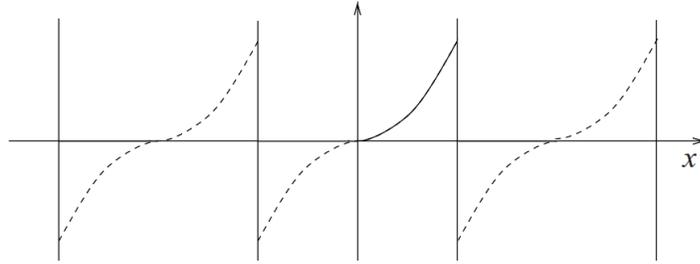


Figure 5: Ungerade, periodische Fortsetzung von $f(x) = x^2$.

eine Konvergenz $\propto r^{-1}$ haben.

Die Konvergenz der Fourier Reihe der ungeraden Fortsetzung ist in Fig. 6 dargestellt.

2.5 Integration und Ableitung

Wenn die Fourier Reihe einer Funktion $f(x)$ Term für Term *integriert* wird, dann konvergiert die resultierende Reihe gegen das Integral von $f(x)$. In diesem Fall gibt es eine Integrationskonstante, die gefunden werden muss.

Wenn $f(x)$ stetig für alle x und auch periodisch ist, dann konvergiert die Fourier Reihe, die man durch *Ableitung* Term für Term der einzelnen Terme gewinnt gegen $f'(x)$. Voraussetzung dafür ist, dass auch $f'(x)$ die Dirichlet Bedingungen erfüllt.

Diese beiden Eigenschaften der Fourier Reihe können dazu benutzt werden, um komplizierte Fourier Reihen aus Einfacheren (in Standard Tabellen aufgelistet) zu berechnen.

Beispiel 4: Fourier Reihe für $f(x) = x^3$ für $0 < x \leq 2$. Wir integrieren Term für Term die Reihe für $f(x) = x^2$, die wir in Beispiel 3 berechnet haben:

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3} = \frac{4}{3}x + 32 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\pi^3 r^3} \sin\left(\frac{\pi r x}{2}\right) + c$$

wobei c eine Integrationskonstante ist. Wir sind noch nicht am Ziel, weil der

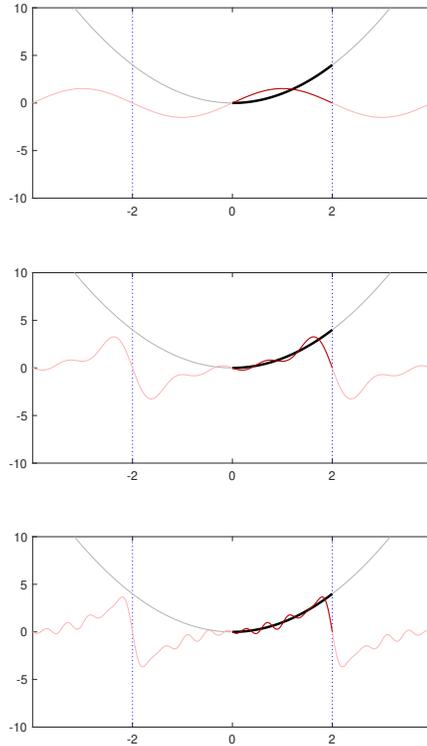


Figure 6: Konvergenz der Fourier Reihe zu Fig. 5.

Term $\frac{4}{3}x$ noch entwickelt werden muss. Dazu leiten wir die Reihe für x^2 ab:

$$2x = -8 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\pi r} \sin\left(\frac{\pi r x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 = -16 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\pi r} \sin\left(\frac{\pi r x}{2}\right) + 96 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\pi^3 r^3} \sin\left(\frac{\pi r x}{2}\right) + c'$$

Um die Integrationskonstante c' zu bestimmen, betrachten wir $f(0)$. Die Fourier Reihe ergibt $x^3 = c'$ weil alle Sinus Terme Null sind $\Rightarrow c' = 0$.

Frage: Welche der Reihen (a) x^2 in Beispiel 3 und (b) x^3 in Beispiel 4 zeigt

das Gibbs'sche Phänomen? $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$

2.6 Komplexe Fourier Reihen

Im Allgemeinen enthält eine Fourier Reihe Sinus und Kosinus Terme. Eine kompaktere Darstellung bekommt man durch $e^{\pm irx} = \cos(rx) \pm i \sin(rx)$:

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{\frac{2\pi irx}{L}} \quad \text{mit}$$

$$c_r = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) e^{-\frac{2\pi irx}{L}} dx$$

Bemerkung: Die Darstellung als Fourier Reihe gilt für komplexwertige Funktionen (Hinweis: Betrachte Real- und Imaginärteil der Funktion.). Die Fourier Koeffizienten sind im allgemeinen komplexwertig.

Die komplexe Form der Fourier Reihe folgt aus der Orthogonalitätsrelation für $r, p \in \mathbb{Z}$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} e^{-\frac{2\pi ipx}{L}} e^{\frac{2\pi irx}{L}} dx = \begin{cases} L & r = p \\ 0 & r \neq p \end{cases}.$$

Die komplexen Fourier Koeffizienten c_r haben folgende Beziehungen zu den reellen Koeffizienten a_r, b_r :

$$c_r = \frac{1}{2}(a_r - ib_r), \quad c_{-r} = \frac{1}{2}(a_r + ib_r)$$

Beweis:

$$a_r \cos\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) = a_r \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi irx}{L}} + e^{-\frac{2\pi irx}{L}} \right)$$

$$b_r \sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right) = b_r \frac{-i}{2} \left(\underset{c_r}{e^{\frac{2\pi irx}{L}}} - \underset{c_{-r}}{e^{-\frac{2\pi irx}{L}}} \right)$$

Wenn $f(x)$ reell ist, dann ist $c_{-r}^* = c_r$. (* bedeutet komplex konjugiert)

$$\text{Beweis: } f(x)^* = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r^* e^{-\frac{2\pi irx}{L}} = \sum_{r'=-\infty}^{\infty} c_{-r'}^* e^{\frac{2\pi ir'x}{L}}$$

Insbesondere ist in diesem Fall $c_0 = \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx$ reell.

Beispiel 5: Komplexe Fourier Reihe für $f(x) = x$, $-2 < x < 2$.

Für $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x e^{-\frac{2\pi i r x}{4}} dx = \left[-\frac{x}{2\pi i r} e^{-\frac{\pi i r x}{2}} \right]_{-2}^2 + \int_{-2}^2 \frac{1}{2\pi i r} e^{-\frac{\pi i r x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{\pi i r} \left[e^{-\pi i r} + e^{\pi i r} \right] + 0 \quad (\rightarrow \text{Orthogonalität } r, p = 0) \\ &= -\frac{1}{\pi i r} \left[(e^{-\pi i})^r + (e^{\pi i})^r \right] = \frac{2i}{\pi r} (-1)^r \end{aligned}$$

Für $r = 0$: $c_r = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x dx = 0$

$$\Rightarrow x = \sum_{r=-\infty, r \neq 0}^{\infty} \frac{2i(-1)^r}{\pi r} e^{\frac{\pi i r x}{2}}$$

In Beispiel 4 hatten wir $a_r = 0 \forall r$ und

$$\begin{aligned} b_r = -\frac{4(-1)^r}{\pi r} &\Rightarrow c_r = -\frac{i}{2} b_r = \frac{2i(-1)^r}{\pi r} \checkmark \\ c_{-r} = \frac{i}{2} b_r &= \frac{2i(-1)^r}{\pi(-r)} \checkmark \end{aligned}$$

Auch gilt $c_r^* = c_{-r}$, weil $f(x)$ reell ist.

2.7 Symmetriebetrachtungen

1. ungerade Funktionen: $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sum_r c_r e^{\frac{2\pi i r(-x)}{L}} = \sum_{r'=-r} c_{-r'} e^{\frac{2\pi i r' x}{L}} \\ \Rightarrow c_{-r} &= -c_r \\ \frac{1}{2}(a_r + i b_r) &= -\frac{1}{2}(a_r - i b_r) \\ a_r &= -a_r \quad \Rightarrow \quad a_r = 0 \forall r \quad (\text{keine Kosinus Terme}) \end{aligned}$$

2. gerade Funktionen: $f(-x) = f(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_{-r} &= c_r \\ \frac{1}{2}(a_r + ib_r) &= \frac{1}{2}(a_r - ib_r) \\ b_r &= -b_r \Rightarrow b_r = 0 \quad \forall r \quad (\text{keine Sinus Terme}) \end{aligned}$$

3. weitere Symmetrien, z.B.: reelle Funktion f mit $f(\frac{L}{4} + s) = \pm f(\frac{L}{4} - s)$
 \Rightarrow Symmetrie/Anti-Symmetrie um den Punkt $L/4$:

$$f\left(\frac{L}{4} + s\right) = \sum_r c_r e^{\frac{2\pi i r(s+L/4)}{L}} = \sum_r c_r (e^{\frac{\pi i}{2}})^r e^{\frac{2\pi i r s}{L}} = \sum_r i^r c_r e^{\frac{2\pi i r s}{L}}$$

\Rightarrow Fourier Koeffizienten von $g(x) = f(\frac{L}{4} + s)$ sind $c'_r = i^r c_r$ (als Funktion von s , c_r sind die Fourier Koeffizienten von $f(x)$).

- $f(\frac{L}{4} + s) = -f(\frac{L}{4} - s)$ ungerade Funktion von s , [$g(s) = -g(-s)$]

$$\Rightarrow \begin{cases} a'_r = 0 \\ c'_r = -\frac{i}{2} b'_r = i^r c_r = i^r \frac{1}{2} (a_r - ib_r) \\ c'_{-r} = \frac{i}{2} b'_r = i^{-r} c_{-r} = i^{-r} \frac{1}{2} (a_r + ib_r) \end{cases}$$

Da a_r, b_r und a'_r, b'_r reell sind, folgt: $a_{r'} = 0$ für $r' = 2r$ gerade, $b_{r'} = 0$ für $r' = 2r + 1$ ungerade, [$c'_{r'}$ rein imaginär]

- $f(\frac{L}{4} + s) = f(\frac{L}{4} - s)$ gerade Funktion von s , [$g(s) = g(-s)$]

$$\Rightarrow \begin{cases} b'_r = 0 \\ c'_r = \frac{1}{2} a'_r = i^r c_r = i^r \frac{1}{2} (a_r - ib_r) \\ c'_{-r} = \frac{1}{2} a'_r = i^{-r} c_{-r} = i^{-r} \frac{1}{2} (a_r + ib_r) \end{cases}$$

$\Rightarrow b_{2r} = a_{2r+1} = 0$, siehe Beispiel 1: $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sin[(2r+1)\omega t]}{2r+1}$

2.8 Theorem von Parseval

Theorem:

$$\boxed{\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} |f(x)|^2 dx = \sum_{r=-\infty}^{\infty} |c_r|^2}$$

Erhaltungssatz: Die Summe der Betragsquadrate der komplexen Fourier Koeffizienten ist gleich dem Mittelwert von $|f(x)|^2$ über eine Periode.

Beweis: Betrachte zwei (komplexwertige) Funktionen:

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{\frac{2\pi i r x}{L}}, \quad g(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma_r e^{\frac{2\pi i r x}{L}}$$

mit komplexen Fourier Koeffizienten c_r, γ_r . Es gilt:

$$f(x)g(x)^* = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r g(x)^* e^{\frac{2\pi i r x}{L}}$$

Integration über eine Periode L (mit Faktor $1/L$) liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x)g(x)^* dx &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} g(x)^* e^{\frac{2\pi i r x}{L}} dx \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r \left[\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} g(x) e^{-\frac{2\pi i r x}{L}} dx \right]^* \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r \gamma_r^* \end{aligned}$$

wegen $\gamma_r = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} g(x) e^{-\frac{2\pi i r x}{L}} dx$.

Mit $g(x) = f(x)$ folgt $\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} |f(x)|^2 dx = \sum_{r=-\infty}^{\infty} |c_r|^2$. □

Beispiel 6:

Benutze das Theorem von Parseval und die Fourier Reihe von $f(x) = x^2$ (Beispiel 3) um $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4}$ zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{4}{3} + 16 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\pi^2 r^2} \cos\left(\frac{\pi r x}{2}\right), \quad -2 \leq x \leq 2 \\
 \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (x^2)^2 dx &= \frac{1}{20} x^5 \Big|_{-2}^2 = \frac{16}{5} \\
 \sum_{r=-\infty}^{\infty} |c_r|^2 &\stackrel{(*)}{=} \left(\frac{1}{2} a_0\right)^2 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_r}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_r}{2}\right)^2 \right] \\
 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{16(-1)^r}{\pi^2 r^2}\right)^2 \\
 &= \frac{16}{9} + \frac{(16)^2}{2\pi^4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} \\
 \text{Parseval : } \frac{16}{5} &= \frac{16}{9} + \frac{(16)^2}{2\pi^4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} \\
 \Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) \frac{2\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{90}.
 \end{aligned}$$

$$(*) \ c_r = \frac{1}{2}(a_r - ib_r), \ c_{-r} = \frac{1}{2}(a_r + ib_r)$$

3 Integraltransformationen

3.1 Fourier Transformationen

periodische Funktion $f(t)$ \rightarrow Funktion $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$
 $f(t + T) = f(t)$ unendliches Intervall
 $T =$ endliches Intervall keine Periodizität verlangt

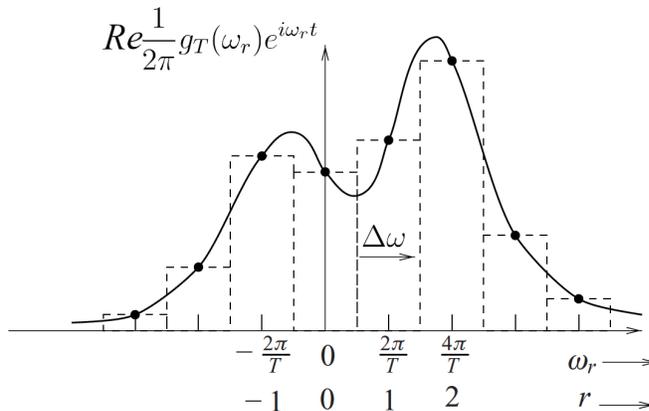
Fourier Reihe $\xrightarrow{T \rightarrow \infty}$ Fourier Transformation

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{i\frac{2\pi}{T}rt} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{i\omega_r t}, \quad \omega_r = \frac{2\pi}{T}r$$

Voraussetzung: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ endlich

$$c_r = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_r t} dt \text{ mit } \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(u) e^{-i\omega_r u} du e^{i\omega_r t} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \frac{1}{2\pi} g_T(\omega_r) e^{i\omega_r t}, \quad g_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(u) e^{-i\omega u} du \end{aligned}$$



$\Delta\omega \cdot \frac{1}{2\pi} g_T(\omega_r) e^{i\omega_r t}$ ist die Fläche des r -ten Rechteckes

$T \rightarrow \infty$: $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ infinitesimal

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \frac{1}{2\pi} g_T(\omega_r) e^{i\omega_r t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} g_{\infty}(\omega) e^{i\omega t}$$

$$g_{\infty}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{-i\omega u}$$

Inversionstheorem von Fourier

Definitionen:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad \text{Fourier Transformation}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{inverse Fourier Transformation}$$

Bemerkungen:

1. Existenz von $\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\omega) = g_{\infty}(\omega) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega)$ wird ohne Beweis angenommen
2. Aufteilung der konstanten Faktoren $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist Konvention, nur das Produkt muss $\frac{1}{2\pi}$ sein

Beispiel: Finde die Fourier Transformation von

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\lambda t} & t \geq 0 \ (\lambda > 0) \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dt 0 e^{-i\omega t} + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} e^{-i\omega t}$$

$$= 0 + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-(\lambda+i\omega)t}}{\lambda+i\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}(\lambda+i\omega)}$$

3.1.1 Die Unschärfe-Relation

Gauss- (oder Normal-) Verteilung: $f(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$, $-\infty < t < \infty$

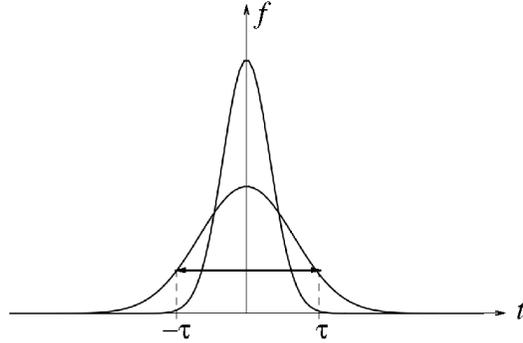
Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

bei $t = \pm\tau$:

$$e^{-1/2} \approx 0.61 \cdot \text{Maximalwert}$$

$$\text{Mittelwert} = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = 0$$



$$\text{Varianz} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - (\text{Mittelwert})^2 = \tau^2$$

$$\text{Standardabweichung} = \sqrt{\text{Varianz}} = \tau = \Delta t$$

Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} e^{-i\omega t} dt \quad / \quad x = \frac{t}{\tau}, \quad dx = \frac{dt}{\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\tau\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\tau\omega)^2} \quad (\text{siehe Kap.1, } k = \tau\omega) \end{aligned}$$

wieder eine Gaussverteilung (bis auf Normierung) mit Mittelwert=0, Varianz=1/τ² und Standardabweichung Δω = 1/τ.

Es gilt:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = 1$$

Interpretation: Je kürzer das (z.B. elektrische) Signal in der Zeit, desto größer ist der enthaltene Frequenzbereich.

Dies gilt auch für andere Paare von Variablen, die über eine Fouriertransformation verbunden sind, z.B. für die Wellenzahl k und die Raumkoordinate x eines Gauss'schen Wellenpakets:

$$\Delta k \cdot \Delta x = 1$$

Unschärfe-Relation in der Quantenmechanik: Wir führen die *de Broglie*- bzw. die *Einstein*-Relation für den Impuls bzw. die Energie ein:

$$p = \hbar k \text{ und } E = \hbar \omega$$

wobei $\hbar = (\text{Planck Konstante } h)/2\pi$, $p = \text{Impuls}$ und $E = \text{Energie}$.

In der Quantenmechanik ist $f(t)$ die Wellenfunktion und $|f|^2$ die Verteilung der Wellenintensität in der Zeit. Analog ist $|\tilde{f}|^2$ die Intensitätsverteilung in der Frequenz. Für eine Gaussverteilung $f(t)$ sind $|f|^2$ bzw. $|\tilde{f}|^2$ ebenfalls Gaussverteilungen mit Standardabweichungen $\frac{\tau}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2\tau}}$

$$\begin{aligned} \Delta E \cdot \Delta t &= \left(\hbar \frac{1}{\sqrt{2\tau}}\right) \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \\ \Delta p \cdot \Delta x &= \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

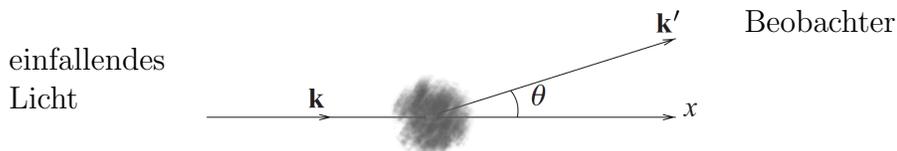
Für eine beliebige Verteilung $f(t)$ oder $f(x)$ gilt:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \quad \Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{Heisenberg'sche Unschärfe-Relation})$$

3.1.2 Fraunhofer Beugung

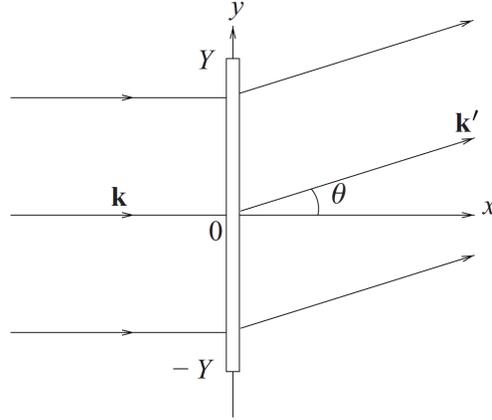
Wenn Licht auf ein teilweise lichtundurchlässiges (od. phasenveränderndes) Objekt trifft, entsteht ein Muster des transmittierten Lichtes, das Beugungsbild genannt wird. Insbesondere, wenn die Abmessung des Objektes klein gegenüber dem Abstand ist, bei dem das Licht beobachtet wird, spricht man von Fraunhofer Beugungsbild.

Wir betrachten monochromatisches Licht mit Wellenlänge λ . Die Richtung des einfallenden Lichtes ist durch den Wellenvektor \vec{k} beschrieben, dessen Länge $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl des Lichtes heißt.



Die beobachtete Amplitude (als Funktion von θ) ist eindeutig bestimmt durch die Amplitude und Phase des Lichtes am Objekt.

Beispiel: Beugungsgitter der Breite $2Y$. Licht mit Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ fällt senkrecht ein



Sei $f(y)$ die Amplitude des transmittierten Lichtes am Punkt $(0, y)$ pro Längeneinheit in die y -Richtung. $f(y)$ heißt Blenden-Funktion. Gitter und Strahl seien ∞ -ausgedehnt in z -Richtung. \hat{x} und \hat{y} bezeichnen Einheitsvektoren in x - bzw. y -Richtung. Die Gesamtamplitude an der Stelle $\vec{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y}$ ist die Überlagerung aller Elementarwellen, die am Beugungsgitter entstehen (das ist das Huygens-Fresnel Prinzip, s. 3.1.3):

$$A(\vec{r}_0) = \int_{-Y}^Y \frac{f(y)e^{-i\vec{k}'(\vec{r}_0 - y\hat{y})}}{|\vec{r}_0 - y\hat{y}|} dy$$

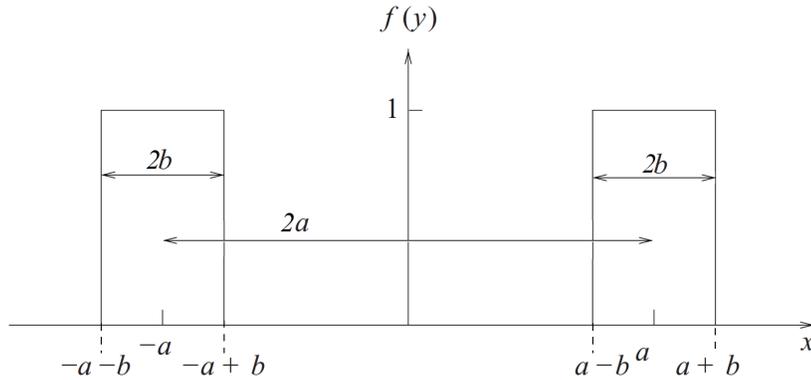
Wenn das Propagationsmedium auf beiden Seiten des Gitters dasselbe ist, dann ist $\vec{k}' = k \cos \theta \hat{x} + k \sin \theta \hat{y}$. Für $r_0 \gg Y$ gilt die Näherung

$$A(\vec{r}_0) = \frac{e^{i\vec{k}'\vec{r}_0}}{r_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky \sin \theta} dy$$

Hier wurde die Eigenschaft $f(y) = 0$ für $|y| > Y$ verwendet $\Rightarrow \int_{-Y}^Y \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$. Die Intensität in Richtung θ ist somit

$$I(\theta) = |A|^2 \frac{2\pi}{r_0^2} |\tilde{f}(q)|^2, \quad q = k \sin \theta, \quad \tilde{f}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)e^{-iqy}.$$

Beispiel:



Doppelspalt, $a > b$

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a-b}^{-a+b} e^{-iqy} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-b}^{a+b} e^{-iqy} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iqy}}{-iq} \right]_{-a-b}^{-a+b} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iqy}}{-iq} \right]_{a-b}^{a+b} \\
 &= \frac{-1}{iq\sqrt{2\pi}} \left[e^{-iq(-a+b)} - e^{-iq(-a-b)} + e^{-iq(a+b)} - e^{-iq(a-b)} \right] \\
 &= \frac{-1}{iq\sqrt{2\pi}} \left[e^{iqa}(e^{-iqb} - e^{iqb}) + e^{-iqa}(e^{-iqb} - e^{iqb}) \right] \\
 &= \frac{2}{q\sqrt{2\pi}} \sin(qb) [e^{iqa} + e^{-iqa}] = \frac{4 \cos(qa) \sin(qb)}{q\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}$$

Für die Intensität gilt

$$I(\theta) = \frac{16 \cos^2(qa) \sin^2(qb)}{q^2 r_0^2},$$

wobei r_0 der Abstand von der Mitte des Doppelspaltes ist und $q = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$. Wenn θ variiert, bekommen wir ein kompliziertes Muster von Maxima und Minima.

Frage: Was passiert für $\theta = 0$?

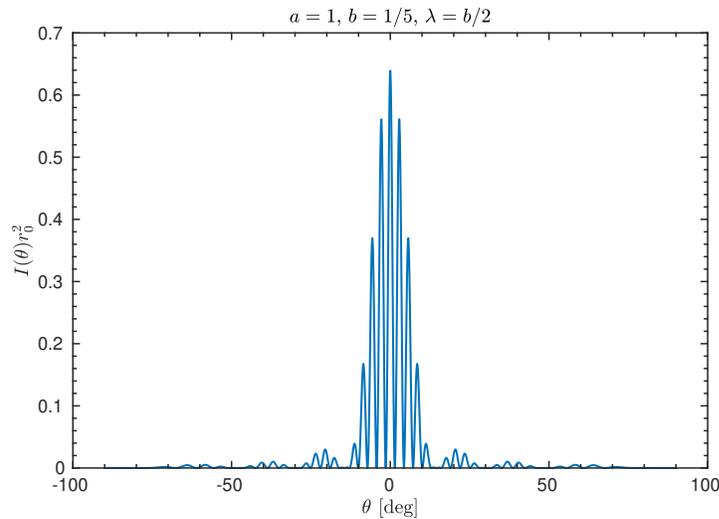
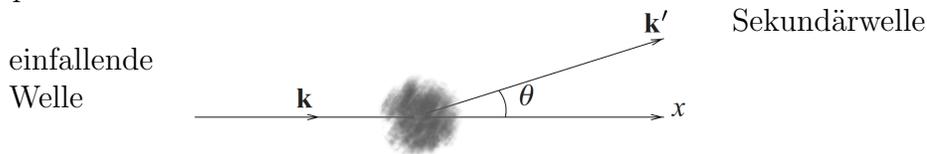


Figure 7: Fraunhofer Beugungsbild.

3.1.3 Huygens-Fresnel Prinzip

Alle Punkte einer unbehinderten Wellenfront zu einem bestimmten Zeitpunkt sind Quellen von sphärischen Sekundärwellen, mit der gleichen Frequenz wie die einfallende Welle. Die Amplitude des optischen Feldes an deinem beliebigen Punkt hinter der Wellenfront resultiert aus der Überlagerung von allen diesen Sekundärwellen (unter Berücksichtigung ihrer Amplituden und Phasen). Der Neigungsfaktor $K(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ multipliziert die Amplitude der sphärischen Wellen



$K(0) = 1$ Maximum in Vorwärtsrichtung

$K(\pi) = 0$ keine Welle rückwärts

Der Neigungsfaktor wird hier vernachlässigt.

Symmetrie entlang der z -Achse \Rightarrow 2d Problem:

$$\vec{k}' = k \cos \theta \hat{x} + k \sin \theta \hat{y} \text{ hat keine Komponente } \parallel \hat{z}$$

$$\vec{k}'(\vec{r}_0 - (y\hat{y} + z\hat{z})) = \vec{k}'(\vec{r}_0 - y\hat{y})$$

Alle Elementarwellen geben denselben Beitrag, $f(y) \rightarrow$ Amplituden pro Längeneinheit in y - und z -Richtung.

3.2 Die Dirac δ -Funktion

Die δ -Funktion (eigentlich Distribution) kann als ein sehr schmaler Puls (in Raum, Zeit, Dichte, etc.) dargestellt werden, der einen integrierten Effekt endlicher Größe produziert.

Formale Eigenschaften: $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$, aber $\int f(t)\delta(t-a)dt = f(a)^{(*)}$, vorausgesetzt, dass der Integrationsbereich $t = a$ einschließt, ansonsten ist das Integral Null \Rightarrow

$$\int_{-a}^b \delta(t)dt = 1 \quad \forall a, b > 0 \text{ und}$$

$$\int \delta(t-a)dt = 1 \text{ wenn } t = a \in \text{Integrationsbereich.}$$

Aus (*) folgt:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \delta(-t) \\ \delta(at) &= \frac{1}{|a|}\delta(t) \\ t\delta(t) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Beweis von $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

Sei $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')\frac{dt'}{a} = \frac{1}{a}f(0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt$$

Da $f(t)$ beliebig ist $\Rightarrow \delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

Sei $a = -b < 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-bt)dt &= \int_{\infty}^{-\infty} f\left(\frac{t'}{-b}\right)\delta(t')\frac{dt'}{-b} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t'}{-b}\right)\delta(t')dt' \\ &= \frac{1}{b}f(0) = \frac{1}{|a|}f(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt \\ \Rightarrow \delta(at) &= \frac{1}{|a|}\delta(t). \end{aligned}$$

Wir betrachten Integrale der Form

$$\int f(t)\delta(h(t))dt.$$

Mit einer Variablensubstitution $z = h(t)$ kann man zeigen

$$\delta(h(t)) = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|h'(t_i)|}$$

wobei t_i die Nullstellen von $h(t)$ sind [$h(t_i) = 0$] und $h' = \frac{dh}{dt}$.

Das obige Beispiel ist ein Spezialfall mit $h(t) = at$. Die Ableitung $\delta'(t)$ der δ -Funktion ist definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = \left[f(t)\delta(t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt = -f'(0)$$

und analog für höhere Ableitungen.

Oft braucht man die δ -Funktion im Raum und wir verallgemeinern ihre Definition in mehr als einer Dimension, z.B. die Ladungsdichte einer Punktladung q am Ort \vec{r}_0 ist

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

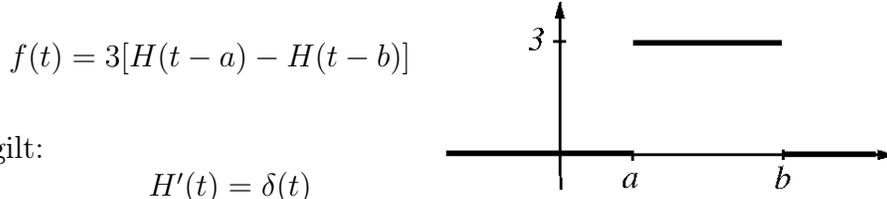
Es gilt:

$$\int_V \rho(\vec{r}_0)dV = \int_V q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} q & \vec{r}_0 \in V \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verwandt mit der δ -Funktion ist die Heaviside oder Stufenfunktion der Höhe Eins:



Sie ist unstetig bei $t = 0$ und gewöhnlich nimmt man $H(0) = 1/2$. Eine Kombination von Heaviside Funktionen kann eine Funktion, die konstant auf einem endlichen Bereich ist, darstellen, z.B.:



Beweis: Für beliebige Funktionen $f(t)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)H'(t)dt &= \left[f(t)H(t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)H(t)dt = f(\infty) - \int_0^{\infty} f'(t)dt \\ &= f(\infty) - \left[f(t) \right]_0^{\infty} = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt. \end{aligned}$$

3.2.1 Beziehung zw. δ -Funktion u. Fourier Transformation

Fourier Inversionstheorem:

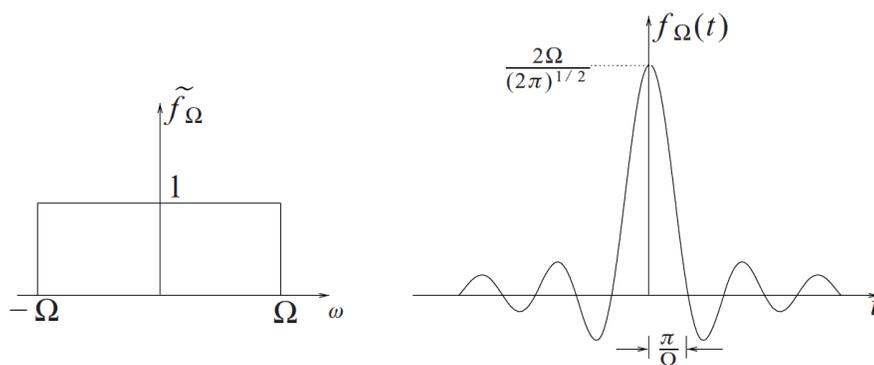
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{i\omega u} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} d\omega \right\} \end{aligned}$$

Vergleich mit der Definition der δ -Funktion zeigt

$$\delta(t - u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} d\omega \quad (*)$$

Die δ -Funktion bei $t = u$ ist hier als Überlagerung aller Frequenzen mit der gleichen Amplitude und in Phase bei $t = u$. Dies suggeriert folgende

Darstellung der δ -Funktion:



Sei \tilde{f}_Ω wie im Bild gegeben. Dann

$$f_\Omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} 1 \times e^{i\omega t} d\omega = \frac{2\Omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}$$

Es gilt $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} f_\Omega(t) = \sqrt{2\pi} \delta(t)$ [siehe (*)] oder

$$\delta(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$$

Es gibt andere Darstellungen der δ -Funktion, z.B. als Grenzwert von Dreiecks- oder Gauss-Verteilungen von Frequenzen. Wichtig dabei ist, dass die Fläche unter so einer Kurve bekannt ist und keine Divisionen mit Null auftreten.

Aus (*) folgt, dass die δ -Funktion reell ist

$$\delta^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \delta(-t) = \delta(t)$$

Die Fourier Transformation der δ -Funktion ist

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

3.3 Eigenschaften der Fourier Transformation

Wir bezeichnen die Fourier Transformation von $f(t)$ als $\tilde{f}(\omega)$ oder $\mathcal{F}[f(t)]$.

- (i) **Ableitung:** $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega\tilde{f}(\omega)$ Notation: $f'(t) = \frac{df}{dt}$
 Beweis: partielle Integration

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t)e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega\tilde{f}(\omega)\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass $f(t) \rightarrow 0$ wenn $t \rightarrow \pm\infty$. Das muss so sein, weil $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ endlich vorausgesetzt wird.

- (ii) **Integration:** $\mathcal{F}[\int^t f(s)ds] = \frac{1}{i\omega}\tilde{f}(\omega) + \sqrt{2\pi}\alpha\delta(\omega)$ wobei $\int^t f(s)ds = F(t) + \alpha$ mit $F'(t) = f(t)$ und Integrationskonstante α .
 Beweis: partielle Integration

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[F(t) + \alpha] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[F(t) \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\omega} f(t)e^{-i\omega t} dt + \sqrt{2\pi}\alpha\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{i\omega}\tilde{f}(\omega) + \sqrt{2\pi}\alpha\delta(\omega)\end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass $F(t) \rightarrow 0$ wenn $t \rightarrow \pm\infty$.

- (iii) **Skalierung:** $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
 Beweis: Sei $a > 0$, Substitution $u = at$, $du = a dt$

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u} du = \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Analog für $a < 0$.

- (iv) **Translation:** $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{i\omega a}\tilde{f}(\omega)$
 Beweis: Substitution: $u = t + a$, $du = dt$

$$\mathcal{F}[f(t+a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u-a)} du = e^{-i\omega a}\tilde{f}(\omega)$$

(v) **Exponentielle Multiplikation:** $\mathcal{F}[e^{\alpha t} f(t)] = \tilde{f}(\omega + i\alpha)$, wobei α reell, imaginär oder komplex sein kann.

$$\text{Beweis: } \mathcal{F}[e^{\alpha t} f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega+i\alpha)t} dt = \tilde{f}(\omega + i\alpha)$$

Beispiel: Wir betrachten eine Radionachricht die übertragen werden muss und als $f(t)$ dargestellt wird. Die Nachricht kann elektronisch einem konstanten Signal a überlagert werden, so dass $a + f(t)$ nie negativ wird. Die Summe $a + f(t)$ kann dann als Modulation eines Trägersignals mit Frequenz ω_c angesehen werden. Die übertragene Amplitude ist $g(t) = A[a + f(t)]e^{i\omega_c t}$ in komplexer Notation. Aus (v) mit $\alpha = i\omega_c$ folgt:

$$\tilde{g}(\omega) = A a \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_c) + A \tilde{f}(\omega - \omega_c)$$

Dies bedeutet eine Verschiebung des gesamten Frequenzspektrums um ω_c (bis auf ein Beitrag bei $\omega = \omega_c$). Indem man verschiedene Trägerfrequenzen ω_c benutzt, lassen sich Signale separieren.

3.3.1 Ungerade und gerade Funktionen

Wenn $f(t)$ un-/gerade ist, gibt es alternative Formen des Fourier Inversionstheorems. Wir betrachten eine ungerade Funktion $f(-t) = -f(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Wir benutzen hier, dass $f(t)$ und $\sin(\omega t)$ ungerade sind, aber $\cos(\omega t)$ gerade ist. Wir sehen sofort, dass $\tilde{f}(-\omega) = -\tilde{f}(\omega)$, d.h. $\tilde{f}(\omega)$ ungerade ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \sin(\omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sin(\omega t) \left\{ \int_0^{\infty} f(u) \sin(\omega u) du \right\} \end{aligned}$$

Wir definieren das Sinus-Fourier-Transformations-Paar

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(\omega) \sin(\omega t) d\omega \end{aligned}$$

Bemerkung: In diesen Definitionen brauchen wir, dass $f(t)$ und $\tilde{f}_s(\omega)$ nur für positive t bzw. ω definiert sind.

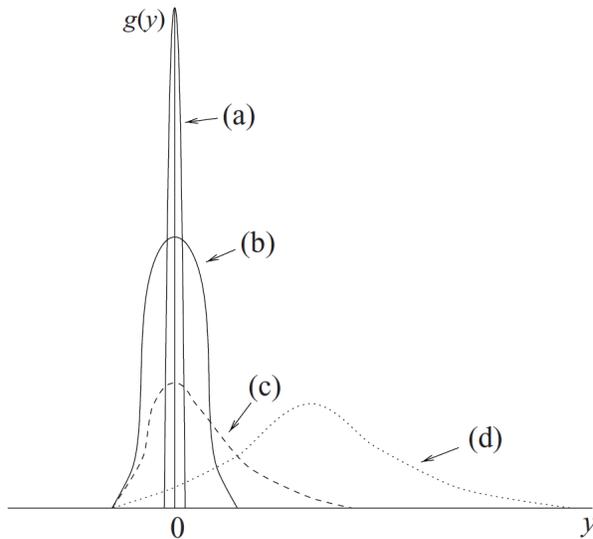
Für eine gerade Funktion $f(-t) = f(t)$ kann man ganz analog das Kosinus-Fourier-Transformations-Paar definieren, in den Formeln wird $\sin(\omega t)$ durch $\cos(\omega t)$ ersetzt.

3.3.2 Konvolution und Dekonvolution

Oft arbeitet man mit experimentellen Apparaten, die in ihrer Genauigkeit eine Bandbreite haben, also die exakte Messung gewissermaßen "verschmieren". Dieser Vorgang wird durch das Konvolutionsintegral beschrieben. Dabei wird die (theoretisch) exakte Funktionskurve $f_{\text{th}}(x)$ mit einer Apparatfunktion $g(x)$ gefaltet. $g(x)$ sollte möglichst schmal sein, entsprechend einem sehr präzisen Messapparat. Das Ergebnis ist die Messkurve $f_{\text{exp}}(x)$:

Konvolution (Faltung): $f_{\text{exp}} = f_{\text{th}} * g \Leftrightarrow f_{\text{exp}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{\text{th}}(y)g(x - y)$

Die exakte Messapparatur entspricht $g(x - y) = \delta(x - y)$ und $f_{\text{exp}} = f_{\text{th}}$.



Apparatfunktionen $g(y)$:

- (a) ideale Messapparatur
- (b) typische Messapparatur
- (c-d) biases, die Messwerte

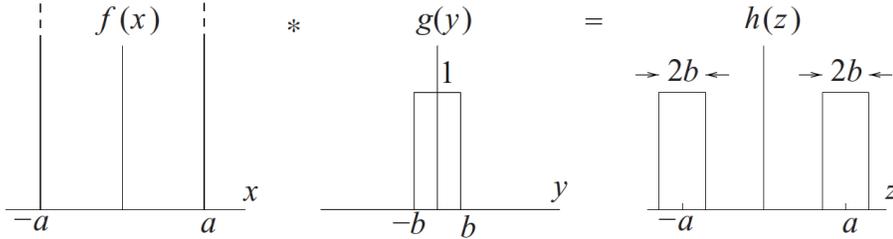
höher als die exakten

Werte liefern:

$$z = x - y > 0$$

Die Konvolution ist kommutativ $f_{\text{th}} * g = g * f_{\text{th}}$, assoziativ $(f * (g * h) = (f * g) * h)$ und distributiv $(f * (g + h) = f * g + f * h)$.

Beispiel:



$$\begin{aligned}
 f(x) &= \delta(x+a) + \delta(x-a) \\
 h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(y+a) + \delta(y-a)]g(x-y)dy \\
 &= g(x+a) + g(x-a)
 \end{aligned}$$

Die Fourier Transformation der Konvolution $h = f * g$ ist:

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)g(x-y) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x-y)e^{-ikx} \right\}
 \end{aligned}$$

Wir substituieren $u = x - y$ im zweiten Integral:

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} du g(u)e^{-ik(u+y)} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)e^{-iky} \int_{-\infty}^{\infty} du g(u)e^{-iku} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \sqrt{2\pi} \tilde{g}(k) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)
 \end{aligned}$$

Die Fourier Transformation der Konvolution $f * g$ ist das Produkt der Fourier Transformationen \tilde{f} und \tilde{g} multipliziert mit $\sqrt{2\pi}$ (Konvolutionstheorem).

Analog kann man zeigen:

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) * \tilde{g}(k)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_1)e^{ik_1x} dk_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k_2)e^{ik_2x} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \tilde{f}(k_1) \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{g}(k_2) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k_1+k_2-k)x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \tilde{f}(k_1) \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{g}(k_2) \delta(k_2 - (k - k_1)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k - k_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) * \tilde{g}(k)
\end{aligned}$$

Beispiel: Wir suchen die Fourier Transformation der Blenden-Funktion aus dem Beispiel der Beugung. Dies ist aus der Faltung $f * g$ von

$$\begin{aligned}
(i) \quad \tilde{f}(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)e^{-iqx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + a)e^{-iqx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-iqa} + e^{iqa}) = \frac{2 \cos(qa)}{\sqrt{2\pi}} \\
(ii) \quad \tilde{g}(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-iqx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iqx}}{-iq} \right]_{-b}^b \\
&= \frac{i}{q\sqrt{2\pi}} (e^{-iqb} - e^{iqb}) = \frac{2 \sin(qb)}{q\sqrt{2\pi}} \\
\Rightarrow \mathcal{F}[f * g] &= \sqrt{2\pi} \tilde{f} \tilde{g} = \frac{4 \cos(qa) \sin(qb)}{q\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

das gleiche Ergebnis wie im Beispiel in 3.1.2.

3.3.3 Theorem von Parseval

Wie bei Fourier Reihen gibt es eine Beziehung zwischen dem Integral des Betragsquadrates der Funktion und, diesmal, dem Integral des Betragsquadrates der Fourier Transformaten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f(x)f^*(x)]|_{k=0} \quad (*) \\
\mathcal{F}[f(x)f^*(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k)\tilde{f}^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \tilde{f}(k_1)\tilde{f}^*(k-k_1) \\
\mathcal{F}[f^*]|_{-k_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ik_1x} f^*(x) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ik_1x} f^*(x) \right)^* = \left(\mathcal{F}[f]|_{k_1} \right)^* \\
\Rightarrow \mathcal{F}[f(x)f^*(x)]|_{k=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 |\tilde{f}(k_1)|^2 \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 |\tilde{f}(k_1)|^2
\end{aligned}$$

Beispiel: Die Amplitude eines gedämpften, harmonischen Oszillators ist

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{-i}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left[e^{-it(\omega-\omega_0-i/\tau)} - e^{-it(\omega+\omega_0-i/\tau)} \right] dt \\
&= \frac{-i}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{e^{-it(\omega-\omega_0-i/\tau)}}{-i(\omega-\omega_0-i/\tau)} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{e^{-it(\omega+\omega_0-i/\tau)}}{-i(\omega+\omega_0-i/\tau)} \right]_0^{\infty} \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{\omega+\omega_0-i/\tau} - \frac{1}{\omega-\omega_0-i/\tau} \right\}
\end{aligned}$$

$|\tilde{f}(\omega)|^2$ beschreibt die Energie pro Frequenzeinheit (das so genannte Energiespektrum), $|f(t)|^2$ proportional zur Summe der kinetischen und potentiellen Energie des Oszillators (bei schwacher Dämpfung). Das Theorem von Parseval zeigt die Äquivalenz dieser zwei alternativen Spezifikationen der totalen Energie.

3.3.4 Fourier Transformation in höheren Dimensionen

Zum Beispiel in drei Dimensionen definieren wir die (räumliche) Fourier Transformation $f(x, y, z)$ durch

$$\tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int f(x, y, z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} dx dy dz$$

und ihre Inverse durch

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} dk_x dk_y dk_z$$

Mit der Vektornotation $\underline{k} = (k_x, k_y, k_z)$ und $\underline{r} = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\underline{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\underline{r}) e^{-i\langle \underline{k}, \underline{r} \rangle} d\underline{r} \\ f(\underline{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\underline{k}) e^{i\langle \underline{k}, \underline{r} \rangle} d\underline{k} \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen folgt die drei-dimensionale Darstellung der δ -Funktion:

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\langle \underline{k}, \underline{r} - \underline{r}' \rangle} d\underline{k}$$

Die Verallgemeinerung auf eine beliebige Zahl von Dimensionen ist offensichtlich.

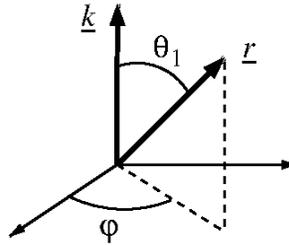
Beispiel: Fourier Transformation einer rotationssymmetrischen Funktion

$$f(\underline{r}) = f(r) \quad (r = |\underline{r}| = \sqrt{\langle \underline{r}, \underline{r} \rangle})$$

Wir führen für \underline{r} Polarkoordinaten ein,

wobei der Vektor \underline{k} der Fourier Trans-

formation in Richtung $\theta_1 = 0$ liegt.



$$\begin{aligned} d\underline{r} &= r^2 \sin \theta_1 dr d\theta_1 d\varphi = r^2 dr d\underline{x}' \quad (\underline{r} = r\underline{x}') \\ \langle \underline{k}, \underline{r} \rangle &= k r \cos \theta_1 \quad \text{wobei} \quad k = |\underline{k}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\underline{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr r^2 f(r) \int_{S_2} e^{-ikr \cos \theta_1} d\underline{x}' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr r^2 f(r) \int_0^\pi d\theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikr \cos \theta_1} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr 2\pi r^2 f(r) \int_0^\pi d\theta_1 \sin \theta_1 e^{-ikr \cos \theta_1} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr 2\pi r^2 f(r) \left[\frac{e^{-ikr \cos \theta_1}}{ikr} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr 2\pi r^2 f(r) \frac{1}{ikr} \left[e^{ikr} - e^{-ikr} \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr 4\pi r^2 f(r) \frac{\sin(kr)}{kr}
\end{aligned}$$

Wenn $\underline{k} = 0$, so $k \rightarrow 0$, $\frac{\sin(kr)}{kr} \rightarrow 1$ und somit ist $\tilde{f}(0)$ das Integral von $f(\underline{r})$ über \mathbb{R}^3 .

Beispiel: In zwei Dimensionen, für $f(\underline{r}) = f(r)$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\underline{k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr r f(r) \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr 2\pi r f(r) \underbrace{\mathcal{J}_0(kr)}_{\text{Bessel Funktion}}
\end{aligned}$$

4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition: Gleichungen, die nur gewöhnliche (keine partiellen) Ableitungen enthalten. Sie beschreiben eine Beziehung zwischen Ableitungen einer abhängigen Variable y nach der unabhängigen Variable x .

Klassifizierung:

- *Ordnung* = Ordnung der höchsten Ableitung
- *Grad* = Potenz der höchsten Ableitung, nachdem die Gleichung in eine Form gebracht worden ist, die nur ganzzahlige Potenzen von Ableitungen enthält.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{dx^3} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^{3/2} + x^2y &= 0 \\ \Rightarrow x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 &= \left(-\frac{d^3y}{dx^3} - x^2y \right)^2 \end{aligned}$$

Ordnung = 3, Grad = 2

4.1 Allgemeine Betrachtungen

Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Ordnung n enthält n freie *Integrationskonstanten*. Sie werden durch geeignete (unabhängige und selbstkonsistente) *Randbedingungen* bestimmt. Einige Differentialgleichungen vom Grad > 1 besitzen auch *singuläre Lösungen*, die keine freie Konstanten enthalten und nicht aus der allgemeinen Lösung gefunden werden können.

4.1.1 Allgemeine Form der Lösung

Betrachte das inverse Problem: Gegeben sei eine Gruppe von Funktionen $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ (*). Jedes Element in der Gruppe entspricht einer Wahl von a_1, a_2, \dots, a_n (mindestens ein a_i soll unterschiedlich für unterschiedliche Elemente sein). Finde die Differentialgleichung, für die eine beliebige Funktion in der Gruppe eine Lösung ist.

Die Differentialgleichung darf nicht von den a_i 's abhängen \Rightarrow leite (*) n -mal ab $\Rightarrow (n + 1)$ Gleichungen, eliminiere a_i 's \Rightarrow Differentialgleichung n ter Ordnung.

Beispiel:

$$y = a_1 \sin x + a_2 \cos x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \cos x - a_2 \sin x \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a_1 \sin x - a_2 \cos x \quad (3)$$

$$(1) + (3) \quad : \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{Differentialgleichung 2. Ordnung}$$

Die intuitive Umkehrung dieses Argumentes ist: Eine Differentialgleichung n ter Ordnung enthält n freie Konstanten (allgemeiner Beweis ist schwierig). Wir brauchen n Randbedingungen, z.B.: $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ oder $y(x_1)$ und $n - 1$ der folgenden Werte $\frac{dy}{dx}(x_1), \frac{d^2y}{dx^2}(x_1), \dots, \frac{d^n y}{dx^n}(x_1)$ für gleiches x_1 .

4.1.2 Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen spielen eine wesentliche Rolle für die Beschreibung physikalischer Prozesse. Sie haben die Form

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (**)$$

Falls $f(x) = 0$ heisst die Differentialgleichung *homogen*, andernfalls ist sie *inhomogen*. Die allgemeine Lösung hat n freie Parameter, die durch die Randbedingungen fixiert werden.

Wir betrachten zuerst das homogene Problem:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Wir suchen n *linear unabhängige* Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist dann die *lineare* Kombination

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Wie bestimmen wir ob Lösungen y_1, \dots, y_n linear unabhängig sind? Wir betrachten

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$$

und leiten $(n-1)$ -mal ab: (Notation: $y' = \frac{dy}{dx}$, $y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$)

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) = 0$$

⋮

$$c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

↑
↓

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{\equiv Y, n \times n \text{ Wronski-Matrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition: *Wronski-Determinante* der Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n :

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \det(Y)$$

Die Funktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ definiert in einem Intervall I sind *linear unabhängig*, wenn $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ auf dem Intervall I . Dies ist eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung.

Wenn $f(x) \neq 0$ in (**), brauchen wir eine *spezielle Lösung* $y_{\text{sp}}(x)$. Die allgemeine Lösung ist dann $y(x) = y_h(x) + y_{\text{sp}}(x)$. $y_{\text{sp}}(x)$ kann irgendeine Lösung von (**) sein, vorausgesetzt, dass y_{sp} und y_h linear unabhängig sind. Die spezielle Lösung enthält keine freien Parameter. Die Differenz zwischen zwei speziellen Lösungen kann durch eine unterschiedliche Wahl der freien Parameter der homogenen Lösung ausgedrückt werden. Es seien

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) + y_{\text{sp},1}(x) \quad \text{und} \\ &= \sum_{i=1}^n d_i y_i(x) + y_{\text{sp},2}(x) \end{aligned}$$

zwei Lösungen von (**), die dieselben Randbedingungen erfüllen. Daraus folgt

$$y_{\text{sp},1}(x) - y_{\text{sp},2}(x) = \sum_{i=1}^n (d_i - c_i) y_i(x).$$

Die Randbedingungen bestimmen die unbekanntnen freien Parameter der Lösung des homogenen Problems y_h . Es ist essentiell, dass die Randbedingungen in die *gesamte* Lösung $y = y_h + y_{\text{sp}}$ eingebaut werden (also *nachdem* die spezielle Lösung y_{sp} bestimmt wurde). Beispiel:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = x$$

Lösung:

$$y(x) = \underbrace{Ae^{2x} + Be^{-x}}_{=y_h(x)} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x}_{=y_{\text{sp}}(x)}$$

Randbedingungen $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Falsch: Bestimme A, B aus homogenen Lösung

$$\begin{cases} y_h(0) = A + B = 1 \\ y'_h(0) = 2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 1/3, B = 2/3$$

aber dann $y(0) = 5/4 \quad \nabla$

Richtig:

$$\begin{cases} y(0) = A + B + 1/4 = 1 \\ y'(0) = 2A - B - 1/2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 5/12, B = 1/3$$

$$y(x) = \frac{5}{12}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x$$

4.2 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wenn a_m in (**) Konstanten statt Funktionen von x sind, dann lautet die lineare Gleichung

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \quad (4)$$

Wir suchen die Lösung $y(x) = y_h(x) + y_{\text{sp}}(x)$.

4.2.1 Lösung des homogenen Problems $y_h(x)$

$$a_n \frac{d^n y_n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_n}{dx} + a_0 y_n = f(x) \quad (3)$$

y_h enthält n freie Konstanten.

Methode: Versuche die Lösung der Form $y_h = Ae^{\lambda x}$

\Rightarrow Einsetzen, Dividieren durch $Ae^{\lambda x}$

$$\Rightarrow a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Polynomiale Gleichung der Ordnung n : charakteristische Gleichung

Im allgemeinen besitzt die charakteristische Gleichung n Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die in drei Kategorien fallen:

(i) *Alle Nullstellen sind reell und verschieden:*

In diesem Fall sind die Lösungen von (3)

$$\begin{aligned} y_m(x) &= e^{\lambda_m x} \quad m = 1, \dots, n \\ W &= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \\ &= \left(\prod_{m=1}^n e^{\lambda_m x} \right) \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde Matrix}} \end{aligned}$$

Wenn λ_m alle verschieden sind, dann sind die Lösungen linear unabhängig, weil $W \neq 0$. Die Lösung des homogenen Problems ist

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

(ii) *Einige Nullstellen sind komplex.*

Wenn die Koeffizienten a_m der charakteristischen Gleichung reell sind

und $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle ist, dann ist auch das komplex konjugierte $\lambda^* = \alpha - i\beta$ eine Nullstelle. In diesem Fall schreiben wir

$$\begin{aligned} c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} &= e^{\alpha x} [d_1 \cos(\beta x) + d_2 \sin(\beta x)] \\ &= A e^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (\beta x + \phi) \end{aligned}$$

wobei A und ϕ Konstanten sind.

(iii) *Einige Nullstellen sind mehrfach entartet:*

Wenn z.B. λ_1 k -mal ($k > 1$) als Nullstelle der charakteristischen Gleichung vorkommt, dann ist $W = 0$ (k Spalten sind gleich). Wir müssen deswegen ($k - 1$) weitere Lösungen finden, die untereinander und von $e^{\lambda_{k+1}x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ linear unabhängig sind. Man kann durch Einsetzen in (3) zeigen, dass

$$x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

auch Lösungen sind. Durch Berechnung der Wronski-Determinante kann man ferner zeigen, dass sie zusammen mit den anderen n linear unabhängige Lösungen bilden. Dann

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) e^{\lambda_1 x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + c_{k+2} e^{\lambda_{k+2} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Wenn mehr als eine Nullstelle mehrfach sind, z.B.: λ_1 k -fach und λ_2 l -fach entartete Nullstellen sind ($k > 1, l > 1$), dann

$$\begin{aligned} y_h(x) &= (c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) e^{\lambda_1 x} \\ &+ (c_{k+1} + c_{k+2} x + \dots + c_{k+l} x^{l-1}) e^{\lambda_2 x} \\ &+ c_{k+l+1} e^{\lambda_{k+l+1} x} + c_{k+l+2} e^{\lambda_{k+l+2} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}. \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = e^x$$

Das homogene Problem $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ mit der 2-fachen Nullstelle $\lambda = 1 \Rightarrow y_h = (c_1 + c_2 x) e^x$. Verifiziere, dass $c_2 x e^x$ eine Lösung ist.

4.2.2 Die spezielle Lösung $y_{\text{sp}}(x)$

Es gibt kein allgemeines Verfahren um die spezielle Lösung $y_{\text{sp}}(x)$ zu finden. Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und einer einfachen rechten Seite $f(x)$ kann y_{sp} oft durch Inspektion oder durch eine parametrisierte Form von $y_{\text{sp}}(x)$, die $f(x)$ ähnelt (*Verfahren der unbestimmten Parameter*) gefunden werden. Standard Parametrisierungen sind:

- (i) Wenn $f(x) = ae^{rx}$ dann versuche $y_{\text{sp}}(x) = be^{rx}$.
- (ii) Wenn $f(x) = a_1 \sin(rx) + a_2 \cos(rx)$ (a_1 od. a_2 können Null sein), dann versuche $y_{\text{sp}}(x) = b_1 \sin(rx) + b_2 \cos(rx)$
- (iii) Wenn $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$ (einige a_m können Null sein), dann versuche $y_{\text{sp}}(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_Nx^N$
- (iv) Wenn $f(x)$ die Summe oder das Produkt von Testfunktionen in (i)-(iii) ist, dann versuche $y_{\text{sp}}(x) =$ Summe oder Produkt der entsprechenden Testfunktionen.

Das Verfahren scheitert, wenn die Testfunktion in $y_h(x)$ enthalten ist. Dann muss die Testfunktion mit der kleinsten ganzzahligen Potenz von x multipliziert werden, so dass sie keinen Term enthält, der schon in y_h vorkommt. Die unbestimmten Koeffizienten der Testfunktion können durch Einsetzen in (4) bestimmt werden. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Koeffizienten der speziellen Lösung *keine* freien Parameter sind, wie die der Lösung des homogenen Problems. Deswegen ist die Zahl der notwendigen Randbedingungen um die freien Parameter der allgemeinen Lösung zu finden, unverändert durch das Hinzufügen der speziellen Lösung.

Beispiel 1:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

$y_{\text{sp}}(x) = be^x$ geht nicht, da e^x bereits in y_h ist.

Versuche $y_{\text{sp}}(x) = bx^2e^x \Rightarrow$ Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2bx^2e^x + bx^2e^x) - 2(2bx^2e^x + bx^2e^x) + bx^2e^x &\stackrel{!}{=} e^x \\ 2be^x + 2bx^2e^x + 2bx^2e^x + bx^2e^x - 2(2bx^2e^x + bx^2e^x) + bx^2e^x &= e^x \\ \Rightarrow 2be^x = e^x \quad \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow y_{\text{sp}}(x) = \frac{1}{2}x^2e^x \end{aligned}$$

4.2.3 Die allgemeine Lösung $y_h(x) + y_{sp}(x)$

Die gesamte Lösung von (4) ist die Summe der Lösung der homogenen Gleichung y_h und der speziellen Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_{sp}(x)$. Die Randbedingungen müssen für $y(x)$ erfüllt sein und bestimmen die freien Parameter, die in y_h enthalten sind.

Beispiel 1: Lösung $y(x) = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$

4.3 Lineare Gleichungen der Ordnung 2

Eine homogene, lineare, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung hat die allgemeine Form

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (5)$$

wobei $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ und $p(x)$, $q(x)$ als Funktion von x gegeben sind. Die allgemeine Form der Lösung von (5) ist

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig sind und c_1 und c_2 Integrationskonstanten sind. y_1 und y_2 sind linear unabhängig wenn sie nicht proportional zueinander sind: $y_2 \neq \text{const.}y_1$. Oder man berechnet die Wronski-Determinante

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

Wenn $W(x) \neq 0 \forall x \in \text{Intervall } I$, dann sind y_1 und y_2 linear unabhängig in I . Einen alternativen Ausdruck für W gewinnen wir aus der Ableitung

$$W' = y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2y_1'' - y_2'y_1' = y_1y_2'' - y_2y_1''.$$

Da y_1 und y_2 Gl.(5) erfüllen, bekommen wir

$$\begin{aligned} W' &= -y_1(py_2' + qy_2) + (py_1' + qy_1)y_2 \\ &= -p(y_1y_2' - y_1'y_2) = -pW \end{aligned}$$

Integration liefert

$$W(x) = G \exp\left(- \overbrace{\int^x p(u)du}^{\text{indefinites Integral}}\right)$$

wobei G eine Konstante ist. Wenn $p(x) \equiv 0$, dann ist W konstant.

Die inhomogene Gleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (6)$$

hat die Lösung

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_{\text{sp}}(x)$$

wobei y_1 und y_2 die Lösungen der homogenen Gl.(5) sind und y_{sp} irgendeine spezielle Lösung von (6) ist, die linear unabhängig von y_1 und y_2 ist.

Im folgenden beschreiben wir ein Verfahren zur Lösung der homogenen Gl.(5).

4.4 Reguläre und singuläre Punkte einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Ab jetzt ist $y(x)$ eine reelle Funktion einer reellen Variable x . Wir ersetzen $y(x)$ durch eine komplexe Funktion $y(z)$ einer komplexen Variable z und betrachten

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0 \quad (7) \quad (' = \frac{d}{dz})$$

Wenn die Funktionen $p(z)$ und $q(z)$ an der Stelle $z = z_0$ endlich sind und als Potenzreihen

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z - z_0)^n, \quad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n$$

dargestellt werden können, dann sind $p(z)$ und $q(z)$ *analytische Funktionen* bei $z = z_0$ und z_0 ein *regulärer Punkt*. Hingegen wenn $p(z)$, $q(z)$ oder beide, bei $z = z_0$ divergent sind, dann ist z_0 ein *singulärer Punkt*.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung, die bei $z = z_0$ singulär ist, kann trotzdem eine an dieser Stelle endliche Lösung besitzen. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass $(z - z_0)p(z)$ und $(z - z_0)^2 p(z)$ beide bei $z = z_0$ analytisch sind. Solche Punkte heißen *reguläre, singuläre Punkte*. Wenn die Gleichung diese beiden Bedingungen nicht erfüllt, dann hat sie dort eine *wesentliche Singularität*.

Beispiel: *Legendre Differentialgleichung*

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + l(l + 1)y = 0$$

wobei l eine Konstante ist.

$z = 0$ ist ein regulärer Punkt und

$z = \pm 1$ sind reguläre, singuläre Punkte.

Beweis: in Standardform (5) bringen

$$\begin{aligned} 0 &= y'' - \frac{2z}{1 - z^2}y' + \frac{l(l + 1)}{1 - z^2}y \\ p(x) &= \frac{-2z}{1 - z^2} = \frac{-2z}{(1 - z)(1 + z)} \\ p(x) &= \frac{l(l + 1)}{1 - z^2} = \frac{l(l + 1)}{(1 - z)(1 + z)} \end{aligned}$$

Rekapitulation:

Homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0 \quad (7)$$

$y \equiv y(z)$ komplexe Funktion einer komplexen Variable z und $y' = \frac{dy}{dz}(z)$.

Wenn $p(z)$ und $q(z)$ analytische Funktionen bei $z = z_0$ sind, dann ist z_0 ein regulärer Punkt.

Wenn $p(z)$ u./od. $q(z)$ bei $z = z_0$ divergent sind und

- (i) $(z - z_0)p(z)$ und $(z - z_0)^2q(z)$ analytisch bei $z = z_0$: regulärer, singulärer Punkt, Differentialgleichung besitzt eine endliche Lösung bei $z = z_0$
- (ii) wenn (i) nicht gilt: wesentliche Singularität, keine endliche Lösung bei $z = z_0$

Legendre Differentialgleichung:

$$y'' - \underbrace{\frac{2z}{1 - z^2}}_{p(z)} y' + \underbrace{\frac{l(l + 1)}{1 - z^2}}_{q(z)} y = 0 \quad l = \text{const.}$$

$z = 0$ regulärer Punkt

$z = \pm 1, |z| \rightarrow \infty$: reguläre, singuläre Punkte

$p(z)$ und $q(z)$ sind analytisch bei $z = 0$.

Bei $z = +1$: $p(z)$ und $q(z)$ divergieren, aber $(z - 1)p(z)$ und $(z - 1)^2q(z)$ sind analytisch.

Analog für $z = -1$. □

Bemerkung: Die Legendre Differentialgleichung hat eine reguläre Singularität wenn $|z| \rightarrow \infty$.

Beweis: Variablensubstitution $w = 1/z$, betrachte $w = 0$.

4.5 Lösung als Potenzreihe um einen regulären Punkt

Wenn $z = z_0$ ein regulärer Punkt der Differentialgleichung ist, dann ist *jede* Lösung $y(z)$ analytisch bei $z = z_0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Betrachte $z_0 = 0$ (wenn dies nicht schon der Fall ist, dann substituiere $z \rightarrow Z = z - z_0$). Da $y(z)$ analytisch ist:

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Diese Potenzreihe konvergiert für $|z| < R$, $R =$ Konvergenzradius. R ist gleich dem Abstand von $z = 0$ zum nächsten singulären Punkt der Differentialgleichung.

Es ist immer möglich, *zwei unabhängige* Lösungen dieser Form zu bekommen.

Die Ableitungen sind

$$y'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1) a_{n'+1} z^{n'} \quad (n' = n - 1)$$

$$y''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+2)(n'+1) a_{n'+2} z^{n'} \quad (n' = n - 2)$$

Einsetzen in (7), verlange dass die Koeffizienten jeder Potenz von z Null sind \Rightarrow *Rekursions-Gleichung* für a_n in Abhängigkeit von den vorherigen a_r ($0 \leq r \leq n-1$).

Beispiel Legendre Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 &= (1-z^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}z^n - 2z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n \\
&\quad + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + l(l+1)a_n \right] z^n \\
&\quad - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}z^{n+2}}_{\substack{n' \equiv n+2 \\ n'=2}} \sum_{n'=2}^{\infty} n'(n'-1)a_{n'}z^{n'} \quad \substack{n' \rightarrow n \\ n=0,1 \text{ ergeben } 0} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n z^n \\
&\quad - 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^{n+1}}_{\substack{n' \equiv n+1 \\ n'=0}} \sum_{n'=0}^{\infty} n'a_{n'}z^{n'} \quad \substack{n' \rightarrow n \\ n=0 \text{ ergibt } 0} \sum_{n=0}^{\infty} na_n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + l(l+1)a_n - n(n-1)a_n - 2na_n] z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n+1) - l(l+1)]a_n \}
\end{aligned}$$

\Rightarrow alle Koeffizienten von z^n müssen Null sein,

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

\Rightarrow Koeffizienten a_n für n gerade sind unabhängig von den Koeffizienten für n ungerade

⇒ zwei unabhängige Lösungen:

1. wähle $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$:

$$y_1(z) = 1 - l(l+1)\frac{z^2}{2!} + (l-2)l(l+1)(l+3)\frac{z^4}{4!} - \dots$$

2. wähle $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$:

$$y_2(z) = z - (l-1)(l+2)\frac{z^3}{3!} + (l-3)(l+1)(l+2)(l+4)\frac{z^5}{5!} - \dots$$

Konvergenz: Quotiententest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}z^{n+2}}{a_n z^n} = z^2 \Rightarrow \text{Reihe konvergiert für } |z| < 1.$$

Erwartet, weil $z = \pm 1$ singuläre Punkte sind.

Da $y_1 \neq \text{const} \cdot y_2$ sind y_1 und y_2 linear unabhängig und die allgemeine Lösung für $|z| < 1$ ist

$$y(z) = c_1 y_1(z) + c_2 y_2(z)$$

5 Spezielle Funktionen

5.1 Legendre Funktionen

Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0$$

l ist eine Konstante, siehe auch 4.

5.1.1 Legendre Funktionen für l ganzzahlig

In vielen physikalischen Anwendungen ist l ganzzahlig: $l = 0, 1, 2, \dots$

Es folgt aus der Rekursionsformel

$$a_{l+2} = \frac{[l(l+1) - l(l+1)]}{(l+1)(l+2)} = 0,$$

d.h., die Reihe bricht bei $n = l + 2$ ab und die Lösung ist ein Polynom vom Grad l . Insbesondere, für

l gerade $\Rightarrow y_1(x)$ ist ein Polynom;

l ungerade $\Rightarrow y_2(x)$ ist ein Polynom.

Diese Lösungen mit geeigneter Normierung heißen *Legendre Polynome* vom Grad l : $P_l(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Normierungs-Konvention: $P_l = c_1 y_1$ (oder $c_2 y_2$), so dass $P_l(1) = 1$. Da für l gerade (ungerade) P_l nur gerade (ungerade) Potenzen von l enthält, folgt

$$\begin{aligned} P_l(-x) &= (-1)^l P_l(x) \\ P_l(-1) &= (-1)^l \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_1(x) &= x & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

In Abhängigkeit ob l gerade (ungerade) ist, d.h., die Lösung $y_1(x)$ ($y_2(x)$) ein Polynom $cP_l(x)$ ist, ist die andere Lösung $y_2(x)$ ($y_1(x)$) eine unendliche Reihe und konvergiert nur für $|x| < 1$. Sie definieren *Legendre Funktionen zweiter Art*

$$l \text{ gerade: } Q_l(x) = \alpha_l y_2(x), \quad \alpha_l = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}} 2^l [(\frac{l}{2})!]^2}{l!}$$

$$l \text{ ungerade: } Q_l(x) = \beta_l y_1(x), \quad \beta_l = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}} 2^{l-1} [(\frac{l-1}{2})!]^2}{l!}$$

Die Normierungsfaktoren sind so gewählt, dass $Q_l(x)$ die gleichen Rekursionsformeln wie $P_l(x)$ erfüllen, siehe später.

Beispiele:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1$$

Die allgemeine Lösung der Legendre DGL für $l = 0, 1, 2, \dots$ ist

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 Q_l(x)$$

mit Konstanten c_1 und c_2 .

5.1.2 Eigenschaften der Legendre Polynome

In physikalischen Problemen ist oft $y(x = \cos \theta_1)$, wobei θ_1 der Winkel in Polarkoordinaten ist. Die Lösung soll bei $\theta_1 = 0$ und π bzw. $x = \pm 1$ regulär sein $\Rightarrow y(x) = c_1 P_l(x)$, $c_2 = 0$ weil $Q_l(x)$ singularär bei $x = \pm 1$ ist.

Formel von Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Beweis: Wir definieren $u = (x^2 - 1)^l$, dann $u' = 2lx(x^2 - 1)^{l-1}$ und $(x^2 - 1)u' - 2lxu = 0$. Wir leiten diesen Ausdruck $(l+1)$ -mal ab, indem wir die Leibnitz Regel benutzen, für $f = vw$ ist $\frac{d^n f}{dx^n} \equiv f^{(n)} = \sum_{r=0}^n {}^n C_r v^{(r)} w^{(n-r)}$, wobei ${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Mit $n = l+1$

$$[(x^2 - 1)u^{(l+2)} + 2x(l+1)u^{(l+1)} + \frac{2l(l+1)u^{(l)}}{2}] - 2l[xu^{(l+1)} + (l+1)u^{(l)}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)u^{(l+2)} + 2xu^{(l+1)} - l(l+1)u^{(l)} = 0$$

Wenn wir die Vorzeichen alle ändern finden wir die Legendre DGL wieder mit $y = u^{(l)}$. Da l ganzzahlig und $u^{(l)}$ regulär bei $x = \pm 1$ ist, identifizieren wir $u^{(l)} = c_l P_l(x)$ mit einer l -abhängigen Konstante c_l . In $u^{(l)} = \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$ ist der einzige Term ohne einen Faktor $(x^2 - 1)$ gegeben durch $(2x)^l l! (x^2 - 1)^0$ ³. Da $P_l(1) = 1$ folgt $c_l = 2^l l!$. \square

Anwendung der Formel von Rodrigues:

$$I_l = \int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1}$$

Beweis: $l = 0$ ✓, wir nehmen $l \geq 1$ an und verwenden die Formel von Rodrigues:

$$I_l = \frac{1}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l} \right] \left[\frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l} \right] dx$$

Nach wiederholter partieller Integration, wobei alle Randterme verschwinden (wegen $\frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^l |_{x=\pm 1} = 0$ für $k < l$), bekommen wir

$$I_l = \frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \underbrace{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx}_{=K_l}$$

Partielle Integration für k_l liefert

$$\begin{aligned} K_l &= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx = \int_{-1}^1 \underbrace{2lx^2}_{=2l-2l(1-x^2)} (1 - x^2)^{l-1} dx = 2lK_{l-1} - 2lK_l \\ \Rightarrow (2l+1)K_l &= 2lK_{l-1}, \quad K_0 = 2 \\ \Rightarrow K_l &= \frac{2l}{2l+1} \frac{2l-2}{2l-1} \cdots \frac{2}{3} 2 = \frac{2^l l!}{\frac{(2l+1)!}{2^l l!}} 2 = \frac{2^{2l+1} (l!)^2}{(2l+1)!} \\ \Rightarrow I_l &= \frac{2}{2l+1} \quad \square \end{aligned}$$

³ Kombinatorischer Faktor $l!$: l Faktoren $(x^2 - 1)$, eine Ableitung pro Faktor $(x^2 - 1) \rightarrow 2x$, erste Ableitung hat l Möglichkeiten, 2. Ableitung $(l-1)$ Möglichkeiten, etc...

5.1.3 Orthogonalitätsbeziehung

Definitionen: Wir betrachten den Vektorraum der Funktionen, die im Intervall $[a, b]$ die Dirichlet Bedingungen (siehe 2.1) erfüllen. Wir definieren ein *Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x)dx$$

wobei $\rho(x)$ eine Gewichtsfunktion ist, die reell und nicht negativ im Intervall $[a, b]$ sein soll. Zwei Funktionen f und g heißen *orthogonal* (bzgl. ρ), wenn

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Die *Norm* einer Funktion f ist definiert durch

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx \right]^{1/2}.$$

Wir bezeichnen eine normierte Funktion als $\hat{f} = \frac{f}{\|f\|}$, so $\|\hat{f}\| = 1$.

Ein unendlich dimensionaler Vektorraum von Funktionen mit einem Skalarprodukt heißt ein *Hilbertraum*. Wir können eine Basis von linearen unabhängigen Funktionen $\hat{\phi}_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, die orthogonal sind, wählen:

$$\langle \hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j \rangle = \int_a^b \hat{\phi}_i(x)^* \hat{\phi}_j(x) \rho(x) dx = \delta_{ij}$$

Gram-Schmidt Verfahren: Sei $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ eine linear unabhängige, aber nicht orthonormierte Basis des Hilbertraums. Eine orthonormierte Basis kann mit dem Gram-Schmidt Verfahren aufgebaut werden:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= y_0, & \hat{\phi}_0 &= \frac{\phi_0}{\|\phi_0\|} \\ \phi_1 &= y_1 - \hat{\phi}_0 \langle \hat{\phi}_0, y_1 \rangle, & \hat{\phi}_1 &= \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|} \\ \phi_2 &= y_2 - \hat{\phi}_1 \langle \hat{\phi}_1, y_2 \rangle - \hat{\phi}_0 \langle \hat{\phi}_0, y_2 \rangle, & \hat{\phi}_2 &= \frac{\phi_2}{\|\phi_2\|} \\ &\vdots & & \\ \phi_n &= y_n - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\phi}_j \langle \hat{\phi}_j, y_n \rangle, & \hat{\phi}_n &= \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

5.1.4 Orthonormierte Basis von Eigenfunktionen eines Hermiteschen Operators

Definitionen: Im allgemeinen definiert man den *adjungierten Operator* \mathcal{L}^+ eines linearen (Differential-)Operators \mathcal{L} durch

$$\int_a^b f^*(x)[\mathcal{L}g(x)]dx = \int_a^b [\mathcal{L}^+f(x)]^*g(x)dx$$

+ Randterme bei $x = a$ und $x = b$.

Der adjungierte Operator kann durch partielle Integration gefunden werden.

Beispiel: Der Ableitungsoperator $\mathcal{L} = d/dx$. Partielle Integration liefert die Beziehung

$$\int_a^b f^*(x)\frac{dg}{dx}(x)dx = [f^*(x)g(x)]_a^b - \int_a^b \left[\frac{df}{dx}(x)\right]^* g(x)dx$$

d.h. $\mathcal{L}^+ = -d/dx$.

Ein Operator heißt *selbstadjungiert*, wenn $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$. Wenn $\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$ und die Randterme verschwinden, d.h. wenn

$$\int_a^b f^*(x)[\mathcal{L}g(x)]dx = \int_a^b [\mathcal{L}f(x)]^*g(x)dx,$$

heißt der Operator *hermitesch*.

Die Eigenfunktionen eines hermiteschen Operators \mathcal{L}

$$\mathcal{L}y_i = \lambda_i\rho(x)y_i(x)$$

(mit der reellen Gewichtsfunktion $\rho(x) \geq 0$ in $[a, b]$) bilden eine *vollständige Basis* von Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Man kann zeigen, dass die Eigenwerte λ_i reell sind, s. unten. Eigenfunktionen y_i und y_j zu Eigenwerten $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind *orthogonal*

$$\langle y_i, y_j \rangle = \int_a^b y_i^*(x)y_j(x)\rho(x)dx = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y_i &= \lambda_i \rho y_i \quad / \cdot y_j^* \\ \mathcal{L}y_j &= \lambda_j \rho y_j \quad / \cdot y_i^* \\ \Rightarrow \int_a^b y_j^* (\mathcal{L}y_i) dx &= \lambda_i \int_a^b y_j^* y_i \rho dx \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b y_i^* (\mathcal{L}y_j) dx = \lambda_j \int_a^b y_i^* y_j \rho dx \quad (2)$$

$$\rho \text{ reell} \Rightarrow (1) : \underbrace{\int_a^b y_j (\mathcal{L}y_i)^* dx}_{(1')} = \lambda_i^* \int_a^b y_i^* y_j \rho dx$$

$$\mathcal{L} \text{ hermitesch} \Rightarrow \int_a^b y_i^* (\mathcal{L}y_j) dx \quad (1')$$

$$(1') - (2) : 0 = (\lambda_i^* - \lambda_j) \int_a^b y_i^* y_j \rho dx \quad (3)$$

$$\text{wenn } i = j : 0 = (\lambda_i^* - \lambda_i) \underbrace{\int_a^b |y_i|^2 \rho dx}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i = \lambda_i^*$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j : (3) \Rightarrow \langle y_i, y_j \rangle = \int_a^b y_i^* y_j \rho dx = 0$$

y_i und y_j sind *orthogonal* bzgl. Skalarprodukt mit ρ .

Auch Eigenfunktionen zu degenerierten Eigenwerten können orthogonal gewählt werden (Gram-Schmidt).

Beweis: wenn z.B. λ_0 k -fach entartet ist, $\mathcal{L}y_i = \lambda_0 \rho y_i$ für $i = 0, 1, \dots, k-1$ und $\lambda_0 \notin \{\lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots\}$. Konstruiere k orthogonale Eigenvektoren z_0, \dots, z_{k-1} mit dem *Gram-Schmidt* Verfahren:

$$\begin{aligned} z_0 &= y_0 \\ z_1 &= y_1 - \langle \hat{z}_0, y_1 \rangle \hat{z}_0 \\ &\vdots \\ z_{k-1} &= y_{k-1} - \sum_{j=0}^{k-2} \langle \hat{z}_j, y_{k-1} \rangle \hat{z}_j \text{ mit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_j &= \frac{z_j}{\|z_j\|}, \quad \|z_j\| = \langle z_j, z_j \rangle^{1/2}. \\ \langle z_0, z_1 \rangle &= \langle z_0, y_1 \rangle - \langle \hat{z}_0, y_1 \rangle \langle z_0, \hat{z}_0 \rangle \\ &= \langle z_0, y_1 \rangle - \langle \hat{z}_0, y_1 \rangle \|z_0\| = 0.\end{aligned}$$

Linearität von \mathcal{L} ist wichtig: eine beliebige Linearkombination $z = \sum_{i=0}^{k-1} c_i y_i$ ist auch eine Eigenfunktion von \mathcal{L} : $\mathcal{L}z = \lambda_0 \rho z$. Normierung der Eigenfunktion ist beliebig, oft wählt man $\hat{y}_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$, $\|y_i\| = (\int_a^b y_i^* y_i \rho dx)^{1/2}$ so, dass $\langle \hat{y}_i, \hat{y}_j \rangle = \int_a^b \hat{y}_i^* \hat{y}_j \rho dx = \delta_{ij}$ (*orthonormiert*).

Wir können dann eine beliebige Funktion im Hilbertraum in einer orthonormierten Basis $\hat{y}_n(x)$ darstellen als

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_n c_n \hat{y}_n(x) \\ c_n &= \langle \hat{y}_n, f \rangle = \int_a^b dz \hat{y}_n^*(z) f(z) \rho(z)\end{aligned}$$

Die Vollständigkeitsbeziehung ist $\rho(z) \sum_n \hat{y}_n(x) \hat{y}_n^*(z) = \delta(x - z)$.

5.1.5 Sturm-Liouville Gleichung

Definition: *Sturm-Liouville Gleichung*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}y &= \lambda \rho(x)y \\ \mathcal{L} &\equiv - \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right] \\ &\Leftrightarrow -(py')' - qy = \lambda \rho y\end{aligned}$$

$\rho(x)$ ist eine Gewichtsfunktion, sie muss reell und positiv im Intervall $[a, b]$ sein, $p(x)$ und $q(x)$ sind reelle Funktionen. \mathcal{L} ist linear: $\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}f_1 + c_2 \mathcal{L}f_2$, mit Funktionen f_1, f_2 und Konstanten c_1, c_2 .

Beispiel: Die Legendre Gleichung ist vom Typ Sturm-Liouville, denn mit $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, $\lambda = l(l + 1)$, $\rho = 1$ folgt:

$$\begin{aligned}-((1 - x^2)y')' - l(l + 1)y &= 0 \Leftrightarrow \\ -(1 - x^2)y'' + 2xy' - l(l + 1)y &= 0 \Leftrightarrow \\ (1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y &= 0\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Sturm-Liouville Operator \mathcal{L} mit den Randbedingungen für beliebige Paare von Eigenfunktionen y_i und y_j $[y_i^* p y_j']_{x=a}^{x=b} = 0$ ist hermitesch (Beweis: Übung).

Für die Legendre DGL ist $p = 1 - x^2$ und $a = -1$, $b = 1$. Da $p(a) = p(b) = 0$ ist \mathcal{L} hermitesch. Die Legendre Polynome $P_l(x)$ sind Eigenfunktionen von \mathcal{L} : $\mathcal{L}P_l(x) = \lambda P_l(x)$, $\lambda = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$ mit Gewichtsfunktion $\rho = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 P_k(x)P_l(x)dx = 0$ für $k \neq l$.

Außerdem können wir jede Funktion, die die Dirichlet Bedingungen im Intervall $[-1, 1]$ erfüllt, schreiben als $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x)$, $|x| < 1$, wobei $a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx$. Wenn f selbst ein Polynom ist, dann bricht die Reihe bei $l = \text{Grad von } f$ ab.

$$\text{Beweis: } \int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \underbrace{\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)dx}_{=\delta_{lk} \frac{2}{2k+1}} = \frac{2a_k}{2k+1} \quad \square$$

5.1.6 Erzeugende Funktion

Die erzeugende Funktion einer Funktionenfolge $f_n(x)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist eine Funktion $G(x, h)$, die von x und einer weiteren Variable h abhängt, so dass

$$G(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)h^n,$$

d.h., die Funktionen $f_n(x)$ sind die Koeffizienten der Entwicklung von $G(x, h)$ in Potenzen von h . In einigen Fällen kann man eine geschlossene Form für $G(x, h)$ angeben.

Wir betrachten Funktionen $P_n(x)$ definiert über

$$G(x, h) = (1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n \quad (*)$$

Theorem: $P_n(x)$ sind die Legendre Polynome.

Beweis: Wir bezeichnen $\frac{dP_n(x)}{dx} = P'_n$. Wir leiten die Gleichung (*) nach x ab:

$$(1) \quad h(1 - 2xh + h^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n h^n$$

und nach h ab:

$$(2) \quad (x - h)(1 - 2xh + h^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n h^{n-1}$$

(1) kann mit Hilfe von (*) umgeschrieben werden:

$$h \sum_{n=0}^{\infty} P_n h^n = (1 - 2xh + h^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n h^n$$

Vergleich der Koeffizienten von h^{n+1} liefert die Rekursionsformel

$$P_n = P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1}. \quad (R1)$$

Gleichungen (1) und (2) können so kombiniert werden:

$$(x - h) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n h^n = h \sum_{n=0}^{\infty} nP_n h^{n-1}$$

Vergleich der Koeffizienten von h^n liefert eine weitere Rekursionsformel:

$$xP'_n - P'_{n-1} = nP_n. \quad (R2)$$

Wir können aus (R1) und (R2) P'_{n-1} eliminieren:

$$(n + 1)P_n = P'_{n+1} - xP'_n. \quad (R3)$$

(R3) mit $n \rightarrow n - 1$, addiere $x \times (R2)$:

$$\begin{aligned} nP_{n-1} + x^2P'_n - xP'_{n-1} &= P'_n - xP'_{n-1} + nxP_n \\ \Leftrightarrow (1 - x^2)P'_n &= n(P_{n-1} - xP_n). \end{aligned} \quad (R4)$$

Wir leiten beide Seiten nach x ab und benutzen (R2):

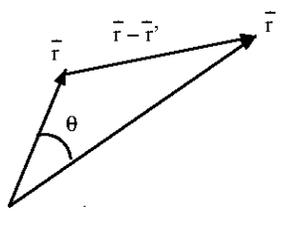
$$\begin{aligned} (1 - x^2)P''_n - 2xP'_n &= n[(P'_{n-1} - xP'_n) - P_n] \\ &= n[-nP_n - P_n] = -n(n + 1)P_n. \end{aligned}$$

Das ist die Legendre DGL für $l = n$. Aus (*) folgt, dass die Funktionen $P_n(x)$ regulär bei $x = \pm 1$ sind, denn $G(\pm 1, h) = (1 \mp h)^{-1}$. Die P_n sind also proportional zu den Legendre Polynomen. Normierung:

$$G(1, h) = (1 - h)^{-1} = 1 + h + h^2 + \dots \Rightarrow P_n(1) = 1$$

$\Rightarrow P_n(x)$ sind die Legendre Polynome. □

Anwendung der Legendre Polynome: Seien \vec{r} und \vec{r}' mit $r = |\vec{r}|$ und $r' = |\vec{r}'|$ zwei Punkte. Wenn $r' < r$:



$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2}} \quad / \quad r' < r \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{r[1 - 2(\frac{r'}{r}) \cos \theta + (\frac{r'}{r})^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

Wenn $r' > r$, müssen r und r' in der Reihenentwicklung vertauscht werden, damit die Reihe konvergiert.

Beispiel: Elektrostatische Potentiale am Ort \vec{r} einer Punktladung q bei \vec{r}' :

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta), \quad r' < r.$$

Wenn $r' = 0$: $V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (l = 0).$

Rekursionsformeln:

(R1) $P'_{n+1} + P'_{n-1} = P_n + 2xP'_n$

(R2) $P'_{n-1} = -nP_n + xP'_n$

(R3) $P'_{n+1} = (n+1)P_n + xP'_n$

(R4) $(1 - x^2)P'_n = n(P'_{n-1} - xP_n)$

(R5) $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1} \quad = (R3) - (R2)$

Mehr Beispiele: Rekursionsformel ohne Ableitungen:

$$(R6) \quad (n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

Beweis: Es gilt $(x-h)(1-2xh+h^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n h^{n-1}$. Wir verwenden die erzeugende Funktion:

$$(x-h) \sum_{n=0}^{\infty} P_n h^n = (1-2xh+h^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n h^{n-1}$$

Vergleich der Koeffizienten von h^n liefert

$$\begin{aligned} xP_n - P_{n-1} &= (n+1)P_{n+1} - 2xnP_n + (n-1)P_{n-1} \\ \Leftrightarrow (n+1)P_{n+1} &= (2n+1)xP_n - nP_{n-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Diese Rekursionsrelation ist nützlich, um die Legendre Polynome $P_n(x)$ entweder numerisch oder algebraisch zu bestimmen. Man fängt mit $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ an und interiert bis zu $P_n(x)$.

Zusammenfassung: 3 äquivalente Zugänge zu Legendre Polynomen:

1. $-\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] = n(n+1)P_n(x)$ mit Randbedingung $P_n(1) = 1$
2. Rodrigues Formel: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$
3. erzeugende Funktion $\frac{1}{(1-2xh+h^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n$

5.2 Laplace Gleichung in Polarkoordination

Laplace Gleichung: $\Delta u = 0, \quad u = u(x, y, z)$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

In Polarkoordinaten (r, θ, φ) , $u(r, \theta, \varphi)$ (siehe auch [1] 2.9)

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Ansatz: Variablenseparation $u(r, \theta, \varphi) = R(r)T(\theta)F(\varphi)$

Einsetzen, dividieren durch $u = RTF$ und multiplizieren mit r^2 :

$$\underbrace{\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}_{\text{hängt nur von } r \text{ ab}} + \underbrace{\frac{1}{T \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{1}{F \sin^2 \theta} \frac{d^2 F}{d\varphi^2}}_{\text{hängen nur von } \theta \text{ und } \varphi \text{ ab}} = 0$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu zwei Gleichungen

$$(1) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \lambda$$

$$(2) \quad \frac{1}{T \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{1}{F \sin^2 \theta} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -\lambda$$

λ ist eine Separationskonstante. Gleichung (1) ist eine homogene DGL für R

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0$$

Wir substituieren $r = e^t$ und schreiben $R(r) = S(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} &= \frac{dt}{dr} \frac{d}{dt} = \left(\frac{dr}{dt} \right)^{-1} \frac{d}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt} \\ \frac{d^2}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right) = -e^{-2t} \frac{d}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2}{dt^2} \\ \Rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dt} - \lambda R &= e^{2t} \left(-e^{-2t} \frac{dS}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2 S}{dt^2} \right) + 2e^t e^{-t} \frac{dS}{dt} - \lambda S \\ \Rightarrow \frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{dS}{dt} - \lambda S &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung ist $S(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, d.h., $R(r) = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2}$.

$$S = Ae^{xt} \text{ einsetzen} \Rightarrow x^2 + x - \lambda = 0 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = -\lambda \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Wir definieren $\lambda_1 = l$, dann ist $\lambda_2 = -(l + 1)$ und $\lambda = l(l + 1)$ sowie $R(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$. Hier ist l eine beliebige reelle Konstante.

Gleichung (2): Multiplizieren mit $\sin^2 \theta$, $\lambda = l(l+1)$:

$$\underbrace{\frac{\sin \theta}{T} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta}_{\text{hängt nur von } \theta \text{ ab}} + \underbrace{\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2}}_{\text{hängt nur von } \varphi \text{ ab}} = 0$$

Mit Separationskonstante m^2 :

$$(3) \quad \frac{\sin \theta}{T} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$(4) \quad \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -m^2$$

Gleichung (4): für $m \neq 0$

$$F(\varphi) = C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi)$$

Eindeutigkeit der Lösung: physikalisch ist φ dasselbe wie $\varphi + 2\pi \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.
Für $m = 0$

$$F(\varphi) = C\varphi + D$$

Eindeutigkeit $\Rightarrow C = 0$.

Gleichung (3): Variablensubstitution

$$\mu = \cos \theta, \quad \frac{d\mu}{d\theta} = -\sin \theta, \quad \frac{d}{d\theta} = \frac{d\mu}{d\theta} \frac{d}{d\mu} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{d}{d\mu}$$

Mit $M(\mu) = T(\theta)$:

$$\frac{1-\mu^2}{M} \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right] + l(l+1)(1-\mu^2) = m^2$$

$$(3') \quad \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dM}{d\mu} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right] M = 0, \quad -1 \leq \mu \leq 1$$

Typ von Sturm-Liouville Gleichung $-[(py)'] + qy = \lambda \rho y$ mit $p = (1-\mu^2)$, $q = -m^2/p$, $\lambda = l(l+1)$ $\rho = 1$ (3') heißt *assoziierte Legendre Gleichung*. Für $m = 0$ bekommen wir die Legendre Gleichung. Wenn $U(\mu)$ eine Lösung der Legendre Gleichung ist, dann

$$M(\mu) = (1-\mu^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|} U}{d\mu^{|m|}} \quad (*)$$

ist eine Lösung der assoziierten Legendre Gleichung. Für die Legendre Gleichung hatten wir zwei linear unabhängige Lösungen $U_1(\mu)$ und $U_2(\mu) \stackrel{(*)}{\rightarrow} M = EM_1(\mu) + FM_2(\mu)$. Wir sind an endlich polynomialen Lösungen interessiert, also $l \in \mathbb{N}$, und an Lösungen die bei $\theta = 0, \pi \Leftrightarrow x = \pm 1$ regulär sind $\Rightarrow U(\mu) = P_l(\mu) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} M(\mu) &= EP_l^m(\mu) \\ m \geq 0 : P_l^m(\mu) &= (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{d\mu^m}, \quad P_l = \text{Legendre Polynom} \\ P_l^{-m}(\mu) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) \quad \text{Konvention (0)} \end{aligned}$$

((3') hängt nur von m^2 ab $\Rightarrow P_l^{-m} = \text{const.} \cdot P_l^m$)

Es gilt $P_l^m(\mu) = 0$ für $|m| > l \Rightarrow -l \leq m \leq l$.

m gerade $\Rightarrow P_l^m$ Polynom vom Grad l

m ungerade \Rightarrow Faktor $(1 - \mu^2)^{m/2}$ kein Polynom

Orthogonalitätsrelation der P_l^m (Sturm-Liouville), m fest:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\mu) P_k^m(\mu) d\mu = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{kl}$$

Komplette Lösung der Laplace Gleichung mit Separation der Variablen:

$$u(r, \theta, \varphi) = (Ar^l + Br^{-(l+1)})(C \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi)) EP_l^m(\cos \theta)$$

mit $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$. Die allgemeine Lösung ist eine lineare Kombination von Lösungen dieser Form (d.h. Summe über l und m in den angegebenen Wertebereichen).

5.3 Kugelflächenfunktionen ("spherical harmonics")

Definition (motiviert vom Winkelanteil von u)

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Es gilt $Y_{l-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m [Y_{lm}(\theta, \varphi)]^*$ (folgt aus (0))

Beispiele: $Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$, $Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$

Orthogonalitätsrelation:

$$\underbrace{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi [Y_{lm}(\theta, \varphi)]^* Y_{l'm'}(\theta, \varphi)}_{\int_{S_1} dx'} = \underbrace{\delta_{ll'}}_{(a)} \underbrace{\delta_{mm'}}_{(a)}$$

(a) Orthogonalität von $P_l^m(x)$, $-1 \leq x = \cos \theta \leq 1$

(b) Orthogonalität von $e^{im\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Eine Funktion $f(\theta, \varphi)$ kann entwickelt werden als

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$a_{lm} = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi [Y_{lm}(\theta, \varphi)]^* f(\theta, \varphi)$$

in Analogie zu der Fourier-Reihe.

Vollständigkeitsrelation:

Entwicklung von $f(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi')$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [Y_{lm}(\theta', \varphi')]^* Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

Diese Beziehung gilt, wie die δ -Funktion, im distributiven Sinn, d.h., unter dem Integralsymbol.

Allgemeine Lösung der Laplace Gleichung, die regulär bei $\theta = 0, \pi$ ist:

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

QM: Wasserstoff Atom Zentralpotential $V(r)$

$$\begin{aligned}\hat{L} &= \hat{r} \times \hat{p}, & \hat{p} &= -i\hbar\vec{\nabla} \\ \hat{L}^2 &= \hat{r}^2\hat{p}^2 - (\hat{r}\hat{p})^2 + i\hbar\hat{r}\hat{p} \\ \Rightarrow \Delta &= -\frac{\hat{p}^2}{\hbar^2} = -\frac{1}{\hbar^2\hat{r}^2}[(\hat{r}\hat{p})^2 - i\hbar\hat{r}\hat{p}] - \frac{1}{\hat{r}^2}\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\text{Polarkoord. : } \Delta &= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rf(r)] &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(f + r\frac{\partial f}{\partial r}) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial r} + r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial f}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \\ \Delta_{\theta,\varphi} &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

Vergleich von (1) und (2): $\hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}$

Eigenfunktionen: $\hat{L}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}$$

$$H\Psi = E\Psi \Leftrightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) \right] \Psi(r, \theta, \varphi) = E\Psi$$

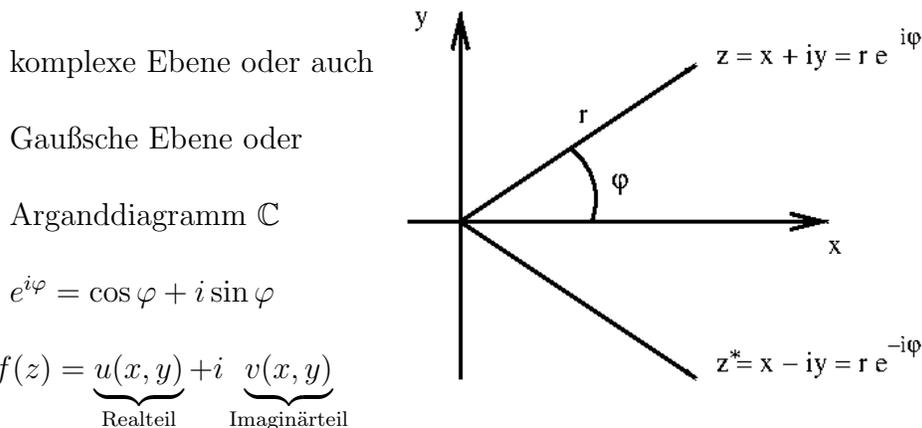
$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \Rightarrow$ Radialproblem:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) - E \right] R(r) = 0$$

$$u(r) = rR(r) : \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_{\text{eff}}(r) \right] u(r) = Eu(r), \quad V_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)$$

6 Komplexe Integration

6.1 Analytische Funktionen



Eine Funktion $f(z)$, die eindeutig in einem Gebiet R der komplexen Ebene definiert ist heißt *differenzierbar* in z , wenn

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

existiert und eindeutig ist, d.h., unabhängig von der Richtung ist, in der man sich dem Punkt z nähert.

Eine Funktion heißt *analytisch* (oder auch regulär oder holomorph) in einem Gebiet $R \subset \mathbb{C}$, wenn sie eindeutig und differenzierbar $\forall z \in R$ ist.

Beispiele:

$$\begin{aligned} f(z) = z^n : \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \delta z)^n - z^n}{\delta z} &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{z^n + n z^{n-1} \delta z + O((\delta z)^2) - z^n}{\delta z} \\ &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} [n z^{n-1} + O(\delta z)] = n z^{n-1} \end{aligned}$$

$f(z) = z z^*$ mit $\delta z = \epsilon e^{i\varphi}$, $\delta z \rightarrow 0$ wenn $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \delta z)(z^* + \delta z^*) - z z^*}{\delta z} &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{z \delta z^* + z^* \delta z + \delta z \delta z^*}{\delta z} \\ &= z^* + z \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta z^*}{\delta z} + \lim_{\delta z \rightarrow 0} \delta z^* = z^* + z e^{-2i\varphi} + 0 \end{aligned}$$

Der Grenzwert hängt von φ ab $\Rightarrow f(z)$ ist nirgends in \mathbb{C} differenzierbar.

Cauchy-Riemann-Bedingungen:

Wenn $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ in R analytisch ist, dann müssen u und v differenzierbar sein, und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Warum?

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial z} \\ \Rightarrow i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \text{Cauchy-Riemann} \end{aligned}$$

Es gilt umgekehrt, hinreichende Bedingungen, dass $f(z)$ analytisch in R ist, sind, dass die vier partiellen Ableitungen existieren, stetig sind und die Cauchy-Riemann Bedingungen erfüllen.

Da $x = \frac{1}{2}(z + z^*)$ und $y = \frac{1}{2i}(z - z^*)$ gilt, können wir formal $f = u + iv$ als Funktion von z und z^* auffassen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial z^*}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{\partial u}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial z^*}}_{=\frac{-1}{2i}} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Cauchy-Riemann $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$. Wenn f analytisch ist, darf f nicht explizit von z^* abhängen.

Wenn reelle Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ und ihre partiellen Ableitungen existieren, stetig sind und die Cauchy-Riemann Bedingungen erfüllen, dann erfüllen sie auch die *Laplace-Gleichung* in zwei Dimensionen

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \Delta v(x, y) = 0$$

Beweis:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u$$

Vertauschbarkeit der gemischten 2. Ableitung folgt aus Stetigkeit.
Analog für v .

u und v heißen *harmonische Funktionen*. Mit Hilfe der Cauchy-Riemann Bedingungen kann man aus dem Realteil den Imaginärteil (bis auf konstante additive Beiträge) oder umgekehrt ausrechnen (Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind *harmonisch konjugierte* Partnerfunktionen). Jede Funktion, die die Laplace-Gleichung (in zwei Dimensionen) erfüllt, ist der Real- od. Imaginärteil einer analytischen Funktion.

6.2 Komplexe Integrale

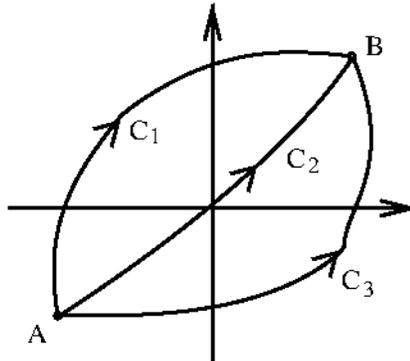
$f(z)$ eindeutig und stetig

in einem Gebiet $R \subset \mathbb{C}$:

wir definieren das *komplexe Integral*

von $f(z)$ zwischen A und B

entlang vom Weg $C \subset R$:



$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad t = \alpha \Leftrightarrow A, \quad t = \beta \Leftrightarrow B$$

Wegintegral:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C u dx - \int_C v dy + i \int_C u dy + i \int_C v dx \\ &= \int_\alpha^\beta u \frac{dx}{dt} dt - \int_\alpha^\beta v \frac{dy}{dt} dt + i \int_\alpha^\beta u \frac{dy}{dt} dt + i \int_\alpha^\beta v \frac{dx}{dt} dt. \end{aligned}$$

Wir haben benutzt: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $dz = dx + idy = \left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right) dt$

Wege haben eine Richtung \rightarrow Vorzeichen von \int_C : Die Richtung gegen den Uhrzeigersinn wird dabei als *positive Richtung* bezeichnet. Für den in Gegenrichtung durchlaufenen Weg \bar{C} gilt: $\int_C f(z)dz = -\int_{\bar{C}} f(z)dz$.

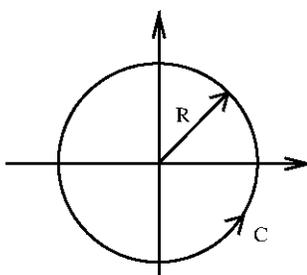
Wegintegrale über einen geschlossenen Weg ($A = B$, *Schlinge*) bezeichnen wir mit \oint .

Beispiel 1: $C : z(t) = R \cos t + iR \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{R \cos t + iR \sin t} :$$

$$dz = (-R \sin t + iR \cos t)dt$$

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin t + iR \cos t}{R \cos t + iR \sin t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \end{aligned}$$



der Wert ist unabhängig von R !

Lemma: Unabhängigkeit der Wegparametrisierung. Wir betrachten zwei Wege:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : I_1 &\longrightarrow Sp\gamma_1 & \gamma_2 : I_2 &\longrightarrow Sp\gamma_2 \\ t' \in [a', b'] &\longrightarrow \gamma_1(t') & t \in [a, b] &\longrightarrow \gamma_2(t) \end{aligned}$$

Die Wege besitzen dieselben Spuren: $Sp\gamma_1 = Sp\gamma_2$ und werden stetig bijektiv durch

$$\begin{aligned} \tau : I_2 &\longrightarrow I_1 \\ t &\longrightarrow \tau(t) = t' \end{aligned}$$

aufeinander abgebildet, so dass gilt: $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \tau$ mit $\frac{d\tau}{dt} > 0$. Dann gilt für eine stetige Funktion $f(z)$:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Beweis:

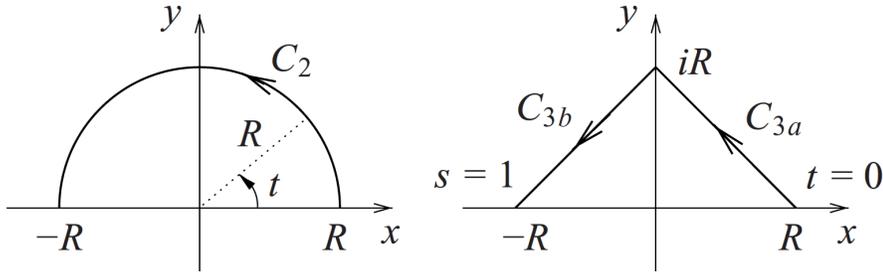
$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma_2(t)) \frac{d\gamma_2}{dt} dt \stackrel{\gamma_2 = \gamma_1 \circ \tau}{=} \int_a^b f(\gamma_1(\tau(t))) \frac{d\gamma_1}{dt'}(\tau(t)) \frac{d\tau}{dt} dt$$

Variablensubstitution: $t' = \tau(t)$ wobei Anfangs- und Endpunkte gleich sind:

$$\gamma_1(a') = \gamma_2(a) = z_a \text{ und } \gamma_1(b') = \gamma_2(b) = z_b :$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{a'}^{b'} f(\gamma_1(t')) \frac{d\gamma_1}{dt'} dt' = \int_{\gamma_1} f(z) dz \quad \square$$

Abschätzung: Wenn $|f(z)| \leq M$ entlang vom Weg C und L ist die Länge des Weges C , dann $|\int_C f(z) dz| \leq M \cdot L$. Im allgemeinen hängt das Integral vom Weg ab, aber wir betrachten das folgende Beispiel 2:



$$C_3 = C_{3a} \cup C_{3b}$$

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} \stackrel{?}{=} \int_{C_3} \frac{dz}{z} = \int_{C_{3b}} \frac{dz}{z} + \int_{C_{3a}} \frac{dz}{z}$$

$$C_2 : z(t) = R \cos t + iR \sin t \quad C_{3a} : z(t) = (1-t)R + itR,$$

$$0 \leq t \leq \pi \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi i dt = \pi i$$

$$\int_{C_{3a}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{-R + iR}{(1-t)R + itR} dt = \int_0^1 \frac{(-1+i)(1-t-it)}{(1-t)^2 + t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2t-1}{1-2t+2t^2} dt + i \int_0^1 \frac{1}{1-2t+2t^2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(1-2t+2t^2) \right]_0^1 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}$$

$$1-2t+2t^2 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1 \right]$$

$$\tan u = \frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq \tan u \leq 1 \Rightarrow -\pi/4 \leq u \leq \pi/4$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - 2t + 2t^2} dt = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2 u)}{1 + \tan^2 u} du = u \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2} \frac{d}{du} \tan u = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 u)$$

analog: $\int_{C_{3b}} \frac{dz}{z} = i\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \int_{C_3} \frac{dz}{z} = i\pi = \int_{C_2} \frac{dz}{z}$$

Beobachtungen:

- Wert $i\pi$ ist unabhängig von R
- $\Rightarrow \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = 0$ für $C_1 = C_2 \cup \bar{C}_3$
vergleiche mit Beispiel 1, wo $\oint \frac{dz}{z} \neq 0$.

6.3 Satz von Cauchy

Wenn $f(z)$ auf einer einfachen⁴ Schlinge C und im darin eingeschlossenen (einfach zusammenhängenden⁵) Gebiet G analytisch ist, so gilt

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Beweis: Wir setzen hier der Einfachheit halber voraus, dass $f'(z)$ stetig auf C und in G ist (eigentlich nicht nötig). Spezialfall vom Satz von Stokes:

Satz von Green in der Ebene: Seien p, q zwei Funktionen, deren erste partiellen Ableitungen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet A stetig sind, so gilt

$$\int \int_A \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial A} (p dy - q dx), \quad \partial A = \text{Rand von } A$$

⁴Das bedeutet ohne Überkreuzungen

⁵Ein Gebiet G ist einfach zusammenhängend, wenn beliebige einfache Schlingen in G ineinander deformiert (homotop), sogar zu einem beliebigen Punkt von G zusammengezogen werden können.

Mit $f(z) = u + iv$ und $dz = dx + idy$ und

$$I = \oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy)$$

wenden wir den Satz von Green ($A = G$, $\partial A = C$) an:

$$I = \int \int_G \left[\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y} \right] dx dy + i \int \int_G \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

$$= 0 \quad \leftarrow \text{Cauchy-Riemann} \quad \Rightarrow \quad = 0 \quad \square$$

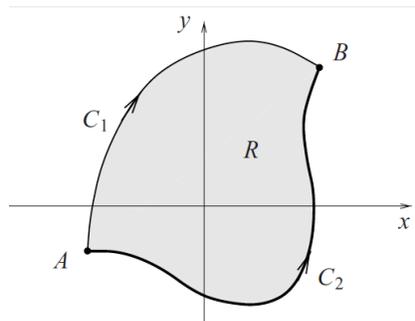
Beispiel 2: $1/z$ ist analytisch in den Gebieten zwischen C_2 und $C_3 = C_{3a} \cup C_{3b}$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = 0 \quad (C_1 = C_2 \cup \bar{C}_3)$$

Beispiel 3:

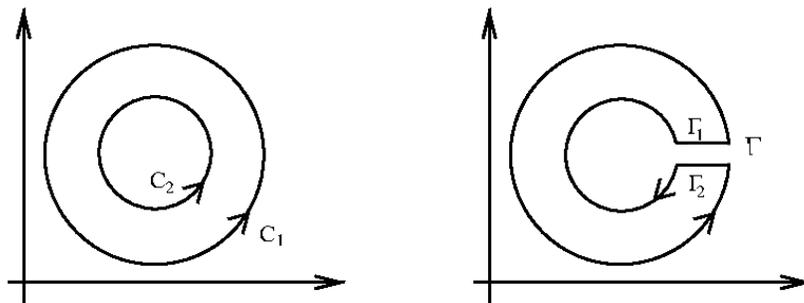
$f(z)$ analytisch auf C_1 und C_2 und
im eingeschlossenen (einfach zusammenhängenden) Gebiet R . Dann

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$



Beweis: $0 = \oint_{C_1 \cup \bar{C}_2} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz.$ \square

Beispiel 4: homotope Schlingen C_1 und C_2 im Analytizitätsbereich:



$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

wenn das Gebiet zwischen den beiden Schlingen analytisch ist.

Beweis: Betrachte die Schlinge Γ , Cauchy $\Rightarrow \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$, $\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) dz \rightarrow 0$ wenn $\Gamma_1 \rightarrow \bar{\Gamma}_2$ (d.h. die Schnitte liegen aufeinander). \square

6.4 Integralformel von Cauchy

Man betrachte eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und am Rand $C = \partial G$ analytische Funktion $f(z)$. Es gilt dann $\forall z_0$ im Inneren von G (Man beachte: C ist eine einfache Schlinge):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Aus der Kenntnis der Funktionswerte am Rande eines Analytizitätsgebiets kann man *alle Funktionswerte im Inneren bestimmen!*

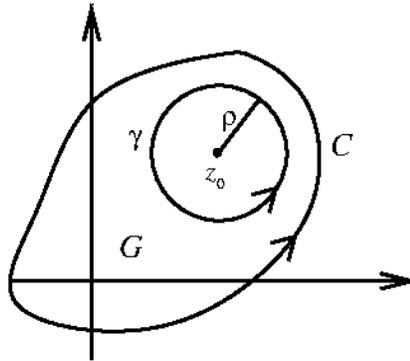
Beweis:

$\frac{f(z)}{z - z_0}$ analytisch zwischen C und γ

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$\gamma: z(t) = z_0 + \rho e^{it} \subset G$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



$$I = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt$$

Wir lassen $\rho \rightarrow 0$, dann $I \rightarrow 2\pi i f(z_0)$. \square

Wenn man die Cauchy Integralformel nach z_0 differenziert, so erhält man Ausdrücke für die Ableitung der Funktion

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{d^n f(z_0)}{dz_0^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \left(\frac{f(z)}{z - z_0} \right) dz = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Voraussetzung: f ist beliebig of differenzierbar!

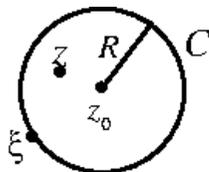
Beispiele:

- $I = \oint_C \frac{\sin z}{2z-\pi} dz$ wenn C ein Kreis um den Ursprung mit (a) Radius 1 od. (b) Radius 2 ist:
 - a) $I = 0$ (analytisch, Pol liegt bei $z = \pi/2$ ausserhalb)
 - b) $I = \oint_C \frac{\frac{1}{2} \sin z}{z-\pi/2} dz = 2\pi i \frac{1}{2} \sin(\pi/2) = \pi i$,
wegen Cauchy, $z_0 = \pi/2$, $f(z) = \frac{1}{2} \sin z$
- $I = \oint_{C: |z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left. \frac{d^3 e^{2z}}{dz^3} \right|_{z=-1} = \frac{8\pi i}{3e^2}$,
wegen Cauchy, $z_0 = -1$, $f(z) = e^{2z}$, $n = 3$

6.5 Taylor und Laurent Reihen

Satz von Taylor für komplexe Funktionen $f(z)$. Wenn $f(z)$ auf einem Kreis C mit Radius R um $z = z_0$ und in seinem Inneren analytisch ist, und z ein Punkt innerhalb des Kreises ist, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ wobei } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$



Beweis (siehe Buch!): Cauchy Integralformel (hier anwendbar)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Wir entwickeln $\frac{1}{\xi - z}$ mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

wenn $|z - z_0| < |\xi - z_0|$, siehe Bild!

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Taylor Reihe ist im Inneren von C garantiert, nicht aber am Rand:

Beispiel: $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 \dots$ (Substitution $w = z^2$, geometrische Reihe $\frac{1}{1-w} = \sum_{m=0}^{\infty} w^m$). Die Reihe konvergiert für $|w| = |z^2| = |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$, obwohl $f(z = 1) = \frac{1}{2} = f(z = -1)$ wohldefiniert sind. Aber $f(z)$ ist singularär bei $z = \pm i \Rightarrow$ Konvergenzradius = 1.

Wir kommen zur Analyse von *Singularitäten*, d.h., Punkte, wo $f(z)$ nicht analytisch ist.

Wenn $f(z)$ bei $z = z_0$ singularär ist, aber in einer Umgebung um $z = z_0$ analytisch ist, dann ist $z = z_0$ eine *isolierte Singularität*. Ein *Pol* ist ein spezieller Typ einer isolierten Singularität. Wenn $f(z)$ die Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

hat, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $g(z)$ analytisch in allen Punkten einer Umgebung die $z = z_0$ enthält, und $g(z_0) \neq 0$, dann hat $f(z)$ einen *Pol n -ter Ordnung*. Eine äquivalente Definition ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = a \neq 0, \quad \text{endlich (*)}$$

Wenn es keinen endlichen wert von n gibt, so dass (*) erfüllt ist, dann ist $z = z_0$ eine *wesentliche Singularität* ("Pol der Ordnung ∞ ").

Beispiele: $f(z) = \frac{1}{z}$ hat einen Pol 1. Ordnung bei $z = 0$. $f(z) = e^{1/z}$ hat eine wesentliche Singularität bei $z = 0$.

Bemerkung: Das Verhalten von $f(z)$ bei $z = \infty$ ist bestimmt durch das Verhalten von $f(1/\xi)$ bei $\xi = 0$.

$f(z) = z$ hat einen Pol 1. Ordnung bei $z = \infty$.

$f(z) = \exp(z)$ hat eine wesentliche Singularität bei $z = \infty$.

Eine Funktion $f(z)$ in einem Gebiet G heißt *meromorph*, wenn sie in G bis auf endlich viele isolierte Singularitäten analytisch ist.

Angenommen, $f(z)$ hat einen Pol der Ordnung p bei $z = z_0$, dann

$$g(z) = f(z)(z - z_0)^p = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

in einem Kreis C um $z = z_0$. Es gilt für alle z im Inneren von C

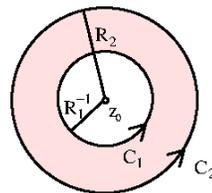
$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

wobei $a_{-p} = b_0$, $a_{-p+1} = b_1$, ... also $a_n = b_{n+p}$, $n \geq -p$. Diese Reihe heißt *Laurent Reihe*. Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n+p} = \frac{g^{(n+p)}(z_0)}{(n+p)!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+p+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \geq -p. \end{aligned}$$

Die allgemeine Form einer Laurent Reihe ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$



Wir erwarten, dass der singuläre Teil ($n < 0$) für $|z - z_0|^{-1} < R_1 \Leftrightarrow |z - z_0| > R_1^{-1}$ ausserhalb eines Kreises C_1 vom Radius R_1^{-1} um z_0 konvergiert. Der

reguläre Teil ($n \geq 0$) konvergiert für $|z - z_0| < R_2$ (C_2). \Rightarrow Laurent Reihe konvergiert in einem Kreisring zwischen C_1 und C_2 .

Die Koeffizienten des singulären Teils einer Laurent Reihe enthalten Informationen über die Singularität bei $z = z_0$.

- Pol p -ter Ordnung: $a_n = 0 \forall n < -p$. Der Koeffizient a_{-1} (nicht a_{-p} !) heißt *Residuum* der Funktion $f(z)$ bei $z = z_0$, $a_{-1} = R(z_0)$.
- wesentliche Singularität: es existiert kein p , so dass $a_n = 0 \forall n < -p$.

Beispiele:

1.

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$$

1a) Laurent Reihe um $z = 0$: $f(z) = \frac{-1}{8z(1-z/2)^3}$

$$\frac{1}{(1-w)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dw^2} \frac{1}{1-w} \quad |w| < 1 \quad \stackrel{!}{=} \quad \frac{1}{2} \frac{d^2}{dw^2} \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)w^{n-2}$$

$$\begin{aligned} w = \frac{z}{2}, |z| < 2: f(z) &= \frac{-1}{8z} \left[1 + 3\frac{z}{2} + 2 \cdot 3 \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots \right] \\ &= \boxed{-\frac{1}{8z}} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16}z - \dots \end{aligned}$$

$z = 0$ Pol 1. Ordnung, Residuum $R(0) = -\frac{1}{8}$

1b) Laurent Reihe um $z = 2$: $z = 2 + \xi$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2+\xi)\xi^3} = \frac{1}{2\xi^3(1+\xi/2)} = \frac{1}{2\xi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{-\xi}{2}\right)^m, |\xi| < 2 \\ &= \frac{1}{2\xi^3} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{1}{8\xi} - \frac{1}{16} + \frac{\xi}{32} - \dots \\ &= \frac{1}{2(z-2)^3} - \frac{1}{4(z-2)^2} \boxed{+\frac{1}{8(z-2)}} - \frac{1}{16} + \frac{z-2}{32} - \dots, |z-2| < 2 \end{aligned}$$

$z = 2$ Pol 3. Ordnung, Residuum $R(2) = \frac{1}{8}$.

2.

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

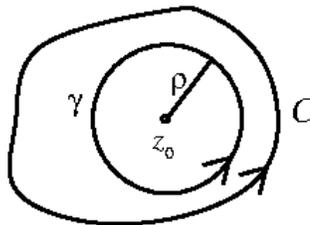
wesentliche Singularität bei $z = 0$, $R(0) = \frac{1}{1!} = 1$.

6.6 Residuensatz

Angenommen, $f(z)$ hat einen Pol p -ter Ordnung bei $z = z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

C : Schlinge, die $z = z_0$ einschließt,



aber keine weitere Singularitäten von $f(z)$

$$\begin{aligned} I &= \oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz \\ \gamma: z(t) &= z_0 + \rho e^{it} = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} (\rho e^{it})^n i \rho e^{it} dt \\ dz &= i \rho e^{it} dt = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n i \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \end{aligned}$$

Für $n \neq -1$ gilt $\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0$

Für $n = -1$ gilt $\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

$$\Rightarrow I = \oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i R(z_0)$$

Bemerkung: Dieses Ergebnis gilt auch, wenn z_0 eine wesentliche Singularität ist. Zum Beispiel

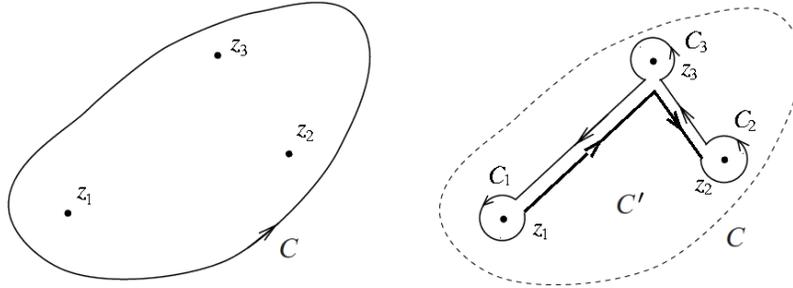
$$\oint_{|z|=R} e^{1/z} dz = 2\pi i \frac{1}{1!} = 2\pi i$$

Residuensatz: Eine im Gebiet G meromorphe (also analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten) und am Rand $C = \partial G$ analytische Funktion hat das Integral

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j R_j$$

wobei $\sum_j R_j$ die Summe der Residuen $R_j = R(z_j)$ von $f(z)$ an den Polstellen z_j innerhalb ∂G .

Beweis:



$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_{C'} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz \\ &= 2\pi i [R(z_1) + R(z_2) + R(z_3)] \quad \square \end{aligned}$$

Berechnung von Residuen:

z_0 Pol der Ordnung p : Laurent Reihe:

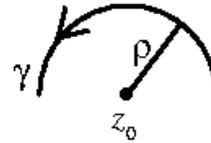
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \\ \Rightarrow (z - z_0)^p f(z) &= a_{-p} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{p-1} + a_0(z - z_0)^p + \dots \\ \Rightarrow R(z_0) &= a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z - z_0)^p f(z) \right] \right\} \end{aligned}$$

Spezialfall: z_0 Pol 1. Ordnung: $R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$

f analytisch bis auf $z = z_0$, hat einen einfachen Pol bei $z = z_0$:

$$\gamma : z(t) = z_0 + \rho e^{it}, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + y(z), \quad y(z) \text{ analytisch}$$



$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz + \int_{\gamma} y(z) dz \\ &= a_{-1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt + \int_{\gamma} y(z) dz \\ &= ia_{-1}(t_2 - t_1) + \int_{\gamma} y(z) dz \\ \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} I &= ia_{-1}(t_2 - t_1) = iR(z_0)(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

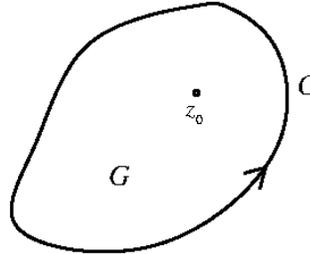
Integralformel von Cauchy - "revisited"

$f(z)$ analytisch in G und auf $C = \partial G$

$\Rightarrow \frac{f(z)}{z-z_0}$ hat Pol 1. Ordnung in $z_0 \in G$

$$R(z_0) = f(z_0)$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



6.7 Anwendungen des Residuensatzes

6.7.1 Integrale mit trigonometrischen Funktionen

Sei $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow F(u, v) \in \mathbb{R}$ eine rationale Funktion. F ist endlich wenn $u, v \in [-1, 1]$. Dann

$$I = \int_0^{2\pi} dt F(\cos(mt), \sin(mt)) = 2\pi \sum_{|z|<1} R \left[\frac{1}{z} F \left(\frac{z^m + z^{-m}}{2}, \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \right) \right]$$

wobei $\sum_{|z|<1}$ über alle Pole im Einheitskreis summiert.

Beweis: $\cos(mt) = \frac{e^{imt} + e^{-imt}}{2}$, $\sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$

$$I = \int_0^{2\pi} dt F \left(\cos(mt), \sin(mt) \right) = \int_0^{2\pi} dt F \left(\frac{e^{imt} + e^{-imt}}{2}, \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right)$$

$$z = e^{it}, \quad dz = ie^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|<1} \frac{dz}{iz} F \left(\frac{z^m + z^{-m}}{2}, \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \right) \rightarrow \text{Residuensatz} \\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} R \left[\frac{1}{z} F \left(\frac{z^m + z^{-m}}{2}, \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \right) \right] \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel: $I = \int_0^{2\pi} dt \frac{\cos(2t)}{p + \sin(t)}$, $p > 1$

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \sum_{|z|<1} R\left(\frac{1}{z} \frac{z^2 + z^{-2}}{2} \frac{1}{p + \frac{z-z^{-1}}{2i}}\right) \\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} R\left(i \frac{z^2 + z^{-2}}{2ipz + z^2 - 1}\right) = 2\pi i \sum_{|z|<1} R\left(i \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 + 2ipz - 1)}\right) \end{aligned}$$

Singularitäten: $z = 0$ Pol 2. Ordnung

$$z^2 + 2ipz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = z_{\pm} = \frac{-2ip \pm \sqrt{-4p^2 + 4}}{2} = i(-p \pm \sqrt{p^2 - 1}) \text{ Pole 1. Ordnung}$$

Pole mit $|z| < 1$: $z = 0$ (2. Ordnung) und $z = z_+$ (1. Ordnung), wegen $z_+ z_- = -1$ und $|z_-| > 1$.

Residuum:

$$\begin{aligned} z = 0 : R &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 + 2ipz - 1)} \right] \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{4z^3}{z^2 + 2ipz - 1} - (z^4 + 1) \frac{2z + 2ip}{(z^2 + 2ipz - 1)^2} \right] = -2ip = z_+ + z_- \\ z = z_+ : R &= \lim_{z \rightarrow z_+} \left[(z - z_+) \frac{z^4 + 1}{z^2(z - z_+)(z - z_-)} \right] = \frac{z_+^4 + 1}{z_+^2(z_+ - z_-)} \\ \Rightarrow I &= 2\pi i \left\{ z_+ + z_- + \frac{z_+^4 + 1}{z_+^2(z_+ - z_-)} \right\} = -2\pi \frac{(p - \sqrt{p^2 - 1})^2}{\sqrt{p^2 - 1}} \end{aligned}$$

6.7.2 Uneigentliche Integrale (Konturintegrale)

Sei $f(z)$ in $\{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$ analytisch bis auf höchstens endlich viele Singularitäten. $f(z)$ hat keine Singularität auf \mathbb{R} . Es gelte:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} Rf(Re^{it}) = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

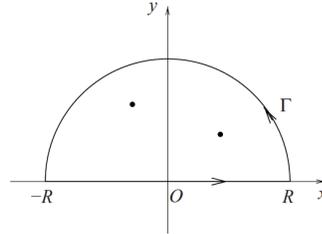
Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\Im z > 0} R(f(z))$$

Beweis:

$$C = [-R, R] \cup \Gamma = \text{Kontur}$$

R groß genug, dass alle Singularitäten innerhalb von C sind



$$\text{Residuensatz: } 2\pi i \sum_{\Im z > 0} R(f(z)) = \oint_C f(z) dz$$

$$\oint_C f(z) dz = \int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \pi R \max_{0 \leq t \leq \pi} |f(Re^{it})| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Limes } R \rightarrow \infty \Rightarrow \oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \square$$

$$\text{Beispiel: } I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad \alpha > 0$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{(z + i\alpha)(z - i\alpha)}$$

Einfache Pole bei $z = \pm i\alpha$. Es gilt:

$$\left| \frac{1}{\alpha^2 + (Re^{it})^2} \right|^2 = \frac{1}{[\alpha^2 + R^2 \cos(2t)]^2 + [R^2 \sin(2t)]^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} R \left| \frac{1}{\alpha^2 + (Re^{it})^2} \right| = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i R(+i\alpha) = 2\pi i \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{2i\alpha} = 1$$

6.7.3 Fourier Transformation

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

Sei $f(x)$ meromorph, Singularitäten $\notin \mathbb{R}$. Es gelte

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

dann hat I den Wert

$$I = -\text{sign}(k)2\pi i \sum_{\text{sign}(k)\Im(z_j) < 0} R_j[f(z)e^{-ikz}]$$

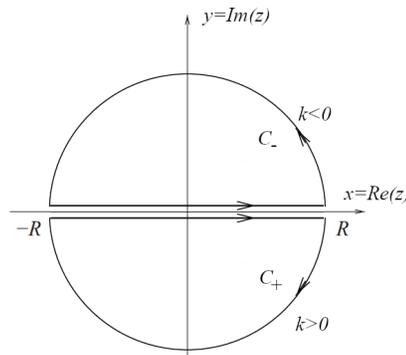
Beweis:

Kontur je nach Vorzeichen

von k : $|e^{-ikz}| = e^{+ky}$:

$k < 0$: $e^{ky} \rightarrow 0$ für $y \rightarrow +\infty$

$k > 0$: $e^{ky} \rightarrow 0$ für $y \rightarrow -\infty$



Residuensatz:

$$k < 0 : \oint_{C_+} f(z)e^{-ikz} dz = 2\pi i \sum_j \text{Residuen } z_j \text{ von } f(z)e^{ikz} \text{ mit } \Im z > 0$$

wenn $R \rightarrow \infty$: \sum_j über alle Singularitäten z_j ; $\int_{C_+} = \int_{[-R,R]} + \int_{\text{Halbkreis}}$

Lemma von Jordan $\Rightarrow \int_{\text{Halbkreis}} \rightarrow 0$ wenn $R = |z| \rightarrow \infty$.

Analog für $k > 0$. $-\text{sign}(k)$: Umlaufsinn C_- .

Beweis Lemma von Jordan:

Voraussetzungen:

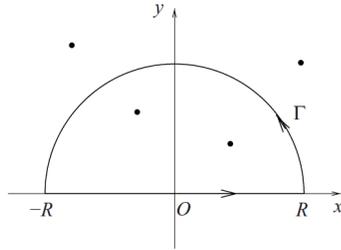
- $f(z)$ ist meromorph in $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\} =: G$
- das Maximum M von $|f(z)| \rightarrow 0$ wenn $|z| \rightarrow \infty$ in G
- $k > 0$

Dann: $I_\Gamma = \int_\Gamma e^{ikz} f(z) dz \rightarrow 0$ wenn $R \rightarrow \infty$

$$\Gamma : z(t) = Re^{it}$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

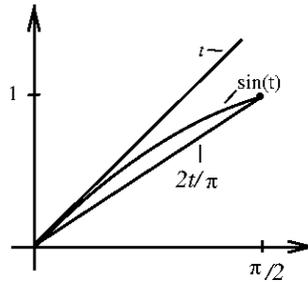
• ... Singularitäten von $f(z)$



Für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$1 \geq \frac{\sin t}{t} \geq \frac{2}{\pi} \quad (*)$$

auf Γ : $|e^{ikz}| = e^{-kR \sin t}$



$$|I_\Gamma| \leq \int_0^\pi |e^{ikz} f(z)| |iRe^{it}| dt \leq MR \int_0^\pi e^{-kR \sin t} dt = 2MR \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin t} dt$$

Mit (*):

$$|I_\Gamma| \leq 2MR \int_0^{\pi/2} e^{-kR \frac{2t}{\pi}} dt = \frac{2MR\pi}{2kR} \left(-e^{kR \frac{2t}{\pi}} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi M}{k} \left(1 - e^{-kR} \right) < \frac{\pi M}{k}$$

$\Rightarrow I_\Gamma \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ weil $M \rightarrow 0$ □

Beispiel: $I = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+a^2} e^{-ikx} dx$, $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{-ikz}}{z^2+a^2} = \frac{e^{-ikz}}{(z+i|a|)(z-i|a|)} \text{ einfache Pole bei } z = \pm i|a|$$

$$\text{Residuen: } R(i|a|) = \frac{e^{k|a|}}{2i|a|}, \quad R(-i|a|) = \frac{e^{-k|a|}}{-2i|a|}$$

$$k < 0 : I = 2\pi i \frac{e^{k|a|}}{2|a|i} = \frac{\pi}{|a|} e^{k|a|}$$

$$k > 0 : I = -2\pi i \frac{e^{-k|a|}}{-2|a|i} = \frac{\pi}{|a|} e^{-k|a|}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{|a|} e^{-|ka|}$$

6.7.4 Hauptwertintegrale ("principal value")

Was passiert mit $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ wenn der Integrand einen *einfachen Pol* bei $x = x_0$ auf der reellen Achse hat? Definiere eine Kontur die den Pol umläuft:

$$C = [-R, x_0 - \rho] \cup \gamma \cup [x_0 + \rho, R] \cup \Gamma:$$

$$\Rightarrow \int_{[-R, x_0 - \rho]} + \int_{\gamma} + \int_{[x_0 + \rho, R]} + \int_{\Gamma} = 0$$

Hauptwertintegral:

$$P \int_{-R}^R f(x)dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{x_0 - \rho} + \int_{x_0 + \rho}^R \right) f(x)dx$$

Wenn man zeigen kann*, dass $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ für $R \rightarrow \infty$, dann:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z)dz = i\pi R(x_0)$$

*) Nützlich ist das folgende *Lemma von Jordan*: Wenn gilt

- (i) $f(z)$ ist meromorph in $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$,
- (ii) $\lim_{|z| \rightarrow 0} f(z)dz = 0$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$,
- (iii) $m > 0$,

dann: $I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} e^{imz} f(z)dz \rightarrow 0$ wenn $R \rightarrow \infty$

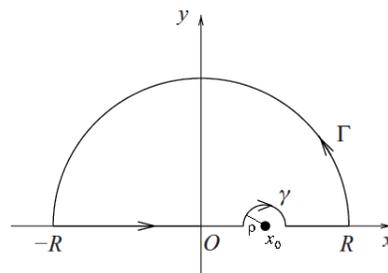
Bemerkung: In 6.7.2 hatten wir die stärkere Bedingung (ii) $|z|f(z) \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$.

Beispiel:

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x - a} dx, \quad a \in \mathbb{R}, \quad m > 0$$

$$g(z) = \frac{e^{imz}}{z - a};$$

$$f(z) = \frac{1}{z - a} \text{ erfüllt das Lemma von Jordan}$$



$$\Rightarrow P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imx}}{x-a} dx = i\pi R(a) = i\pi e^{ima}$$

$$\Rightarrow \text{Realteil : } P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x-a} dx = -\pi \sin(ma)$$

$$\text{Imaginärteil: } P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x-a} dx = \pi \cos(ma)$$

$$a = 0 : P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overbrace{\cos mx}^{\text{ungerade}}}{x} dx = 0, \quad P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \pi$$

A Lebesgue-Integral

A.1 Elemente der Maßtheorie

Beispiel 1: Intervall auf der reellen Achse $I = \{x|a < x < b\} = (a, b)$

Maß = Länge $L(I) = |b - a|$

Mengenfunktion: L : Teilmenge von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Eigenschaften:

- $L(I) \geq 0$, $L(I) \in [0, \infty]$
- die Intervalle $a < x \leq b = (a, b]$ oder $a \leq x < b = [a, b)$ oder $a \leq x < b = [a, b)$ haben die gleiche Länge wie (a, b)
- $a \leq x \leq a$ besteht aus einem Punkt und hat Länge 0
- $L(\{\}) = 0$ ($\{\}$ = leere Menge)

Vereinigung von Intervallen: Wir betrachten I_1, I_2, I_3, \dots
mit der Eigenschaft $I_1 \cap I_2 = \{\}$, $I_1 \cap I_3 = \{\}$, $I_2 \cap I_3 = \{\}$, \dots
Es gilt dann $L(I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots) = L(I_1) + L(I_2) + L(I_3) + \dots$

Beispiel 2: Verallgemeinerung auf \mathbb{R}^n , Ein Rechteck ist eine Menge der Form
 $R = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, $a_i \leq b_i = \{\underline{x}|a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_n < x_n < b_n\}$
Maß=Volumen $\text{Vol}(R) = |R| = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$

Definition: Maß einer Menge $\mu(E) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

1. $\mu(E)$ muss für jede Menge E im betrachteten Definitionsbereich definiert sein
2. $\mu(E) \geq 0$
3. $\mu(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n \mu(E_j)$ wenn für beliebige Paare $E_i \cap E_j = \{\}$ ($i \neq j$) gilt (Additivität)
4. Punkt 3 gilt auch für unendliche Vereinigungen von Mengen ($n \rightarrow \infty$) (σ -Additivität)

5. Wenn $E_1 \subset E_2$, dann $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$
6. Wenn man Punkte in E um den gleichen Abstand auf der reellen Achse verschiebt, so ist das Maß der verschobenen Menge gleich dem von E
7. Wenn E ein Intervall ist, dann ist $\mu(E) = L(E)$

Definition: Das *Lebesgue-Maß* einer Menge E ist die größte untere Schranke der Summe aller Intervalllängen derjenigen Intervalle, die E enthalten.

Definition: Eine Menge E heißt *messbar*, wenn ein Maß μ für E definiert ist ($0 \leq \mu(E) \leq \infty$)

Definition: Eine Eigenschaft $P(x)$ von Punkten $x \in E$ gilt *fast überall* (f.ü.), falls $\mu(\{x | P(x) \text{ gilt nicht}\}) = 0$

Beispiel 1 (Fortsetzung):

- $\mu([0, 1]) = 1$
 - $\mu(\{x \in \mathbb{Q} \text{ und } x \in [0, 1]\}) = 0$, da jeder Punkt Maß 0 hat, \mathbb{Q} ist die Menge der rationalen Zahlen, abzählbar unendlich
- $\Rightarrow \mu(\{x \in \mathbb{I} \text{ und } x \in [0, 1]\}) = 1$. \mathbb{I} ist die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Die Punkte $x \in [0, 1]$ sind f.ü. irrational.

Lebesgue Maß auf \mathbb{R}^n :

Definition: Die Funktion $\mu^* : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| \mid R_i \text{ Rechtecke, } \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \supset E \right\}$$

wird das *Lebesgue äussere Maß* genannt. Für $X \subset \mathbb{R}$, $\inf(X)$ ist die größte aller unteren Schranken $b : x \in X \Rightarrow b < x$ (Infimum, "greatest lower bound").

Bemerkungen:

1. Da \mathbb{R}^n die Vereinigung von Rechtecken ist, besitzt jede Teilmenge von \mathbb{R}^n ein äusseres Maß. Es gilt $\mu^*(\mathbb{R}^n) = \infty$ und $\mu^*(\{\}) = 0$. Für eine beliebige Menge ist $0 \leq \mu^*(E) \leq \infty$.
2. Es spielt keine Rolle ob man offene, abgeschlossene oder teilweise abgeschlossene Rechtecke benutzt, weil die Vereinigung aller Ränder Maß 0 hat.
3. Ist E beschränkt, so liegt E bereits in einem einzigen Rechteck. Deshalb ist in diesem Fall $\mu^*(E) < \infty$.

Definition: Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue)-*messbar*, falls $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$, $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$, gilt.

Satz: Die Einschränkung μ von μ^* auf die Lebesgue messbaren Mengen ist das *Lebesgue Maß*.

Insbesondere alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen sind Lebesgue messbar und $\mu(R) = |R|$ für alle Rechtecke R .

A.2 Lebesgue Integral

Sei E eine feste messbare Teilmenge von \mathbb{R}^n und μ das Lebesgue-Maß auf E .

Definition: $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *messbar*, falls $f^{-1}(I)$ messbar ist für alle Intervalle I . $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *messbar*, falls Real- und Imaginärteil messbar sind.

Satz: Stetige Funktionen sind messbar. Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind messbar. Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar.

Definition: Die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Funktion

$$\chi_A(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \underline{x} \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Funktionen der Form

$$\varphi(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{E_j}(x), \quad E_i \cap E_j = \{\}, i \neq j$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $E_i \subset E$ messbare Mengen sind, heißen *einfach*. Das Lebesgue-Integral wird zuerst für einfache Funktionen definiert.

Riemann Integral (Bernhard Riemann, 1854)

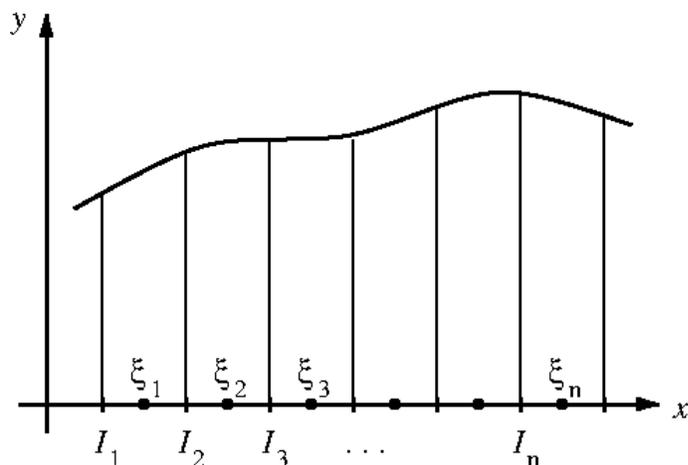


Figure 8: Riemann Integral: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Das Intervall I wird in endlich viele Teilintervalle I_1, \dots, I_n zerlegt, aus jedem I_ν wird ein Punkt ξ_ν gewählt und die Summe $\Sigma_R := \sum_\nu f(\xi_\nu) |I_\nu|$ wird gebildet.

Dirichlet Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in I$$

Je nach Wahl der ξ_ν schwankt Σ_R zwischen 0 und $1 \cdot |I|$. Die Dirichlet Funktion ist nicht Riemann-integrierbar.

Lebesgue Integral (Henri Lebesgue, 1904)

Das "Ordinaten-Intervall" $\inf_I f \leq y \leq \sup_I f$ wird in kleine Teilintervalle \mathcal{J}_μ geteilt, aus jedem \mathcal{J}_μ wird ein η_μ gewählt und die Mengen $E_\mu := \{x \in I \mid f(x) \in \mathcal{J}_\mu\}$ und die Summe $\Sigma_L := \sum_\mu \eta_\mu \cdot \mu(E)$ gebildet (siehe Fig. 9).

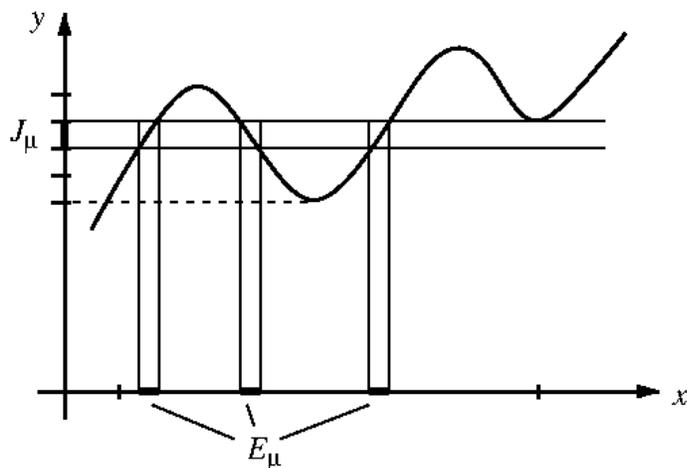


Figure 9: Dirichlet Funktion ist Lebesgue integrierbar $\int_I = 0$ wegen $\mu(\{x \in \mathbb{Q} \text{ und } x \in I\}) = 0$.

Definition: Sei $\varphi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(x)$ einfach und sei $\sum_{i=1}^m |\lambda_i| \mu(E_i) < \infty$. Dann heisst φ *integrierbar* und das Integral von φ ist die Zahl

$$\int_E \varphi d\underline{x} := \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(E_i).$$

Beispiel: Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion:

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{[a_i, a_{i+1}[}, \quad a \leq a_1 < \dots < a_{m+1} \leq b$$

Dann ist $\int_{[a,b]} \varphi d\underline{x} = \sum_i \lambda_i (a_{i+1} - a_i)$ wie für das Riemann Integral.

Lemma: Sei $f \geq 0$ messbar. Dann existiert eine Folge φ_i von einfachen Funktionen mit $0 \leq \varphi_i(x) \leq \varphi_{i+1}(x)$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(x) = f(\underline{x}) \forall \underline{x} \in E$.

Definition und Lemma: Sei $\boxed{f \geq 0}$ messbar, φ_i eine Folge wie im vorherigen Lemma. Die Zahl $\int_E f(\underline{x}) d\underline{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E \varphi_i(\underline{x}) d\underline{x}$ ist unabhängig von der Wahl der Folge φ_i . Ist $\int_E f d\underline{x} < \infty$, dann heisst f (Lebesgue-) *integrierbar* und $\int_E f d\underline{x}$ das Lebesgue Integral von f .

Definition: Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $f_{\pm}(\underline{x}) := \max\{\pm f(\underline{x}), 0\}$. Die Funktionen f_{\pm} sind messbar und nicht negativ. f heisst f (Lebesgue-) *integrierbar* falls f_{\pm} integrierbar sind. Das Integral von f ist dann

$$\int_E f d\underline{x} = \int_E f_+ d\underline{x} - \int_E f_- d\underline{x}.$$

Definition: $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ heisst *integrierbar*, falls Realteil und Imaginärteil integrierbar sind. Das Integral von f ist

$$\int_E f d\underline{x} = \int_E \Re f d\underline{x} + i \int_E \Im f d\underline{x}.$$

Lemma: Sei $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. f ist genau dann integrierbar, falls $|f|$ integrierbar ist, d.h. wenn $\int_E |f| d\underline{x} < \infty$.

Alternative Notationen:

$$\int_E f d\underline{x} = \int_E f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_E f(x_1, \dots, x_n) d\underline{x} = \int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

Satz: Seien f, g integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

1. $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und $\int_E (\alpha f + \beta g) d\underline{x} = \alpha \int_E f d\underline{x} + \beta \int_E g d\underline{x}$
2. $f \leq g \Rightarrow \int_E f d\underline{x} \leq \int_E g d\underline{x}$
3. $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \int_E f d\underline{x} = \int_E g d\underline{x}$
4. $\int_E |f| d\underline{x} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ f.ü.
5. $|\int_E f d\underline{x}| \leq \int_E |f| d\underline{x}$
6. Ist $F \subset E$ messbar, so ist die Einschränkung von f auf F ebenfalls integrierbar, und es gilt $\int_F f d\underline{x} = \int_E f \chi_F d\underline{x}$
7. f Riemann integrierbar auf $[a, b]$ (kompakt) $\Rightarrow f$ Lebesgue integrierbar und Lebesgue und Riemann Integrale stimmen überein
8. Für alle affinen Transformationen $\underline{x} \rightarrow A\underline{x} + \underline{b}$ von \mathbb{R}^n , ist $x \mapsto f(A\underline{x} + \underline{b})$ messbar und es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) d\underline{x} = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(A\underline{x} + \underline{b}) d\underline{x}$

A.3 Konvergenzsätze

Beispiel: Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gleichmäßig, denn $|f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$ für alle $n > \frac{1}{\epsilon}$ unabhängig von x . Aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$$

Sei E wiederum eine feste messbare Teilmenge von \mathbb{R}^n . Alle Funktionen seien auf E definiert.

Satz von Levi: (*Beppo Levi, Satz von der monotonen Konvergenz*)

Sei f_n eine Folge integrierbarer Funktionen mit $0 \leq f_n(\underline{x}) \leq f_{n+1}(\underline{x}) \rightarrow f(\underline{x})$ ($i \rightarrow \infty$) fast überall in E . Ist die Folge $\int_E f_n d\underline{x}$ beschränkt, so ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(\underline{x}) d\underline{x} = \int_E f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Im obigen Beispiel ist $f_n \geq f_{n+1}$ und man kann Grenzwert und Integral nicht vertauschen.

Satz von Lebesgue: (*Henri Lebesgue, Satz von der dominierten Konvergenz*)

Sei f_n eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\underline{x}) = f(\underline{x})$ fast überall in E und es existiere eine integrierbare Funktion g mit $|f_n(\underline{x})| \leq g(\underline{x}) \forall n$ fast überall in E . Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(\underline{x}) d\underline{x} = \int_E f(\underline{x}) d\underline{x}$$

A.4 Satz von Fubini

Seien $E \subset \mathbb{R}^n$ und $F \subset \mathbb{R}^m$ feste messbare Mengen. Wir betrachten messbare Funktionen auf $E \times F \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Satz von Fubini:

Sei $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge (\Leftrightarrow Menge von Maß 0) $N \subset F$, so dass gilt:

1. Für alle $\underline{y} \in F \setminus N$ ist die Funktion $x \mapsto f(\underline{x}, \underline{y})$ über \mathbb{R}^n integrierbar.
2. Ist $\Phi : F \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(\underline{y}) := \begin{cases} \int_E f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} & \underline{y} \in F \setminus N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ist Φ integrierbar und es gilt:

$$\int_F \Phi(\underline{y}) d\underline{y} = \int_{E \times F} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} d\underline{y}$$

Die letzte Gleichung wird auch geschrieben

$$\int_{E \times F} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} = \int_F \left(\int_E f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x} \right) d\underline{y}$$

Dabei kann auf der rechten Seite auch zuerst über \underline{y} und dann über \underline{x} integriert werden. Das bedeutet, dass die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen immer auf die Berechnung von iterierten eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden kann.

Der Satz von Fubini ist nur anwendbar, wenn man weiß, dass f integrierbar ist. Dazu hilft der

Satz von Tonelli:

Sei f messbar. Existiert $\int_{E \times F} |f(\underline{x}, \underline{y})| d\underline{x} d\underline{y}$ (mit irgendeiner Integrationsreihenfolge), so ist f integrierbar [3].

References

- [1] K. F. Riley and M. P. Hobson, *Essential Mathematical Methods for the Physical Sciences*, Cambridge University Press, 2011. https://drive.google.com/file/d/1_XohQ-E8Wgp7-uc3CswFOR0wcyr60AiW/view
- [2] K. F. Riley, *Problems for Physics Students: With Hints and Answers*, Cambridge University Press, 1982. https://drive.google.com/file/d/11Vz159Y5RC2CGPk32-KocAP0qY9_Bdpj/view
- [3] K. Fritzsche, *Grundkurs Analysis 2*, Spektrum - Akademischer Verlag, 2013. http://www2.math.uni-wuppertal.de/~fritzsck/kf_book.html#gka2