

Elektrodynamik und spezielle Relativitätstheorie

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	2
1.1 Motivation	2
1.2 Struktur der Vorlesung	3
2 Elektrostatik	4
2.1 Das Coulomb-Gesetz	4
2.1.1 Festlegung der Einheiten	5
2.1.2 Superpositionsprinzip	5
2.2 Das elektrische Feld	5
2.2.1 Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung	6
2.3 Das elektrostatische Potential	11
2.4 Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung	12
2.5 Energie des elektrostatischen Feldes	15
2.5.1 Das Selbstenergieproblem	17
2.6 Randwertprobleme mit idealen Leitern	18
2.6.1 Eindeutigkeit der Lösungen	19
2.6.2 Methode der Spiegelladungen	21
2.6.3 Leiterkugeln und Punktladungen	22
2.6.4 Leiterkugel im homogenen elektrischen Feld	24
2.7 Multipole	26
2.7.1 Allgemeine Multipolentwicklung	26
2.7.2 Eigenschaften eines Dipols	27
2.8 Lösung der Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten	28
2.8.1 Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten	28
2.8.2 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	31
2.8.3 Lösung der Poisson-Gleichung	38
2.9 Dielektrika	41
2.9.1 Das makroskopische elektrische Feld	42
2.9.2 Freie und gebundene Ladungen in einem Dielektrikum	43
2.9.3 Elektrostatische Energie im Dielektrikum	44
2.9.4 Randbedingungen an der Grenzfläche zweier Dielektrika	44
2.9.5 Randwertprobleme mit Dielektrika	46
3 Magnetostatik	49
3.1 Ströme	49
3.2 Das Magnetfeld	51
3.2.1 Die Wirkung des Magnetfeldes auf Ladungen	52
3.3 Das magnetische Potential	54
3.3.1 Eichsymmetrie	55
3.3.2 Lösung des magnetostatischen Problems in der Coulomb-Eichung	56
3.4 Energiedichte des magnetostatischen Feldes	59
3.5 Magnetische Multipolentwicklung	60
3.5.1 Der Dipolterm	61
3.5.2 Eigenschaften eines magnetischen Dipols	62
3.6 Magnetfeld in Materie	63
3.6.1 Das makroskopische Magnetfeld	64
3.6.2 Magnetische Polarisierung in Medien	64
3.6.3 Magnetische Eigenschaften verschiedener Materialien	66
3.6.4 Randbedingungen	67

4 Elektrodynamik	68
4.1 Magnetische Induktion	68
4.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	69
4.3 Die Maxwell-Gleichungen	72
4.4 Dynamische Potentiale	75
4.4.1 Eichsymmetrie	75
4.4.2 Grundgleichungen für die dynamischen Potentiale	76
4.5 Allgemeine Lösung der Wellengleichung	77
4.5.1 Berechnung der Green'sche Funktion	78
4.5.2 Retardierte und Avancierte Potentiale	83
4.6 Energie des elektromagnetischen Feldes	84
4.7 Der Hertz'sche Dipol	86
5 Spezielle Relativitätstheorie	88
5.1 Relativistische Kinematik	89
5.1.1 Ereignisse, Weltlinien und Raum-Zeit Diagramme	89
5.1.2 Inertialsysteme	89
5.1.3 Relativität der Gleichzeitigkeit	92
5.1.4 Lorentz-Transformation	94
5.1.5 Addition von Geschwindigkeiten	99
5.1.6 Zeitartige, raumartige und lichtartige Abstände	99
5.1.7 Längenkontraktion und Zeitdilatation	101
5.2 Relativistische Notation	103
5.2.1 Lorentz-Transformationen in relativistischer Notation	105
5.2.2 Die Lorentz-Gruppe	108
5.2.3 Vierervektoren und -tensoren	109
5.3 Relativistische Energie und relativistischer Impuls	110
6 Elektrodynamik in relativistischer Notation	112
6.1 Eichpotentiale und Felder	112
6.2 Grundgleichungen für das Eichpotential	113
6.3 Maxwell-Gleichungen in relativistischer Notation	113
6.4 Euler-Lagrange Gleichungen für das elektromagnetische Feld	114
6.5 Die Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes	117
6.6 Kovariante Form der Euler-Lagrange Gleichungen	118
6.6.1 Variation der Wirkung	118
6.6.2 Die kovarianten Euler-Lagrange-Gleichungen der Elektrodynamik	118
6.7 Bewepte Punktladungen	119
6.7.1 Die Unmöglichkeit idealer starrer Körper	119
6.7.2 Die Lagrangefunktion einer freien, relativistischen Punktladung	120
6.7.3 Die Euler-Lagrange-Gleichung einer freien, relativistischen Punktladung	122
6.7.4 Kopplung an das elektromagnetische Feld	123
6.7.5 Die Hamiltonfunktion einer gekoppelten Punktladung	124

1 Einführung

1.1 Motivation

Elektrodynamik wird im Kanon der theoretischen Physik oft als der "langweiligste" Teil betrachtet. Dieser Eindruck liegt wohl zu einem großen Teil an dem unglaublichen Erfolg der Theorie, die abgeschlossen und in gewissem Sinne selbstkonsistent und vollständig ist. Die Elektrodynamik stellt einen Großteil des Fortschritts der theoretischen Physik im 19. Jahrhundert dar und überwindet viele Konzepte der klassischen Mechanik oder erweitert diese entscheidend. Im Gegensatz zur Mechanik, in der wir es neben den Grundgesetzen (den Newton'schen Axiomen) mit vielen

heuristischen Gesetzen zu tun hatten (denken Sie nur an das Hook'sche Gesetz, das Reibungsgesetz oder die Elastizitätsmodule), begegnen wir in der Elektrodynamik erstmals einer Theorie, in der sich alle Phänomene vollständig aus den Grundgleichungen (den Maxwell-Gleichungen) herleiten lassen. Dies stellt eine ganz neue Qualität dar und liefert eine Blaupause für das, was wir seither als fundamentale Theorie akzeptieren können: Ein paar allgemein gültige Grundgleichungen mit unzähligen "Materialkonstanten" (Dichte, Wärmeleitfähigkeit, Widerstand etc.) sind nicht mehr gut genug.

Ein zweiter entscheidender Fortschritt der Elektrodynamik besteht darin, dass in ihr erstmals zwei als verschieden bekannte Grundkräfte (Elektrizität und Magnetismus) auf eine einzige reduziert werden konnten¹. Auch die Suche nach der Vereinheitlichten Beschreibung von verschiedenen Grundkräften wirkte und wirkt immer noch als ein Baustein unserer Suche nach grundlegenden Theorien.

Das entscheidende neue Konzept aber, das Sie in dieser Vorlesung kennenlernen werden ist das des Feldes. Heute ist es kaum mehr nachvollziehbar, wie wichtig das Feldkonzept auf dem Wege zu einer Überwindung eines völlig mechanistischen Weltbildes war. Mithilfe des Feldkonzepts gelingt es uns erst, die rätselhafte Fernwirkung zu überwinden die z.B. im Newton'schen Gravitationsgesetz steckt, womit letztlich die Tür zur modernen Physik aufgestoßen wird. Wir erkennen schließlich, dass die Überwindung der Fernwirkung zu einer neuen Naturkonstante führt, die Raum und Zeit verbindet und wir sehen die Maxwell-Gleichungen als die ersten "modernen" physikalischen Grundgleichungen, die der speziellen Relativitätstheorie genügen.

Die klassische Elektrodynamik ist heute, trotz ihrer unbestrittenen Nützlichkeit in unzähligen Anwendungen, als Kandidat für eine fundamentale Theorie überholt. Nichtsdestotrotz bildet sie als das klassische Beispiel einer Feldtheorie den Ausgangspunkt für alle drei Theorien, die derzeit unsere beste gesicherte Beschreibung der Naturkräfte darstellen: die allgemeine Relativitätstheorie, eine klassische Feldtheorie, die die Gravitation beschreibt und die beiden Quantenfeldtheorien der elektroschwachen und starken Wechselwirkungen, die beide nach dem Muster der Quantenelektrodynamik, der quantisierten Version der Elektrodynamik, formuliert sind. Dabei haben die Unzulänglichkeiten der klassischen Elektrodynamik selbst oft den Anstoß gegeben diese weiteren Entwicklungen aufzugreifen. Das Konzept der Punktladung, das wir als Idealisierung einführen müssen, wird sich als problematisch herausstellen und ein "klassisches Atom" kann, wie wir sehen werden, aufgrund der klassischen Elektrodynamik nicht stabil sein.

Auch in mathematischer und rechentechnischer Hinsicht werden Sie in dieser Vorlesung vieles kennen- und anwenden lernen, was weit über den Bereich der klassischen Elektrodynamik hinaus Anwendung findet. Elektrodynamik ist in den Begriffen der Vektoranalysis formuliert - $\vec{\nabla}$ und die Integralsätze werden unsere besten Freunde sein. Wir werden partielle Differentialgleichungen lösen und sehen, wie die Fourier-Transformation viele Probleme vereinfacht. Und wir werden viele der Probleme tatsächlich analytisch lösen können, weil die Elektrodynamik eine freundliche, lineare Theorie ist (genau gesagt: die Maxwell-Gleichungen sind linear in den Feldern). Diese Techniken werden Ihnen später unter anderem das Rüstzeug dafür geben z.B. die Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik zu verstehen und zu lösen.

1.2 Struktur der Vorlesung

Wir werden die Vorlesung mit Elektrostatik beginnen, d.h. mit der Untersuchung der Eigenschaften statischer Ladungsverteilungen. Ausgehend vom Coulomb-Gesetz, das die Kraft zwischen zwei statischen elektrischen Ladungen beschreibt und mathematisch nach dem Vorbild des Newton'schen Gravitationsgesetzes formuliert ist, werden wir das elektrische Feld \vec{E} und das daraus abgeleitete Potential Φ zunächst als Hilfsgrößen einführen und lernen, wie wir sie für verschiedene interessante Ladungskonfigurationen berechnen.

Im zweiten Teil der Vorlesung wenden wir uns der Magnetostatik zu, der Untersuchung stationärer, zeitlich nicht veränderlicher Ströme. Diese bewirken magnetische Wirbelfelder \vec{B} , die auch mithilfe eines Vektorpotentials \vec{A} beschrieben werden können. Analog zur Elektrostatik werden wir auch hier Techniken kennenlernen Magnetfelder aus gegebenen Strömen zu berechnen.

1. Man könnte argumentieren, dass Newtons Gravitationsgesetz den freien Fall nahe der Erdoberfläche mit den Kepler-Gesetzen vereinigt hat, die die Umlaufbahnen von Planeten und Monden beschreiben. In gewissem Sinne ist natürlich auch das eine Vereinheitlichung, wobei allerdings beachtet werden sollte dass es vor dem Gravitationsgesetz keine physikalische Erklärung für das Kepler-Gesetz gegeben hat.

Im dritten Teil der Vorlesung werden wir uns mit zeitabhängigen Phänomenen befassen. Wir werden sehen, wie uns das Induktionsgesetz zu den Maxwell-Gleichungen führt und welche neue Art von dynamischen Lösungen diese Gleichungen erlauben.

Im vierten Teil der Vorlesung werden wir sehen, wie eine neue Naturkonstante, die Lichtgeschwindigkeit c , aus den Maxwell-Gleichungen folgt und welche Konsequenzen diese für die klassische Mechanik hat.

Schließlich werden wir die Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie betrachten und sehen, wie wir sie analog zur klassischen Lagrange'schen und Hamilton'schen Mechanik betrachten und aus einem Extremalprinzip herleiten können.

2 Elektrostatik

Elektrostatik, wie Magnetismus, sind Phänomene die seit der Antike bekannt sind. Das Wort "Elektrizität" leitet sich vom altgriechischen Wort für Bernstein ("elektron") ab. Trotzdem wurden die ersten quantitativen Gesetze für die elektrische Kraft aber erst am Ende des 18. Jahrhunderts aufgestellt

2.1 Das Coulomb-Gesetz

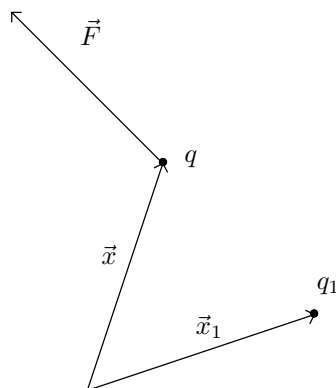
Im Jahre 1785 veröffentlichte Charles Augustin de Coulomb ein Gesetz, das die Kraft zwischen zwei statischen, unbewegten Ladungen (hier q und q_1) beschreibt:

$$\vec{F} \propto \frac{qq_1}{r^2} \vec{x}_0$$

Dabei ist $r = |\vec{x} - \vec{x}_1|$ der Abstand zwischen den Ladungen, die an den Punkten \vec{x} und \vec{x}_1 sitzen und $\vec{x}_0 = (\vec{x} - \vec{x}_1)/r$ der Richtungsvektor der Verbindungslinie. Dieses Gesetz ist nach dem Muster des Newton'schen Gravitationsgesetzes aufgestellt und vereint folgende empirische Resultate:

1. Die Kraft ist proportional zu jeder der beiden Ladungen q und q_1
2. Die Kraft ist proportional dem Quadrat des inversen Abstands
3. Die Kraft zeigt entlang der Verbindungslinie der Punktladungen

Wie das Gravitationsgesetz die Idealisierung einer Punktmasse enthält, enthält das Coulomb-Gesetz die Idealisierung einer **Punktladung**. Im Unterschied zum Gravitationsgesetz gibt es allerdings positive und negative Ladungen, sodass elektrische Ladung, im Unterschied zur gravitierenden Masse, abgeschirmt werden kann. Darüberhinaus ziehen sich Punktladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen an, was in der Definition der Proportionalitätskonstante berücksichtigt werden muss.



2.1.1 Festlegung der Einheiten

Wir müssen noch die Proportionalitätskonstante im Coulomb-Gesetz festlegen.

- Im SI-System ist die Einheit der Ladung ($1\text{C} = 1\text{A}\cdot\text{s}$) über die Stromstärke (1A) definiert. Das Coulomb-Gesetz lautet

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \vec{x}_0$$

mit der Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$$\epsilon_0 \cong 8.854187 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

Die Kraft auf zwei Ladungen von je 1C in einem Abstand von 1m zueinander ist daher $F \sim 9 \times 10^9\text{N}$. Die Elementarladung ist

$$e = 1.60217733(49) \times 10^{-19}\text{C}$$

- Im cgs-System ist die Einheit der Ladung 1esu (electrostatic unit) über die Coulomb-Kraft definiert. Zwei Ladungen von je 1esu im Abstand 1cm üben aufeinander eine Kraft von 1dyn aus. Daher ist das Coulomb-Gesetz einfach

$$\vec{F} = \frac{qq_1}{r^2} \vec{x}_0$$

Wir haben

$$1\text{dyn} = 1 \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} = \frac{1\text{esu}^2}{1\text{cm}^2}$$

daher ist

$$1\text{esu} = 1 \text{g}^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{s}^{-1}$$

Im Vergleich zum Coulomb ist das eine sehr kleine Ladung:

$$1\text{C} \cong 2.99792458 \times 10^9\text{esu}$$

und die Elementarladung ist

$$e = 4.8032068(15) \times 10^{-10}\text{esu}$$

Im Rest der Vorlesung werden wir SI Einheiten verwenden.

2.1.2 Superpositionsprinzip

Neben der Coulomb-Kraft gibt es keine weitere Kraft zwischen statischen Punktladungen. Die Gesamtkraft für eine Ladungsverteilung kann daher auf die Summe der Coulombkräfte zwischen den Punkten reduziert werden.

2.2 Das elektrische Feld

Die Coulomb-Kraft, wie im übrigen auch die Newton'sche Gravitationskraft, ist ein physikalisch nicht sehr zufriedenstellendes Konzept, da sie eine Fernwirkung beinhaltet. Machen wir ein Gedankenexperiment, indem wir z.B. die Sonne plötzlich verschwinden lassen. Laut Newton'schem Gravitationsgesetz würde die Wirkung der Schwerkraft der Sonne auf die Erde damit sofort enden, obwohl, wie wir wissen, Licht von der verschwundenen Sonne immer noch ca. 8 Minuten lang die Erde erreichen würde.

Um einen allerersten Schritt weg von einer Fernwirkung zu machen, interpretieren wir das Coulomb-Gesetz etwas um. Anstatt eine Fernwirkung zwischen zwei Ladungen zu haben, betrachten wir zunächst eine der beiden Ladungen, z.B. q_1 , und sagen, dass diese ein elektrostatisches Feld \vec{E} erzeugt, das wir so definieren

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{x}_0$$

Die Kraft auf die Ladung q_2 ist demnach

$$\vec{F}(\vec{x}) = q \vec{E}(\vec{x})$$

Wir haben die Fernwirkung also rein formal dadurch beseitigt, dass wir die zwei Ladungen aufgeteilt haben in eine, die das elektrische Feld erzeugt und eine zweite, die in diesem Feld eine Kraft spürt. Natürlich ist es im konkreten Fall unserer zwei Ladungen q und q_1 so, dass wenn wir die Kraft auf q wissen möchten, wir das elektrische Feld betrachten müssen, das von q_1 verursacht wird und umgekehrt. Wenn wir also die Kraft z.B. auf q wissen möchten, dürfen wir das elektrische Feld, das q selbst erzeugt, nicht mit berücksichtigen. Daher hängt die Kraft, die auf q wirkt nicht vom *tatsächlichen* elektrischen Feld der Konfiguration mit q_1 und q ab, sondern vom Feld der *hypothetischen* Konfiguration, in der q nicht vorhanden ist. Um diese Diskrepanz aufzulösen führen wir das Konzept einer **Probeladung** ein, deren elektrische Ladung vernachlässigbar klein ist, sodass sie das elektrische Feld selbst nicht beeinflusst. Damit gelangen wir zur allgemeinen Definition des elektrischen Feldes einer Ladungsverteilung

$$\vec{E}(\vec{x}) := \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} F(\vec{x})$$

basierend auf der elektrostatischen Kraft $\vec{F}(\vec{x})$, die am Ort \vec{x} auf die Probeladung q wirkt.

2.2.1 Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung

Zunächst schreiben wir das elektrostatische Feld einer Punktladung als

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{x}_0 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{r} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} \end{aligned}$$

Aufgrund des Superpositionsprinzips ist es nun einfach, das elektrische Feld für beliebige Punktladungen q_i , die sich an den Orten \vec{x}_i befinden, zu ermitteln. Wir haben

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}$$

was für kontinuierliche Ladungsverteilungen mit Ladungsdichte $\rho(\vec{x}')$ verallgemeinert werden kann zu

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Anmerkung. Aus dem kontinuierlichen Ausdruck können wir den Ausdruck für die Punktladung wieder zurückgewinnen, indem wir die Ladungsdichte als eine Summe von δ -"Funktionen"

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

schreiben, wobei das Dirac'sche δ definiert ist als

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad \text{für } x \neq 0 \\ \int_R \delta(x) dx &= \begin{cases} 1 & 0 \in R \\ 0 & 0 \notin R \end{cases} \end{aligned}$$

und $\delta^3(\vec{x}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$. Natürlich ist das Dirac δ keine Funktion im mathematischen Sinne (es kann mathematisch sauber als Distribution definiert werden), doch wir werden es effektiv so betrachten. Seine wichtigsten zwei Eigenschaften lauten

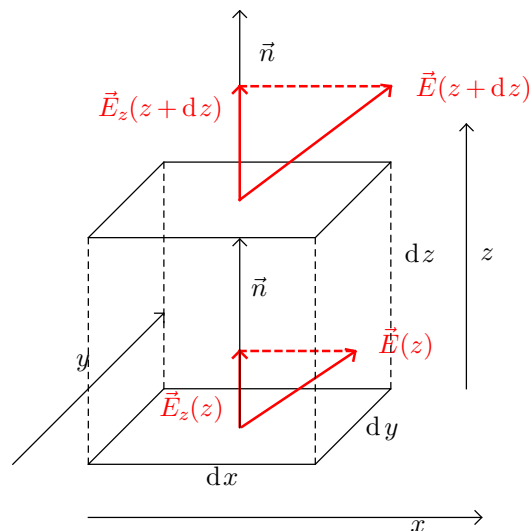
$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

das direkt aus der Definition folgt und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta'(x-a) dx = -f'(a)$$

was mittels partieller Integration bewiesen werden kann.

Für die weitere Entwicklung benötigen wir den Gauß'schen Integralsatz, der den Fluss eines Vektorfeldes (hier des elektrischen Feldes \vec{E}) durch eine geschlossene Oberfläche beschreibt. Dazu betrachten wir zunächst ein infinitesimales Volumenelement entlang der kartesischen Koordinatenachsen:



In der Skizze betrachten wir die Flussänderung in der z -Richtung. Der Fluss durch eine Oberfläche ist gegeben als

$$d\phi = dA \vec{E} \cdot \vec{n}$$

wobei dA das Flächenelement und \vec{n} der Normalenvektor sind. Für die obere Fläche in der Skizze ist der Fluss *aus* den infinitesimalen Quader $dx dy \vec{E}_z(z+dz)$, während für die untere Fläche der Fluss *in* den infinitesimalen Quader $dx dy \vec{E}_z(z)$ ist. Der Gesamtfluss *aus* dem Quader durch die obere und untere Fläche ist daher

$$d\phi_z = (E_z(z+dz) - E_z(z)) dx dy = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV$$

Eine analoge Konstruktion für die x - und y -Richtungen ergibt den Gesamtfluss aus dem infinitesimalen Quader

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV$$

Der Ausdruck in der Klammer ist die Divergenz des elektrischen Feldes in kartesischen Koordinaten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Wir können nun ein beliebiges Volumen V nehmen und es mit infinitesimalen Quadern füllen. Der Gesamtfluss aus dem Volumen V ist nur durch den Gesamtfluss durch seine Oberfläche ∂V gegeben, da in den Grenzschichten zwischen zwei Quadern im inneren des Volumens immer ein Fluss nach außen und ein gleich großer nach innen zeigt. Daraus erhalten wir den Gauß'schen Integralsatz

$$\phi = \oint_{\partial V} \vec{E}(x) \cdot \vec{n} \, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) \cdot dV$$

Wenden wir den Gauß'schen Integralsatz für eine Punktladung q_1 an am Ort \vec{x}_1 an. Wir berechnen zunächst die Divergenz des resultierenden elektrischen Feldes:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{2(\vec{x} - \vec{x}_1)}{((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1)}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}\right) \\ &= 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}_1 \end{aligned}$$

und sehen, dass diese überall verschwindet außer am Ort, an dem sich die Ladung befindet. Wir sehen daher, dass der elektrische Fluss durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens V verschwindet, wenn dieses nicht die Punktladung enthält:

$$\vec{x}_1 \notin V: \quad \oint_{\partial V} \vec{E}(x) \cdot \vec{n} \, dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) \cdot dV = 0$$

Um den elektrischen Fluss durch die Oberfläche eines Volumens zu berechnen, das die Ladung enthält, betrachten wir zunächst eine Kugel mit Radius R um \vec{x}_1 . Das elektrische Feld steht senkrecht zur Kugeloberfläche, daher ist der Gesamtfluss durch die Kugeloberfläche gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_{\partial V} \vec{E}(x) \cdot \vec{n} \, dA \\ &= 4\pi R^2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \\ &= \frac{q_1}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Dies gilt im Speziellen auch im Grenzfall $R \rightarrow 0$, daher haben wir insgesamt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1)$$

Mithilfe des Superpositionsprinzips können wir dieses Ergebnis für mehrere Punktladungen q_i an den Orten \vec{x}_i verallgemeinern

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

und schließlich den Ausdruck für eine Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ erhalten:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x})}$$

Dieses Ergebnis hat zwei unmittelbare Konsequenzen:

1. Der Gesamtfluss ϕ durch die Oberfläche eines Volumens ist nur durch die Gesamtladung im Volumen gegeben:

$$\phi(V) = \oint_{\partial V} \vec{E}(x) \cdot \vec{n} \, dA = \sum_{i: \vec{x}_i \in V} \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

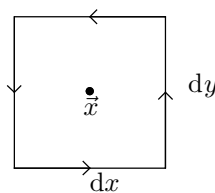
2. Positive Ladungen \oplus sind Quellen und negative Ladungen \ominus sind Senken des elektrischen Feldes. Im üblichen Feldlinienbild bedeutet das:

- Feldlinien beginnen in \oplus und enden in \ominus
- Anzahl der Feldlinien an den Ladungen \propto Ladung
- Richtung des \vec{E} aus Tangente an Feldlinie
- Betrag $|\vec{E}|$ aus Feldliniendichte

Wir wissen nun, dass Feldlinien in Ladungen beginnen und enden, aber gibt es auch geschlossene Feldlinien? Berechnen wir dazu das Umlaufintegral

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

entlang des Randes ∂A einer Fläche A . Wie beim Beweis des Gauß'schen Integralsatzes betrachten wir zunächst auch hier eine infinitesimale rechteckige Fläche entlang der Koordinatenachsen, z.B. x und y , sodass die Flächennormale der Einheitsvektor in z -Richtung ist



Das Konturintegral lautet

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{x} &= E_x \left(\vec{x} - \frac{1}{2} d\vec{y} \right) dx + E_y \left(\vec{x} + \frac{1}{2} d\vec{x} \right) dy - E_x \left(\vec{x} + \frac{1}{2} d\vec{y} \right) dx - E_y \left(\vec{x} - \frac{1}{2} d\vec{x} \right) dy \\ &= \frac{\partial E_y(\vec{x})}{\partial x} dx dy - \frac{\partial E_x(\vec{x})}{\partial y} dy dx \\ &= (\partial_x E_y - \partial_y E_x) dx dy \end{aligned}$$

wobei wir den Klammerausdruck als z -Komponente der Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ und $dx dy$ als die Flächennormale $\vec{n} d\sigma$ in z -Richtung erkennen. Für die x - und y -Richtung können wir jeweils analoge Ausdrücke ableiten. schließlich können wir jede beliebige geschlossene Kurve mit infinitesimalen Rechtecken in den Koordinatenrichtungen füllen und, da innere Linien immer doppelt mit jeweils

verschiedener Richtung (also verschiedenem Vorzeichen) auftreten, bleibt in der Summe wieder nur der Umfang der gesamten Fläche und wir erhalten

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} \, dA$$

den Stokes'schen Integralsatz. Eine zentrale Eigenschaft dieses Integralsatzes ist die Unabhängigkeit des Resultats von der genauen Form der Fläche A . Jede Fläche B , die denselben Rand $\partial A = \partial B$ hat, liefert dasselbe Ergebnis.

Wir wollen nun sehen, ob es im elektrostatischen Feld geschlossene Feldlinien gibt, d.h., ob es Umlaufintegrale des elektrostatischen Feldes gibt, die nicht verschwinden. Wir betrachten zunächst wieder den Fall einer Punktladung und verwenden anschließend das Superpositionsprinzip, um das Resultat zu verallgemeinern. Für eine Punktladung q_1 am Ort \vec{x}_1 haben wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} (z - z_1)2(y - y_1) - (y - y_1)2(z - z_1) \\ (x - x_1)2(z - z_1) - (z - z_1)2(x - x_1) \\ (y - y_1)2(x - x_1) - (x - x_1)2(y - y_1) \end{pmatrix} ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Wieder können wir über den Punkt \vec{x}_1 , an dem die Ladung sitzt, zunächst keine Aussage treffen. Wir können aber feststellen, dass wenn wir ein Umlaufintegral um eine Fläche A wählen in der \vec{x}_1 enthalten ist, der Rand dieser Fläche ∂A immer auch durch eine andere Fläche A' ausgedrückt werden kann (also $\partial A = \partial A'$) in der \vec{x}_1 nicht enthalten ist. Daher ist also

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{x} &= \oint_{\partial A'} \vec{E} \cdot d\vec{x} \\ &= \int_{A'} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} \, dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wir können auch direkt das Umlaufintegral um einen Kreis dessen Zentrum \vec{x}_1 ist berechnen. Da das elektrische Feld \vec{E} auf dem gesamten Kreisring immer normal auf den Tangentialvektor $d\vec{x}$ steht, sieht man auch hier sofort, dass das Umlaufintegral verschwindet. Daraus folgt nun, dass die Rotation des elektrostatischen Feldes für eine beliebige Ladungsverteilung ebenfalls verschwindet. Wir haben damit die zwei Grundgleichungen für elektrostatische Felder gefunden, von denen wir im Rest des Kapitels ausgehen werden. Wir schreiben sie in differentieller und integraler Form:

$$\begin{array}{ll} \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} & \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA = \frac{1}{\epsilon_0} q(V) \\ \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} & \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0 \end{array}$$

Bemerkung. Diese Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes können wir als topologische Aussagen verstehen. Ob eine Punktladung sich innerhalb oder ausserhalb einer Oberfläche in \mathbb{R}^3 befindet ist eine wohldefinierte, topologische Eigenschaft. Es ist daher rein mathematisch möglich dem elektrischen Fluss aus einer Oberfläche eindeutig die Ladung innerhalb dieser Oberfläche zuzuordnen. Die Identifikation einer Punktladung mit einer Quelle des elektrostatischen Feldes ist also logisch möglich und wie so oft ist in der Natur alles logisch mögliche auch realisiert. Ganz anders verhält es sich beim Umlaufintegral. In \mathbb{R}^3 ist es nicht eindeutig ob eine Schleife, über die das Umlaufintegral gebildet wird, die Punktladung umschliesst oder nicht. Entsprechend ist es auch

logisch inkonsistent und daher in der Natur auch nicht realisiert, dass eine statische Punktladung ein Wirbelfeld mit nichtverschwindendem Umlaufintegral erzeugt. Objekte in \mathbb{R}^3 , die eindeutig von einer Schleife, umschlossen werden sind selbst wieder Schleifen (oder unendlich lange Linien). Von unendlich langen Linien oder Schleifen können wir in \mathbb{R}^3 durchaus eindeutig sagen ob (und auch wie oft) sie von anderen Schleifen umwickelt werden und entsprechend können solche Objekte Wirbelfelder produzieren. In der Magnetostatik, in der geschlossene Stromschleifen die Grundobjekte darstellen, werden wir darauf zurückkommen und sehen wie diese geschlossenen Stromschleifen tatsächlich magnetische Wirbelfelder produzieren.

2.3 Das elektrostatische Potential

Versuchen wir nun die Feldgleichungen, die wir gefunden haben, möglichst allgemein zu lösen. Dazu betrachten wir zunächst wieder das Feld einer Punktladung q_1 am Ort \vec{x}_1

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3}$$

Wir stellen fest, dass sich dieses Feld, ähnlich dem Gravitationsfeld der Newton'schen Gravitation, als Gradient eines Skalarfeldes schreiben lässt. Im Speziellen ist

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} &= \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= - \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \end{aligned}$$

und somit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$

mit

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|}$$

dem skalaren Potential. Wieder können wir das Superpositionsprinzip verwenden, um das skalare Potential einer Menge von Punktladungen q_i an den Orten \vec{x}_i

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

bzw. einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

zu erhalten. Da im Allgemeinen die Rotation eines Gradienten verschwindet, ist die homogene Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ mit dem Finden des Potentials $\Phi(\vec{r})$ bereits gelöst. Es bleibt nur die inhomogene Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ zu lösen, die mit dem Potential geschrieben lautet:

$$\Delta \Phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

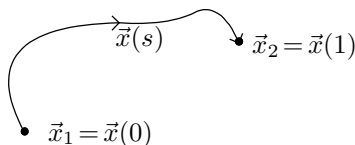
Diese Gleichung wird Poisson-Gleichung genannt und der Operator

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

heißt Laplace-Operator. Aus der Definition des Potentials sehen wir, dass elektrische Feldlinien parallel zum Gradienten des Potentials verlaufen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \parallel \vec{\nabla}\Phi$$

Betrachten wir nun die Verschiebung einer Probeladung q von einem Punkt \vec{x}_1 zu einem Punkt \vec{x}_2 in einem elektrischen Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$



Dabei parameterisieren wir die Strecke, die die Probeladung durchläuft mit $\vec{x}(s)$, wobei s von 0 bis 1 läuft. Die bei der Verschiebung aufgewendete Energie ist

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} q \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \\
 &= q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \\
 &= -q \int_0^1 \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}(s)) \cdot d\vec{x}(s) \\
 &= -q \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{pmatrix} ds \\
 &= -q \int_0^1 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ds \\
 &= -q \int_0^1 \frac{d\Phi}{ds} ds \\
 &= -q(\Phi(\vec{x}(1)) - \Phi(\vec{x}(0))) \\
 &= q(\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2))
 \end{aligned}$$

Die Verschiebungsenergie hängt also nur von der Potentialdifferenz des Anfangs- und Endpunktes ab, nicht aber vom Weg. Im Speziellen können wir Äquipotentialflächen definieren, auf denen Φ konstant ist. Da man Probeladungen entlang dieser Äquipotentialflächen ohne Kraftaufwand verschieben kann, muss das elektrische Feld \vec{E} normal zu den Äquipotentialflächen stehen.

2.4 Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung

Wir haben die Lösung elektrostatischer Probleme, das heißt die Bestimmung des elektrischen Feldes aus einer gegebenen Ladungsverteilung, nun im Allgemeinen auf die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

zurückgeführt. Die Poisson-Gleichung ist eine *partielle, elliptische, inhomogene* Differentialgleichung im Potential Φ , die wir für eine allgemeine Ladungsverteilung ρ lösen möchten. Tatsächlich kennen wir eine Lösung schon, nun wollen wir aber etwas systematischer vorgehen. Wir lösen die Poissongleichung zunächst für eine Punktquelle $\rho(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$. Diese Lösung nennen wir Green'sche Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}')$, d.h. wir haben die Relation

$$\Delta G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

Mithilfe der Green'sche Funktion können wir dann die allgemeine Lösung des elektrostatischen Problems zu einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ erhalten, indem wir die Green'sche Funktion über die Ladungsverteilung integrieren

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}')$$

Dass dies eine Lösung der Poisson-Gleichung ist, lässt sich leicht zeigen:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\vec{x}) &= \Delta \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \Delta G(\vec{x}, \vec{x}') \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= -\rho(\vec{x}) \frac{1}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Wie können wir die Green'sche Funktion bestimmen? Da sie das Potential einer Punktladung ist, kennen wir sie schon! Wir haben

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

womit wir wiederum das schon bekannte Potential einer beliebigen Ladungsverteilung erhalten:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Dies ist nun tatsächlich eine Lösung der Poisson-Gleichung, doch es ist nicht die allgemeinste mögliche Lösung. Um das zu sehen betrachten wir kurz die homogene Poisson-Gleichung, die sogenannte Laplace-Gleichung

$$\Delta \Phi_h = 0$$

Wenn wir eine beliebige Lösung Φ_h der Laplace-Gleichung zu unserer Lösung der Poisson-Gleichung addieren, also wenn wir das Potential

$$\boxed{\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \Phi_h(\vec{x})} \quad (1)$$

betrachten, so ist dies ebenfalls eine Lösung der ursprünglichen Poisson-Gleichung. Wie aber können wir nun bestimmen, welche die richtige Lösung für unser physikalisches Problem ist? Die Antwort ist, dass wir dafür Randbedingungen benötigen. Wenn wir z.B. annehmen, dass die Ladungen im unendlichen Euklid'schen Raum leben und das Potential in unendlicher Entfernung verschwindet $\Phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$, so ist die homogene Lösung $\Phi_h = 0$.

Anmerkung. An dieser Stelle ist es interessant zu sehen, dass es keine physikalische Rechtfertigung dafür gibt das Potential im Unendlichen genau auf 0 zu setzen. Tatsächlich könnten wir hier jede beliebige andere Konstante verwenden, also $\Phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \Phi_\infty$, womit die homogene Lösung $\Phi_h = \Phi_\infty$ sein würde. Diese Addition einer Konstanten zum Potential hat keinerlei physikalische Auswirkungen: Das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla\Phi$ bleibt unverändert. Dies ist das erste Beispiel einer Redundanz in der Beschreibung eines physikalischen Systems, deren Verallgemeinerung wir später als sogenannte Eichsymmetrie kennenlernen und deren volle Bedeutung erst in der Quantenmechanik klar werden wird.

Betrachten wir als einfaches Beispiel zunächst kugelsymmetrische Ladungsverteilungen

$$\rho(\vec{x}) = \rho(r) \quad r = |\vec{x}|$$

im ansonsten leeren Raum, d.h. $\Phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$. Die Gesamtladung der Verteilung ist

$$Q = 4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr$$

und aufgrund der Kugelsymmetrie der Ladungsverteilung und der Randbedingungen ist auch das elektrische Feld radial und kugelsymmetrisch. Betrachten wir nun das Oberflächenintegral des elektrischen Feldes

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\rho(V)}{\varepsilon_0}$$

für eine Kugel mit Radius R . Da das elektrische Feld radial ist, ist es überall normal zur Oberfläche und wir erhalten

$$4\pi R^2 E(R) = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

und somit

$$E(R) = \frac{1}{\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

wobei $E(R)$ die Größe des nach außen gerichteten elektrischen Feldes darstellt. Dieser Ausdruck nimmt eine noch intuitivere Form an, wenn wir die Gesamtladung, die innerhalb von R liegt,

$$Q(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

definieren. Wir haben dann

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

In vektorieller Form erhalten wir daher

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r} E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \vec{x}$$

was mit dem Ausdruck für eine Punktladung $Q(r)$ übereinstimmt. Um das dazugehörige Potential zu finden betrachten wir zunächst die allgemeine Form des Gradienten für ein radialsymmetrisches Potential. Unter Verwendung der Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(r(x, y, z)) &= \frac{\partial r(x, y, z)}{\partial x} f'(r(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} f'(r) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{df(r)}{dr} \\ &= \frac{x}{r} \frac{df(r)}{dr} \end{aligned}$$

und ähnlicher Beziehungen für y und z erhalten wir

$$\vec{\nabla} \Phi(r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} \Phi(r(x, y, z)) = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\vec{x}}{r} \frac{d\Phi}{dr} \quad (2)$$

Wir sehen also, dass

$$\frac{\vec{x}}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr} = \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{x}}{r} E(r)$$

und somit

$$E(r) = -\frac{d\Phi(r)}{dr}$$

Wir können also das Potential aus dem elektrischen Feld durch Integration

$$\Phi(r) = \Phi(r_0) - \int_{r_0}^r E(r') dr'$$

erhalten. Setzen wir das Potential im Unendlichen auf $\Phi(r_0) \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} 0$, so erhalten wir

$$\Phi(r) = \int_r^{\infty} E(r') dr'$$

Für den Spezialfall einer homogen geladenen Kugel haben wir

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} q & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

und daher

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{r^3}{R^3} q & r \leq R \\ q & r > R \end{cases}$$

woraus sich das elektrische Feld

$$E(r) = \begin{cases} \frac{r}{4\pi\epsilon_0 R^3} q & r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

ergibt. Mit einem im Unendlichen verschwindenden Potential haben wir also für $r \geq R$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \int_r^{\infty} E(r') dr' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r'^2} dr' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

und im Anschluss für $r < R$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \Phi(R) - \int_R^r E(r') dr' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_R^r r' dr' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2 - R^2}{2R^2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3R^2 - r^2}{2R^2} \right) \end{aligned}$$

2.5 Energie des elektrostatischen Feldes

Wir wollen nun die Gesamtenergie einer Konfiguration von n Punktladungen q_i an den Orten \vec{x}_i bestimmen. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: Wir beginnen mit dem unendlichen, leeren Raum, dem wir die Gesamtenergie $W = 0$ zuordnen. Nun geben wir die erste Punktladung q_1 in diesen Raum, genauer gesagt, wir verschieben sie vom Unendlichen zum Punkt \vec{x}_1 . Dabei wird keine Arbeit verrichtet oder Energie frei, da es noch keine weiteren Ladungen gibt und sich q_1 , als Probeladung betrachtet, im feldfreien Raum bewegt. Nun machen wir dasselbe, nacheinander, mit allen anderen Punktladungen q_i . Wenn wir also q_i vom Unendlichen zu seiner endgültigen Lage bei \vec{x}_i verschieben, müssen wir dafür das Potential der schon vorher an ihren Platz geschobenen Punktladungen $q_j, j < i$ beachten. Dieses Potential ist

$$\Phi_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|}$$

Für die Verschiebung von q_i aus dem Unendlichen zum Punkt \vec{x}_i benötigen wir eine Energie

$$\begin{aligned} W_i &= q_i \Phi_i(\vec{x}_i) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j q_i}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie der Ladungskonfiguration ist gleich der Summe über alle diese Einzelenergien, also

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n W_i \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j q_i}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_j q_i}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt der obigen Rechnung haben wir die Symmetrie der Summanden ausgenutzt und beide Summen laufen von 1 bis n . Wir müssen dabei allerdings $i = j$ ausschließen, da dies die Energie einer Punktladung in dem von ihr selbst erzeugten Feld bedeuten würde, die aber divergiert. Dieses Problem, das auch als Selbstenergieproblem bekannt ist, haben wir durch die Einführung der idealisierten Punktladung selbst verschuldet. Es ist sozusagen der Preis, den wir für das Benutzen der δ -Funktion bezahlen. Wenn wir den Ausdruck für die Gesamtenergie auf kontinuierliche Ladungsverteilungen verallgemeinern, so erhalten wir

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

bei dem es nun keine Rolle mehr spielt, ob wir die Einschränkung $\vec{x} \neq \vec{x}'$ verlangen oder nicht, weil die davon betroffenen Punkte im Integral vom Mass 0 sind. Wir schreiben diesen Ausdruck nun noch etwas um:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\vec{x}) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \end{aligned}$$

Wir verwenden nun unsere elektrostatische Grundgleichung $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ und erhalten

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \Phi(\vec{x})$$

woraus wir durch partielle Integration schließlich

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{E}^2(\vec{x}) \end{aligned}$$

erhalten. Wir können die Energie einer Ladungskonfiguration also ausschließlich über deren elektrisches Feld berechnen, wobei wir dem elektrischen Feld eine Energiedichte

$$\boxed{u(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{x})}$$

zuordnen können. An dieser Stelle müssen wir mit der physikalischen Interpretation allerdings vorsichtig sein. Obwohl es naheliegend ist dem elektrischen Feld selbst eine Energiedichte zuzuordnen, können wir in der Elektrostatik alleine niemals beweisen, dass das Feld selbst Energie besitzt. Der Grund dafür ist einfach, dass wir in der Elektrostatik nur zeitlich unveränderliche Situationen betrachten und es daher keinen Energiefluss gibt. Wir können also nicht sagen, dass

sich Energie von einem Ort zu einem anderen bewegt und damit auch nicht, wo sie lokalisiert ist. Daran ändert auch die Art der gedanklichen Konstruktion unserer Ladungsverteilung nichts, in der wir „Ladungen aus dem Unendlichen kommend an ihren Platz verschoben“ haben. Diese Konstruktion entspricht keinem wirklichen, dynamischen Prozess, wie er in der Natur vorkommt, sondern war nur eine Hilfskonstruktion - eine gedankliche Aneinanderreihung verschiedener statischer Konfigurationen, die es uns erlaubt hat die Gesamtenergie zu berechnen, uns aber keinen Hinweis darauf gibt, wo diese lokalisiert ist.

2.5.1 Das Selbstenergieproblem

Kehren wir noch einmal dazu zurück, wie problematisch das Konzept einer Punktladung ist. Wenn wir die elektrostatische Energiedichte im Feld einer Punktladung q am Ursprung berechnen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{q^2}{r^4} \end{aligned}$$

was am Ursprung, als am Ort, an dem die Punktladung sitzt, divergiert. Um wirklich sicher zu gehen, dass dies ein Effekt der Punktladung ist, können wir z.B. die Energiedichte einer homogen geladenen Kugel mit Radius R betrachten, für die wir das elektrische Feld ebenfalls schon berechnet haben. Wir erinnern uns, dass

$$E(r) = \begin{cases} \frac{r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} q & r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

und damit die Energiedichte für $r \geq R$ genau der der Punktladung entspricht. Für $r < R$ haben wir hingegen

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} q \right)^2 \\ &= \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{q^2 r^2}{R^6} \end{aligned}$$

was überall endlich ist. Die Gesamtenergie der homogen geladenen Kugel ist

$$\begin{aligned} W &= 4\pi \int_0^\infty r^2 u(r) dr \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{q^2 r^2}{R^6} dr + 4\pi \int_R^\infty r^2 \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{q^2}{r^4} dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr \right) \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{1}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{20} \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

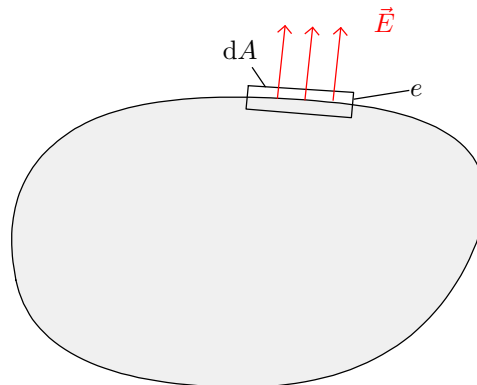
was für endlichen Kugelradius R endlich ist, aber für $R \rightarrow 0$ divergiert. Nun könnten wir den Standpunkt vertreten, dass dies ein rein akademisches Problem sei. Wir haben eine Idealisierung eingeführt und sehen, dass diese uns technische Probleme bereitet. Wenn es in der Natur nur kontinuierliche Ladungsverteilungen gibt, so ist dieses Problem irrelevant für die Naturbeschreibung. Tatsächlich aber scheint es so zu sein, dass es in der Natur nur Punktladungen gibt. Auch die Hoffnung, dass Quanteneffekte die klassische Punktladung so „ausschmieren“, dass die Divergenz der

Selbstenergie verschwindet, hat sich so nicht bewahrheitet. Selbst in der Quantenelektrodynamik stellt sich dieses Problem immer noch - sogar in etwas verschärfter Form - und führt dort zu der Notwendigkeit, die Theorie zu regularisieren und renormieren.

2.6 Randwertprobleme mit idealen Leitern

Ideale Leiter sind Materialien mit beliebig vielen Ladungsträgern und ohne elektrischen Widerstand in ihrem Inneren. Legt man ein elektrisches Feld an einen idealen Leiter an, so beschleunigen die Ladungsträger entlang der Feldlinien, bis sie auf den Rand des Leiters treffen. Da es beliebig viele Ladungsträger in einem idealen Leiter gibt, geschieht dies so lange, bis die Verschiebung der Ladungsträger ein Gegenfeld im Leiter aufgebaut hat, das das äußere Feld vollkommen aufhebt. In der Elektrostatik betrachten wir nur diesen Endzustand, der dadurch charakterisiert ist, dass im Inneren eines idealen Leiters $\vec{E} = 0$. Daraus folgt unmittelbar, dass in einem zusammenhängenden Gebiet des Leiters überall dasselbe Potential herrscht. Im Speziellen sind damit Oberflächen eines idealen Leiters Äquipotentialflächen. Mit diesem Wissen können wir Randbedingungen für das elektrische Feld an der Oberfläche eines idealen Leiters formulieren:

1. Das elektrische Feld am Rande eines Leiters ist normal zur Leiteroberfläche. Dies folgt direkt daraus, dass Leiteroberflächen Äquipotentialflächen sind. Wir können an der äußeren Oberfläche des Leiters also schreiben $\vec{E} = \vec{n}E$, wobei \vec{n} der nach außen gerichtete Normalvektor der Oberfläche und E die nach außen gerichtete Feldkomponente des elektrischen Feldes ist.
2. An der Oberfläche des Leiters existiert eine Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{x}) = \varepsilon_0 E(\vec{x})$. Dies folgt direkt aus dem Gauß'schen Integralsatz wenn wir als Volumenelement einen infinitesimalen Zylinder betrachten, dessen obere Begrenzungsfläche dA außerhalb und dessen untere Begrenzungsfläche innerhalb des Leiters liegt, wie in der folgenden Skizze im Querschnitt dargestellt:



Die Gesamtladung im Zylinder ist $dq = \sigma dA$, damit ist der gesamte elektrische Fluss aus der Zylinderoberfläche $d\varphi = dq/\varepsilon_0 = \sigma dA/\varepsilon_0$. Da das elektrische Feld im Inneren des Leiters verschwindet, trägt die untere Begrenzungsfläche zum Gesamtfluss nichts bei. Der Zylindermantel (e in der Skizze) verläuft normal zur Oberfläche des Leiters und somit parallel zu den elektrischen Feldlinien. Damit verbleibt nur die Außenfläche dA , durch die der Fluss $d\varphi = E dA$ beträgt, woraus $E dA = \sigma dA/\varepsilon_0$ und damit $\sigma(\vec{x}) = \varepsilon_0 E(\vec{x})$ folgt.

Aus den beiden Bedingungen folgt die Form des elektrischen Feldes an der Leiteroberfläche

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

oder

$$\vec{\nabla} \Phi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

Wir können nun zwei verschiedene Typen des Randwertproblems mit idealen Leitern formulieren. Der erste Typ, das sogenannte Dirichlet-Problem, bezeichnet die Lösung der Poisson-Gleichung mit Leitern in Volumina V_i , deren Potentiale auf einen konstanten Wert Φ_i gesetzt sind, also mathematisch

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \Phi(\vec{x})|_{\vec{x} \in \partial V_i} = \Phi_i$$

Im zweite Problemtyp, bekannt als von Neumann-Problem, wird die Poissongleichung mit einer gegebenen Oberflächenladungsdichte gelöst, also

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{x})|_{\vec{x} \in \partial V_i} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(\vec{x})$$

2.6.1 Eindeutigkeit der Lösungen

Beschäftigen wir uns kurz mit der Frage, in welchem Sinne das Dirichlet- bzw. das von Neumann-Problem eine eindeutige Lösung besitzen. Beginnen wir mit der Annahme, dass sowohl Φ_1 als auch Φ_2 Lösungen des jeweiligen Problems sind. Daraus folgt, dass deren Differenz $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$ die Laplace-Gleichung $\Delta \Psi(\vec{x}) = 0$ erfüllt und der Ausdruck $\Psi \Delta \Psi$ verschwindet. Integrieren wir diesen über das Volumen V außerhalb des Leiters, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3x \Psi(\vec{x}) \Delta \Psi(\vec{x}) \\ &= \int_V d^3x \Psi(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) \\ &= \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\Psi(\vec{x}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) - \int_V d^3x (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) \\ &= \oint_{\partial V} dA \vec{n} \cdot (\Psi(\vec{x}) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) - \int_V d^3x (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) \cdot (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) \\ &= \oint_{\partial V} dA (\Psi(\vec{x}) \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{x})) - \int_V d^3x (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}))^2 \end{aligned}$$

Da für das Dirichlet-Problem $\Psi(\vec{x})$ auf ∂V verschwindet und für das von Neumann-Problem $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{x})$, ist das erste Integral in beiden Fällen gleich 0. Daraus folgt dass

$$\int_V d^3x (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}))^2 = 0$$

was nur erfüllt sein kann, wenn im gesamten Volumen V der Gradient $\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}) = 0$. Das bedeutet, dass im gesamten Volumen V die Differenz zwischen zwei Lösungen Ψ konstant ist. Für das Dirichlet-Problem ist der Wert von Φ auf ∂V vorgegeben und daher $\Psi(\vec{x})|_{\vec{x} \in \partial V} = 0$, weshalb auch $\Psi = 0$ sein muss und die Lösung eindeutig ist. Für das von Neumann-Problem ist dagegen nur die Ableitung von Φ entlang der Flächennormalen gegeben und daher eine Lösung $\Phi(\vec{x})$ nur bis auf eine additive Konstante eindeutig. Auch hier ist die Lösung allerdings wieder in dem Sinne eindeutig, dass das resultierende elektrische Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$ eindeutig ist und die additive Konstante im Potential nur eine Redundanz der Beschreibung desselben physikalischen Systems durch verschiedene Potentiale darstellt.

Beispiel. Betrachten wir eine Leiterkugel mit Radius $R > 0$ und Gesamtladung q im ansonsten leeren Raum. Wir setzen das Zentrum der Kugel in den Koordinatenursprung, womit das Problem radialsymmetrisch wird. Im Inneren der Kugel $r < R$ ist das elektrische Feld $E(r) = 0$, daher sind dort auch keine Ladungen vorhanden. Die gesamte Ladung der Kugel sitzt also an der Oberfläche, wo die Ladungsdichte folglich

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

ist. Wir haben es also mit einem von Neumann-Problem zu tun, weshalb $\Phi(r)$ bis auf eine additive Konstante eindeutig ist. Der nach außen zeigende Normalvektor auf die Kugeloberfläche ist

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}$$

Laut (2) ist der Gradient eines radialsymmetrischen Potentials

$$\vec{\nabla} \Phi(r) = \frac{\vec{x}}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr}$$

weshalb

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(r) = \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{x}}_{r^2} \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{d\Phi(r)}{dr}$$

Die Randbedingung lautet also

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

was nichts anderes ist als die wohlbekannte Beziehung für eine Punktladung im Ursprung

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

Die Lösung des Problems kennen wir schon aus unserer Diskussion einer allgemeinen kugelsymmetrischen Ladungsverteilung. Hier haben wir es mit einer radialen Ladungsverteilung

$$Q(r) = \Theta(r - R) q$$

zu tun wobei

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

die Heaviside Θ -Funktion ist. Folglich ist

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Theta(r - R)$$

und daher

$$\Phi(r) = -\int_0^r E(r') dr' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \Theta(r - R) + \Phi_0$$

mit einer unbestimmten Konstanten Φ_0 , da es sich um die Lösung eines von Neumann-Problems handelt. Mit der üblichen Konvention $\Phi(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ können wir die Konstante zu

$$\Phi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

fixieren und erhalten damit

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} \Theta(r - R) + \frac{1}{R} \Theta(R - r) \right) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} & r \geq R \end{cases}$$

Betrachten wir die nun erhaltene Lösung für das Gebiet ausserhalb der Leiterkugel und vergleichen sie mit der allgemeinen Lösung des elektrostatischen Problems (1). Da sich in der von uns betrachteten Region, also ausserhalb der Leiterkugel, keine elektrischen Ladungen befinden, verschwindet die partikuläre Lösung. Dagegen ist die Lösung der homogenen Gleichung $\Phi_h(\vec{x})$, die wir aufgrund der Randbedingungen dazuaddieren

$$\Phi_h(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \quad r \geq R$$

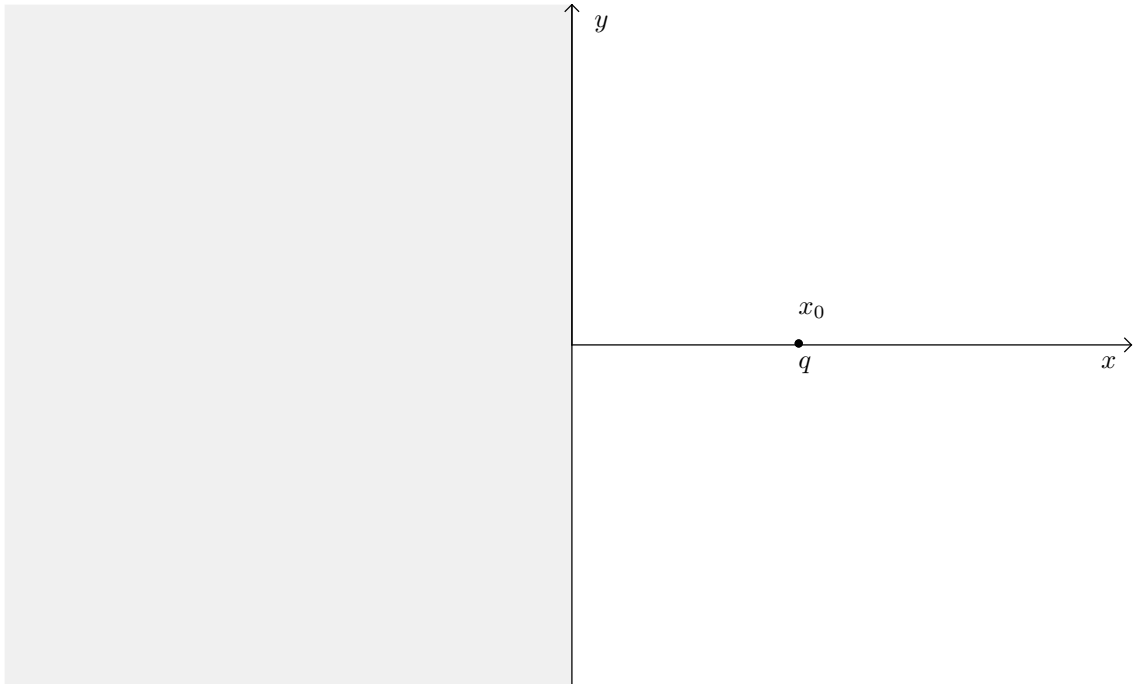
Dies ist tatsächlich eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi_h(\vec{x}) = 0 \quad r \geq R$$

in der von uns betrachteten Region. Wir können also das Potential ausserhalb einer Leiterkugel im ansonsten leeren Raum auch erhalten, indem wir zunächst die partikuläre Lösung betrachten, die in diesem Falle trivial ist. Danach stellen wir fest, dass die Randbedingungen (an der Kugeloberfläche) durch das Feld einer Punktladung im Kugelinneren erfüllt werden. Da dieses Feld keine Ladungen ausserhalb der Kugel besitzt, stellt es dort eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung dar, die wir folglich addieren können. Damit haben wir das Randwertproblem ohne Rechnung, nur mit geschickter Platzierung einer virtuellen Punktladung ausserhalb der betrachteten Region, gelöst. Wir wollen nun betrachten, wie sich diese Methode in allgemeineren Problemen verwenden lässt.

2.6.2 Methode der Spiegelladungen

Stellen wir uns folgende Situation vor: Eine Punktladung q steht einer unendlichen Leiteroberfläche bei $x=0$ im Abstand $x_0 > 0$ gegenüber



Die Leiterfläche sei geerdet, d.h. auf einem konstanten Potential $\Phi=0$. Wie können wir das Potential $\Phi(x)$ in der Halbebene $x > 0$ finden? Die allgemeine Lösung des Problems mithilfe der Green'schen Funktion lautet

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \Phi_h(\vec{x}) \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\Phi_h(\vec{x})$ die noch unbekannte Lösung der homogenen Poisson-Gleichung ist, die wir aus der Randbedingung

$$\Phi(\vec{x})|_{x=0} = 0$$

erhalten. Diese Bedingung lautet vollständig und mit expliziten kartesischen Koordinaten

$$\Phi(0, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}} + \Phi_h(0, y, z) = 0$$

somit

$$\Phi_h(0, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}}$$

Genau dieses Potential auf der Ebene $x=0$ kann, wenig überraschend, von einer Punktladung $-q$ am Ort \vec{x}_0 erzeugt werden. Es ist aber andererseits auch von einer Punktladung $-q$ am Ort $-\vec{x}_0$ erzeugt werden. Wenn wir also den gesamten Halbraum $x < 0$ und damit den Leiter und seine Oberfläche ersetzen durch eine einzige Punktladung $-q$ am Ort $-\vec{x}_0$, so haben wir nach wie vor die korrekte Randbedingung $\Phi(\vec{x})|_{x=0} = 0$ erfüllt und nichts im Halbraum $x > 0$ verändert, der alleine für die Lösung des Problems relevant ist. Wir setzen also für $\Phi_h(\vec{x})$ das Potential einer Punktladung $-q$ am Ort $-\vec{x}_0$ an, also

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}_0|} \right)$$

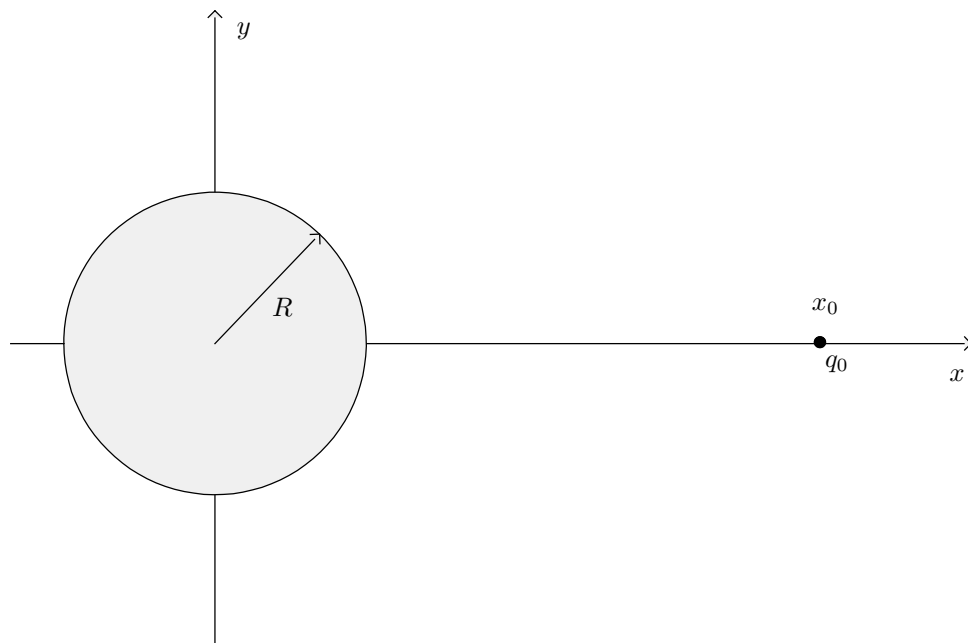
Dies stellt in der Halbebene $x > 0$ die korrekte Lösung des Dirichlet-Problems dar und es ist einfach zu zeigen, dass die Randbedingung $\Phi(0, y, z) = 0$ erfüllt ist.

Diese Rechnung stellt das einfachste Beispiel einer allgemeinen Methode dar, um die homogene Lösung $\Phi_h(\vec{x})$ für Randwertprobleme mit Dirichlet-Randbedingungen zu erhalten, die aus offensichtlichen Gründen auch als Methode der Spiegelladungen bezeichnet wird. Dabei suchen wir im Allgemeinen nach der Lösung eines Dirichlet-Problems im Volumen V . Wir lösen zunächst die Poisson-Gleichung $\Delta \Phi = -\rho/\varepsilon_0$ ohne Randbedingungen und fügen danach Ladungen *außerhalb* des Volumens V so hinzu, dass an ∂V die korrekten Randbedingungen herrschen. Die Spiegelladungen liegen notwendigerweise außerhalb von V , da sie ansonsten keine Lösung der homogenen Gleichung *in* V sein könnten.

Ein kleiner Hinweis: Es ist extrem wichtig, bei der Anwendung der Methode der Spiegelladungen immer klar im Blick zu haben, was das Volumen V ist, in dem die Lösung gültig ist. Die Spiegelladungslösung ist außerhalb des Volumens V falsch.

2.6.3 Leiterkugeln und Punktladungen

Eine besonders wichtige Anwendung der Methode der Spiegelladungen erhalten wir für den Fall einer Punktladung q_0 in einer Entfernung $x_0 > R$ vom Mittelpunkt einer Leiterkugel mit Radius R .



Die allgemeine Lösung der Poissongleichung lautet wieder

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \Phi_h(\vec{x})$$

und wir versuchen $\Phi_h(\vec{x})$ mit der Spiegelladungsmethode zu finden. Versuchen wir es zunächst mit einer einzelnen Spiegelladung q_1 , die aus Symmetriegründen natürlich ebenfalls auf der x -Achse liegen muss. Wir setzen sie an die Position

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

was uns zu folgendem Ansatz führt:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \frac{q_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \right)$$

Die Randbedingung lautet diesmal

$$\Phi(\vec{x})|_{|\vec{x}|=R} = 0$$

also

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \Phi(x, y, z)|_{x^2+y^2+z^2=R^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} + \frac{q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}} \right) \Big|_{x^2+y^2+z^2=R^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{\sqrt{R^2-2x_0x+x_0^2}} + \frac{q_1}{\sqrt{R^2-2x_1x+x_1^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{|q_0|} \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2+x_0^2}{q_0^2}-2\frac{x_0}{q_0}x}} + \frac{q_1}{|q_1|} \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2+x_1^2}{q_1^2}-2\frac{x_1}{q_1}x}} \right) \end{aligned}$$

Dies ist nur erfüllt, wenn

$$\frac{R^2+x_0^2}{q_0^2} = \frac{R^2+x_1^2}{q_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{x_0}{q_0} = \frac{x_1}{q_1} \quad \text{und} \quad q_0 q_1 < 0$$

Wir lösen diese zwei Gleichungen nach x_1 und q_1 und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(R^2+x_0^2) \pm \sqrt{(R^2+x_0^2)^2 - 4x_0^2 R^2}}{2x_0} \\ &= \frac{R^2+x_0^2 \pm (R^2-x_0^2)}{2x_0} \end{aligned}$$

Die zweite Lösung dieser Gleichung ist unphysikalisch, da

$$\frac{R^2+x_0^2-(R^2-x_0^2)}{2x_0} = x_0 > R$$

und die Spiegelladung damit in V liegen würde. Die richtige Lösung ist also

$$x_1 = \frac{R^2}{x_0}$$

und damit ist

$$q_1^2 = q_0^2 \frac{x_1}{x_0} = q_0^2 \frac{R^2}{x_0^2}$$

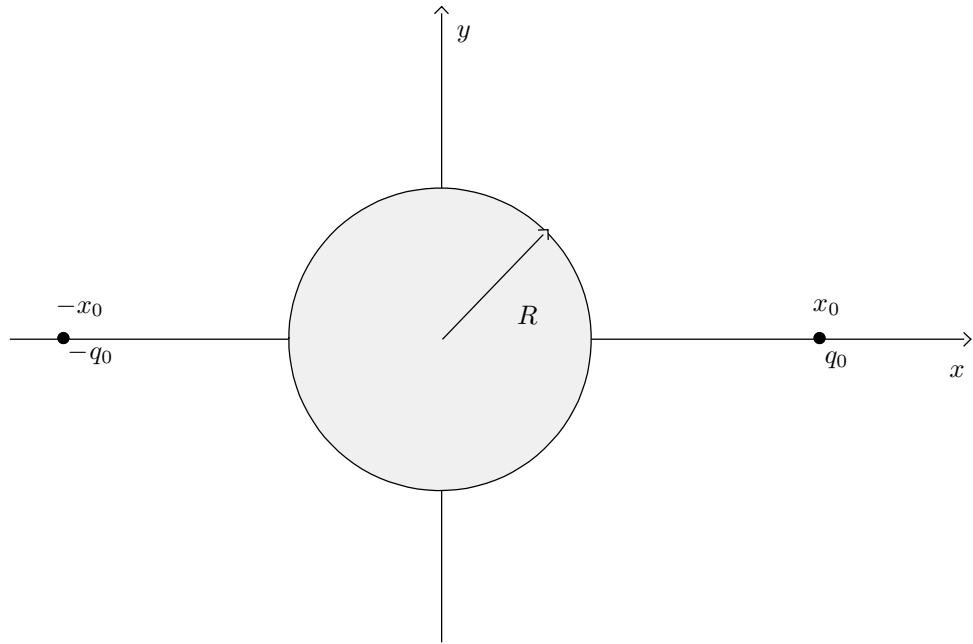
Da $q_1 q_2 < 0$ ist die korrekte Lösung

$$q_1 = -q_0 \frac{R}{x_0}$$

Die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems ist also

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} - \frac{R}{x_0} \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{R^2}{x_0}\right)^2+y^2+z^2}} \right)$$

für $x^2+y^2+z^2 > R^2$. Tatsächlich ist es leicht zu sehen, dass dies auch die Lösung des umgekehrten Problems ist. Eine Punktladung q_0 in einer Entfernung $x_0 < R$ vom Mittelpunkt einer ideal leitenden Hohlkugel hat als Lösung dieselbe Form des Potentials, diese gilt allerdings nur im Inneren der Hohlkugel $x^2+y^2+z^2 < R^2$. Wir können dank des Superpositionsprinzips nun auch ganz leicht das elektrische Feld einer Leiterkugel finden, die sich in der Mitte zwischen zwei Ladungen q und $-q$ befindet.



Dazu addieren wir einfach das Potential der linken Ladung und ihrer Spiegelladung zum Potential der rechten Ladung und ihrer Spiegelladung. Die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems ist also

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}_0|} + \frac{R}{x_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}_1|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} \right) \right)$$

wobei

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{x_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6.4 Leiterkugel im homogenen elektrischen Feld

Das Resultat im letzten Abschnitt hat einen interessanten Spezialfall. Sehen wir uns dazu zunächst das elektrische Feld an, das zwei Ladungen $\pm q_0$ an den Orten $\pm \vec{x}_0$ in der Nähe des Ursprungs erzeugen. Allgemein ist das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} - \frac{\vec{x} + \vec{x}_0}{|\vec{x} + \vec{x}_0|^3} \right)$$

Für den Fall $|\vec{x}| \ll x_0$ erhalten wir

$$\vec{E}(\vec{x}) \xrightarrow{\frac{|\vec{x}|}{x_0} \rightarrow 0} -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{x_0^2} \vec{e}_x$$

dabei können wir den Grenzwert $|\vec{x}|/x_0 \rightarrow 0$ entweder dadurch erreichen, dass wir nahe an den Ursprung gehen oder aber die Position der Punktladungen ins Unendliche verschieben $x_0 \rightarrow \infty$. Erhöhen wir dabei gleichzeitig die Ladung q_0 so, dass $\vec{E}(0) = E \vec{e}_x$ konstant bleibt

$$q_0 = -2\pi\epsilon_0 E x_0^2$$

so erhalten wir in der Nähe des Ursprungs ein konstantes elektrisches Feld. In diesem Grenzfall liefert die Methode der Spiegelladungen also die Lösung zum Problem einer leitenden Kugel im konstanten elektrischen Feld. Doch wie genau sehen die Spiegelladungen in diesem Fall aus? Die Positionen der Spiegelladungen sind gegeben durch

$$x_1 = \frac{R^2}{x_0} \xrightarrow{x_0 \rightarrow \infty} 0$$

gehen also gegen den Ursprung, während die Ladung

$$q_1 = -q_0 \frac{R}{x_0} = 2\pi \varepsilon_0 ER x_0 \rightarrow \infty$$

divergiert. Dabei bleibt allerdings das Produkt aus Abstand und Ladung,

$$2x_1 q_1 = 4\pi \varepsilon_0 ER^3$$

konstant. Dieses Produkt bezeichnen wir als Dipolmoment - genauer gesagt ist es eine Komponente des Dipolmoments. Das Dipolmoment selbst ist ein Vektor, da wir die relative Lage der Ladungen im Raum berücksichtigen müssen. Allgemein ist für Punktladungen q_i an den Orten \vec{x}_i das Dipolmoment definiert als

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{x}_i$$

In unserem Fall ist es also

$$\vec{p} = 2q_1 \vec{x}_1 = 4\pi \varepsilon_0 ER^3 \vec{e}_x$$

Betrachten wir das Potential das von den zwei Spiegelladungen herrührt, so erhalten wir (mit $r = |\vec{x}|$)

$$\begin{aligned} \Phi_D(\vec{x}) &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{q_1}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}_1|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} q_1 \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x_1)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} q_1 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2x_1 x}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2x_1 x}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} q_1 \left(\frac{1}{r \sqrt{1 - 2\frac{x_1 x}{r^2}}} - \frac{1}{r \sqrt{1 + 2\frac{x_1 x}{r^2}}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r} \lim_{x_1 \rightarrow 0} q_1 \left(1 + \frac{x_1 x}{r^2} - \left(1 - \frac{x_1 x}{r^2} \right) \right) \\ &= \frac{x}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \underbrace{2q_1 x_1}_{p_x} \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} \end{aligned}$$

Setzen wir den Wert für das Dipolmoment $\vec{p} = 4\pi \varepsilon_0 ER^3 \vec{e}_x$ ein, so erhalten wir

$$\Phi_D(\vec{x}) = Ex \frac{R^3}{r^3}$$

Eine geerdete Leiterkugel im homogenen elektrischen Feld können wir also durch einen Spiegeldipol im Ursprung ersetzen. Das homogene elektrische Feld in x -Richtung selbst können wir durch ein Potential

$$\Phi_E(\vec{x}) = -Ex$$

ausdrücken. Daher ist das Potential einer ideal leitenden Kugel vom Radius R im homogenen elektrischen Feld

$$\Phi(\vec{x}) = -Ex \left(1 - \frac{R^3}{|\vec{x}|^3} \right) \quad |\vec{x}| > R$$

Es ist einfach zu sehen, dass die Randbedingung

$$\Phi(\vec{x})|_{|\vec{x}|=R} = 0$$

von diesem Potential erfüllt wird.

2.7 Multipole

2.7.1 Allgemeine Multipolentwicklung

Wir haben im vorigen Abschnitt schon einen Dipol kennengelernt, und zwar als Grenzwert von zwei entgegengesetzten Punktladungen, die näher aneinanderrücken und gleichzeitig immer größer werden. Offensichtlich ist das elektrische Feld von zwei nahe benachbarten, entgegengesetzten Punktladungen in großer Entfernung dem eines Dipols immer ähnlicher. Wir wollen dieses Resultat nun verallgemeinern und eine systematische Entwicklung dafür finden, wie das Potential einer beliebigen Ladungsverteilung aus großer Entfernung aussieht. Dazu betrachten wir eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, die in einem Abstand R vom Ursprung lokalisiert ist

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{für} \quad |\vec{x}| > R$$

Im ansonsten leeren Raum und mit der üblichen Konvention $\Phi(\vec{x}) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ haben wir

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

wobei V das Volumen der Kugel mit Radius R ist. Wenn wir das Potential in weiter Entfernung von der Ladungsverteilung $r := |\vec{x}| \gg R$ wissen möchten, können wir daher den Integranden

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + r'^2}} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\frac{\hat{x} \cdot \vec{x}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}} \quad \hat{x} = \frac{\vec{x}}{r} \quad r' = |\vec{x}'|$$

Taylor-entwickeln

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \frac{1}{r \sqrt{1 - 2\frac{\hat{x} \cdot \vec{x}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{x} \cdot \vec{x}'}{r} + \frac{1}{2r^2} (3(\hat{x} \cdot \vec{x}')^2 - r'^2) \right) + O\left(\left(\frac{1}{r}\right)^4\right) \\ &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\hat{x}_i}{r} x'_i + \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{2r^2} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} x'_k x'_k) \right) + O\left(\left(\frac{1}{r}\right)^4\right) \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Komponentenschreibweise und die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Setzen wir diese Entwicklung in das Potential ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') + \frac{\hat{x}_i}{r^2} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') x'_i + \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{2r^3} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} x'_k x'_k) \right) \\ &\quad + O\left(\left(\frac{1}{r}\right)^4\right) \end{aligned}$$

Die Integralausdrücke in der letzten Zeile sind unabhängig vom Betrachtungspunkt \vec{x} , sind also reine Eigenschaften der Ladungsverteilung. Den ersten Ausdruck

$$q = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

können wir leicht als die Gesamtladung identifizieren. Damit erhalten wir das physikalisch sehr gut verständliche Resultat, dass das Potential in großer Entfernung einer Ladungsverteilung in führender Ordnung durch seine Gesamtladung q gegeben ist und im Speziellen dem Potential einer Punktladung q im Ursprung entspricht. Der zweite Ausdruck

$$p_i = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') x'_i$$

ist das Dipolmoment, das wir für einen Spezialfall bereits kennengelernt hatten. Er stellt die führende Korrektur zum Gesamtladungsterm und in deren Abwesenheit, also für eine neutrale Ladungsverteilung, den führenden Term dar. Der darauffolgende Term

$$Q_{ij} = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') (3 x'_i x'_j - \delta_{ij} x'_k x'_k)$$

ist das Quadrupolmoment, ein Tensor zweiten Ranges. Es ist klar, dass diese Entwicklung systematisch weitergeführt werden könnte, was wir hier aber nicht weiter verfolgen werden. Die höheren Ordnungen werden generell als Multipolmomente bezeichnet und die entsprechende Entwicklung ist die Multipolentwicklung. Die höheren Multipolterme sind jeweils Tensoren höheren Ranges. Dies lässt sich leicht aus der Taylorentwicklung erkennen, in der nach einer Variablen entwickelt wird, die $\hat{x} \cdot \vec{x}'$ enthält. Da wir die \vec{x}' jeweils in die Integrale stecken, die \hat{x} jedoch nicht, erhalten die Multipolmomente für jede zusätzliche Ordnung notwendigerweise einen zusätzlichen Index. Setzen wir nun die Definition der Multipolmomente ein, so erhalten wir den Ausdruck für das Potential bis zur zweiten Ordnung in der Multipolentwicklung

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\hat{x}_i}{r^2} p_i + \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{2r^3} Q_{ij} \right) + O\left(\left(\frac{1}{r}\right)^4\right)$$

2.7.2 Eigenschaften eines Dipols

Betrachten wir nun einen reinen Dipol, das heißt eine Ladungsverteilung, die alleine durch ihr Dipolmoment bestimmt ist. Wie verhält sich eine solche Ladungsverteilung in einem äußeren elektrischen Feld? Dazu berechnen wir zunächst die Gesamtenergie

$$W = \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{x})$$

in einem externen Potential $\Phi_{\text{ext}}(\vec{x})$. Wir stellen das Potential in der Nähe des Ursprungs durch eine Taylorentwicklung dar

$$\Phi_{\text{ext}}(\vec{x}) = \Phi_{\text{ext}}(0) + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \Phi_{\text{ext}}(0) + O(r^2)$$

Setzen wir diese Entwicklung in den Ausdruck für die Gesamtenergie ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} W &= \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{x}) \\ &= \underbrace{\Phi_{\text{ext}}(0) \int_V d^3x \rho(\vec{x})}_q + \underbrace{\vec{\nabla} \Phi_{\text{ext}}(0) \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}}_{\vec{p}} + O(r^2) \end{aligned}$$

Für einen reinen Dipol verschwindet die Gesamtladung, daher ist der erste Term 0. Im zweiten Term können wir das elektrische Feld und das Dipolmoment identifizieren, sodass die Energie eines Dipols im externen elektrischen Feld \vec{E} gegeben ist durch

$$W_D = -\vec{E} \cdot \vec{p}$$

Die Kraft können wir aus dem Gradienten der potentiellen Energie finden. In Komponentenschreibweise haben wir

$$F_{Di} = -\partial_i W_D = \partial_i E_j p_j = -\partial_i \partial_j \Phi p_j = p_j \partial_j (-\partial_i \Phi) = p_j \partial_j E_i$$

also in Vektornotation

$$\vec{F}_D = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

woraus wir sehen, dass die Kraft auf einen Dipol im homogenen elektrischen Feld verschwindet. Schließlich wollen wir noch das Drehmoment des Dipols finden. Aus der Definition des Drehmoments erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int_V d^3x \vec{x} \times \vec{F}(\vec{x}) \\ &= \int_V d^3x \vec{x} \times \vec{E}(\vec{x}) \rho(\vec{x}) \\ &= \int_V d^3x \rho(\vec{x}) \underbrace{\vec{x} \times \vec{E}(0)}_{\vec{p}} + O(r) \\ &= \vec{p} \times \vec{E} + O(r) \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile das Elektrische Feld um den Ursprung Taylor-entwickelt haben. Auf einen elektrischen Dipol wirkt im homogenen elektrischen Feld also keine Kraft, aber ein Drehmoment.

2.8 Lösung der Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten

Bisher haben wir ausschließlich in kartesischen Koordinaten gearbeitet. Viele Probleme haben jedoch Symmetrien oder eine gewisse systematische Entwicklung, die in anderen Koordinaten einfacher zu beschreiben ist oder zu erheblich geringerem Rechenaufwand führt. Wir werden hier nicht den allgemeinsten Fall betrachten (den werden Sie in der ART-Vorlesung kennenlernen), sondern uns auf den wichtigsten Spezialfall konzentrieren: Kugelkoordinaten.

2.8.1 Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Vektoren als geometrische Objekte beschreiben eine Richtung und eine Strecke in einem Raum. Wir haben sie bisher in einer bestimmten Koordinatenbasis in diesem Raum dargestellt, deren Basisvektoren implizit gegeben sind. Wenn wir also schreiben

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

so meinen wir damit

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z$$

wobei \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z die kartesischen Basisvektoren bezeichnen. Die Basisvektoren selbst erhalten wir dadurch, dass wir am Ort \vec{x} ein infinitesimales Stück in Richtung der entsprechenden Koordinate, z.B. $x \rightarrow x + dx$, gehen und den resultierenden Vektor normieren. Der Basisvektor ist also die normierte Tangente an die Koordinatenkurve. Der Ortsvektor, explizit in kartesischen Koordinaten geschrieben, ist

$$\vec{x} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$$

und daher haben wir z.B.

$$\vec{e}_x = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial x} \right|_{\text{norm}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x}$$

Wir können jeden Vektor allerdings auch in einer anderen Koordinatenbasis darstellen, z.B. als

$$\vec{E} = \vec{e}_r E_r + \vec{e}_\theta E_\theta + \vec{e}_\varphi E_\varphi$$

Um von einer Koordinatenbasis in die andere zu gelangen, müssen wir den Zusammenhang zwischen alten und neuen Koordinaten kennen. In unserem Fall ist er gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \sin \varphi \\ y &= r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Die Basisvektoren sind wieder die normierten Tangenten an den Ortsvektor. Nun kennen wir den Ortsvektor in den neuen Koordinaten (Kugelkoordinaten) noch nicht, aber wir können in kartesischen Koordinaten schreiben

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z \\ &= r (\sin \theta (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) + \vec{e}_z \cos \theta) \end{aligned}$$

und damit die Basisvektoren der Kugelkoordinaten \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_φ in den kartesischen Basisvektoren ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right|_{\text{norm}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \sin \theta (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) + \vec{e}_z \cos \theta \\ \vec{e}_\theta &= \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right|_{\text{norm}} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \cos \theta (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) - \vec{e}_z \sin \theta \\ \vec{e}_\varphi &= \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right|_{\text{norm}} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi \end{aligned}$$

woraus wir sofort erkennen, dass die Basisvektoren \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_φ eine Orthonormalbasis bilden. Weiter sehen wir, dass der Ortsvektor in Kugelkoordinaten die besonders einfache Form

$$\vec{x} = \vec{e}_r r$$

annimmt. Auf den ersten Blick mag es vielleicht erscheinen, dass dieser Ausdruck unabhängig von θ und φ ist, dem ist aber nicht so. Der Basisvektor \vec{e}_r , wie Basisvektoren in krummlinigen Koordinaten allgemein, hängt nämlich von θ und φ ab. In Kugelkoordinaten haben wir folgende nichtverschwindende Ableitungen der Basisvektoren nach den Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \cos \theta (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) - \vec{e}_z \sin \theta &= \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \sin \theta (\vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi) &= \vec{e}_\varphi \sin \theta \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\sin \theta (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) - \vec{e}_z \cos \theta &= -\vec{e}_r \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} &= \cos \theta (\vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi) &= \vec{e}_\varphi \cos \theta \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\vec{e}_x \sin \varphi - \vec{e}_y \cos \varphi &= -\vec{e}_r \sin \theta - \vec{e}_\theta \cos \theta \end{aligned}$$

Der Differentialoperator $\vec{\nabla}$ kann in der kartesischen Basis geschrieben werden als

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Bestimmen wir nun davon die Komponenten in Richtung r , θ und φ :

$$\begin{aligned}\nabla_r &= \vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} \\ &= \vec{e}_r \cdot (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \\ &= \sin \theta \sin \varphi \partial_x + \sin \theta \cos \varphi \partial_y + \cos \theta \partial_z \\ &= \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial_y + \frac{\partial z}{\partial r} \partial_z \\ &= \partial_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\theta &= \vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} \\ &= \vec{e}_\theta \cdot (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \\ &= \cos \theta \sin \varphi \partial_x + \cos \theta \cos \varphi \partial_y - \sin \theta \partial_z \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \theta} \partial_x + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \theta} \partial_y + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \partial_z \\ &= \frac{1}{r} \partial_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\varphi &= \vec{e}_\varphi \cdot \vec{\nabla} \\ &= \vec{e}_\varphi \cdot (\vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z) \\ &= \cos \varphi \partial_x - \sin \varphi \partial_y \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \partial_x + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \partial_y \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi\end{aligned}$$

Damit können wir den Differentialoperator in Kugelkoordinaten schreiben als

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi$$

Der Gradient eines Skalarfeldes hat daher folgende Komponenten in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \phi)_r &= \partial_r \phi \\ (\vec{\nabla} \phi)_\theta &= \frac{1}{r} \partial_\theta \phi \\ (\vec{\nabla} \phi)_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \phi\end{aligned}$$

und die Divergenz eines Vektorfeldes ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \left(\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) (\vec{e}_r E_r + \vec{e}_\theta E_\theta + \vec{e}_\varphi E_\varphi) \\ &= \partial_r E_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta (\vec{e}_r E_r + \vec{e}_\theta E_\theta) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi (\vec{e}_r E_r + \vec{e}_\theta E_\theta + \vec{e}_\varphi E_\varphi) \\ &= \partial_r E_r + \frac{1}{r} E_r + \frac{1}{r} \partial_\theta E_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sin \theta E_r + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \theta E_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi E_\varphi \\ &= \partial_r E_r + \frac{2}{r} E_r + \frac{1}{r} \partial_\theta E_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cos \theta E_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi E_\varphi \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi E_\varphi\end{aligned}$$

Der Laplaceoperator ist somit

$$\begin{aligned}\Delta &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \\ &= \left(\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) \left(\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) \\ &= \vec{e}_r \partial_r \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta \left(\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta \right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \left(\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right) \\ &= \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2\end{aligned}$$

Schließlich benötigen wir noch die δ -Funktion in Kugelkoordinaten. Wir wissen, dass in kartesischen Koordinaten

$$\int_V d^3x \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{cases} 1 & \vec{x}_0 \in V \\ 0 & \vec{x}_0 \notin V \end{cases}$$

Da dieselbe Beziehung auch in Kugelkoordinaten gelten muss, also

$$\int_V dr d\theta d\varphi r^2 \sin \theta \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = \begin{cases} 1 & \vec{x}_0 \in V \\ 0 & \vec{x}_0 \notin V \end{cases}$$

muss die δ -Funktion die Form

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

haben.

2.8.2 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir wollen uns zunächst auf einen ladungsfreien Raum konzentrieren und die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\left(\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right) \phi(r, \theta, \varphi) = 0$$

finden. Dazu machen wir einen Separationsansatz

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} P(\theta) F(\varphi)$$

Setzen wir ihn in die Laplace-Gleichung ein, so erhalten wir

$$P(\theta) F(\varphi) \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) \frac{R(r)}{r} + \frac{R(r)}{r} F(\varphi) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) P(\theta) + \frac{R(r)}{r} P(\theta) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 F(\varphi) = 0$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $r^2 \sin^2 \theta / \phi(r, \theta, \varphi)$ und erhalten

$$\frac{r \sin^2 \theta}{R(r)} \partial_r (r^2 \partial_r) \frac{R(r)}{r} + \frac{\sin \theta}{P(\theta)} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) P(\theta) + \frac{1}{F(\varphi)} \partial_\varphi^2 F(\varphi) = 0$$

Die ersten beiden Terme in dieser Gleichung sind unabhängig von φ , während der letzte Term unabhängig von r und θ ist. Damit die Gleichung für alle Werte von r, θ und φ erfüllt ist, muss daher der letzte Term eine Konstante sein, die wir m^2 nennen. Wir erhalten nun also zwei Gleichungen

$$\frac{1}{F(\varphi)} \partial_\varphi^2 F(\varphi) = -m^2$$

und

$$\frac{r \sin^2 \theta}{R(r)} \partial_r (r^2 \partial_r) \frac{R(r)}{r} + \frac{\sin \theta}{P(\theta)} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) P(\theta) - m^2 = 0$$

Wenden wir uns zunächst der ersten Gleichung zu. Es ist eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren zwei linear unabhängige Lösungen

$$F(\varphi) = c e^{\pm i m \varphi}$$

lauten. Da φ eine Winkelkoordinate ist, müssen die Lösungen $F(\varphi)$ periodisch in φ mit der Periode 2π sein, also $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$. Dies ist erfüllt, wenn m eine ganze Zahl ist. Da wir durch das \pm negative Werte aber ohnehin schon abgedeckt haben, können wir die Einschränkung $m \in \mathbb{N}_0$ machen. Wenden wir uns nun der zweiten der obigen Gleichungen zu und teilen wir diese durch $\sin^2\theta$. Wir erhalten

$$\frac{r}{R(r)} \partial_r (r^2 \partial_r) \frac{R(r)}{r} + \frac{1}{P(\theta) \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) P(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

Wieder sehen wir, dass der erste Term nur von r abhängt, während die beiden anderen Terme ausschließlich von der Koordinate θ abhängen. Und wiederum kann die Gleichung für alle Werte von r und j nur erfüllt sein, wenn der erste Term eine Konstante ist. Wir nennen diese Konstante $l(l+1)$ und erhalten so wieder zwei Gleichungen, die radiale Gleichung

$$\frac{r}{R(r)} \partial_r (r^2 \partial_r) \frac{R(r)}{r} = l(l+1)$$

die wir uns später ansehen werden und

$$\frac{1}{P(\theta) \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) P(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) = 0$$

zu deren Lösung wir zunächst den Ansatz

$$z = \cos \theta$$

machen. Mit diesem Ansatz haben wir

$$dz = -\sin \theta d\theta \quad \partial_z = -\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \quad \sin^2 \theta = 1 - z^2$$

und können die Gleichung schreiben als

$$\left(\partial_z (1 - z^2) \partial_z + l(l+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) P(z) = 0$$

Diese Gleichung ist als allgemeine Legendre-Gleichung bekannt und ihre Lösungen sind die zugeordneten Legendrefunktionen. Wir wollen diese Lösungen, beginnend mit dem einfachsten Fall $m=0$ nun konstruieren. In diesem einfachen Fall lautet die Gleichung

$$(\partial_z (1 - z^2) \partial_z + l(l+1)) P(z) = 0$$

und wir setzen als Lösung eine Potenzreihe an

$$P(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Damit haben wir

$$\partial_z P(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n z^{n-1}$$

und

$$(1 - z^2) \partial_z P(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n (z^{n-1} - z^{n+1})$$

und schließlich

$$\partial_z (1 - z^2) \partial_z P(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n ((n + \alpha - 1) z^{n-2} - (n + \alpha + 1) z^n)$$

Diesen letzten Ausdruck können wir auch schreiben:

$$\partial_z (1 - z^2) \partial_z P(z) = z^\alpha \left(\sum_{n=-2}^{\infty} (n + \alpha + 2) c_{n+2} ((n + \alpha + 1) z^n) - \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n ((n + \alpha + 1) z^n) \right)$$

Die gesamte Gleichung lautet nun

$$z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} z^n ((n+\alpha+1)((n+\alpha+2)c_{n+2} - (n+\alpha)c_n) + c_n l(l+1)) + c_0 z^{\alpha-2} \alpha(\alpha-1) + c_1 z^{\alpha-1} \alpha(\alpha+1) = 0$$

Da diese Gleichung für beliebiges z gültig sein muss, muss der Koeffizient jeder Potenz von z separat verschwinden. Sehen wir uns zunächst die niedrigste Potenz $z^{\alpha-2}$ an. Hier gibt es drei Möglichkeiten:

$$c_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1$$

Aus der nächstniedrigen Potenz $z^{\alpha-1}$ erhalten wir

$$c_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = -1$$

Für ein allgemeines $n \geq 0$ schließlich liefert der Koeffizientenvergleich

$$(n+\alpha+2)c_{n+2} = c_n \left((n+\alpha) - \frac{l(l+1)}{n+\alpha+1} \right)$$

also eine Rekursionsrelation zwischen c_{n+2} und c_n . Wir sehen nun, dass die Wahl $c_0 = c_1 = 0$ eine triviale Lösung (0) liefert und daher uninteressant ist. Für $\alpha = 1$ und $c_1 = 0$ beginnen wir bei der Potenz z^1 mit dem Koeffizienten c_0 . Für $\alpha = -1$ und $c_0 = 0$ beginnen wir bei z^0 mit dem Koeffizienten c_1 . Wählen wir $\alpha = 0$, so haben wir eine reguläre Taylorreihe. Wir könnten dabei im Prinzip $c_0 \neq 0$ und $c_1 \neq 0$ wählen. Da jedoch die Rekursionsrelation nur jeweils gerade und ungerade Koeffizienten verbindet, würde eine Lösung mit $c_0 \neq 0$ und $c_1 \neq 0$ bloß eine Superposition von einer geraden und einer ungeraden Lösung sein. Wir sehen daher, dass aus allen Möglichkeiten letztlich nur zwei unabhängige bleiben: Eine Taylorreihe mit geraden und eine mit ungeraden Koeffizienten. Um sie darzustellen wählen wir $\alpha = 0$ und entweder $c_0 = 0$ oder $c_1 = 0$. Die Rekursionsrelation lautet nun

$$c_{n+2} = c_n \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)}$$

Nun gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten: Die Rekursionsrelation kann bei einem bestimmten n abbrechen, oder sie bricht niemals ab. Betrachten wir zunächst den zweiten Fall. Wenn die Rekursionsrelation niemals abbricht, so ist im Grenzfall großer n

$$\frac{c_{n+2}}{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

was bedeutet, dass die Taylor-Reihe nicht konvergiert. Physikalisch sinnvolle Lösungen sind daher nur solche, bei denen die Rekursionsrelation bei endlichem n abbricht. Wie wir leicht sehen, geschieht dies, wenn

$$n(n+1) = l(l+1)$$

also $n = l$ oder $n = -l - 1$, der Index l muss also ganzzahlig sein. Wir können nun mithilfe der Rekursionsrelationen Lösungspolynome $P_l(z)$ konstruieren, die sogenannten Legendre-Polynome. Die ersten sind

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{3z^2 - 1}{2} \\ P_3(z) &= \frac{5z^3 - 3z}{2} \end{aligned}$$

wobei die Normierung konventioneller Weise so gewählt wird, dass

$$P_l(1) = 1$$

Allgemeine Legendre-Polynome können mithilfe der Rodriguez-Formel ermittelt werden

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \partial_z^l (z^2 - 1)^l$$

Wir wissen nun also, dass die Polynome $P_l(z)$ die Legendre-Gleichung

$$(\partial_z(1 - z^2)\partial_z + l(l + 1)) P_l(z) = 0$$

erfüllen. Um die allgemeine Legendre-Gleichung zu lösen, bilden leiten wir zunächst die Legendre-Gleichung m mal nach z ab

$$\partial_z^m (\partial_z(1 - z^2)\partial_z + l(l + 1)) P_l(z) = 0$$

Wir wollen den Ableitungsoperator nach rechts bewegen. Dazu betrachten wir zunächst den Ableitungsoperator

$$\partial_z z^2 = z^2 \partial_z + 2z$$

Eine weitere Ableitung ergibt

$$\partial_z^2 z^2 = \partial_z(z^2 \partial_z + 2z) = z^2 \partial_z^2 + 4z \partial_z + 2$$

Aus diesem Ausdruck können wir leicht sehen, dass alle höheren Ableitungen von der Form

$$\partial_z^m z^2 = z^2 \partial_z^m + b_m z \partial_z^{m-1} + c_m \partial_z^{m-2}$$

sein müssen, wobei die Koeffizienten b_m und c_m durch eine Rekursionsrelation gegeben sind, die wir aus der Relation

$$\begin{aligned} \partial_z^m z^2 &= \partial_z \partial_z^{m-1} z^2 \\ &= \partial_z (z^2 \partial_z^{m-1} + b_{m-1} z \partial_z^{m-2} + c_{m-1} \partial_z^{m-3}) \\ &= z^2 \partial_z^m + (b_{m-1} + 2) z \partial_z^{m-1} + (c_{m-1} + b_{m-1}) \partial_z^{m-2} \end{aligned}$$

ableiten können. Wir haben also

$$b_m = b_{m-1} + 2 = 2m$$

und

$$c_m = c_{m-1} + b_{m-1} = c_{m-1} + 2m = m(m-1)$$

Insgesamt erhalten wir aus der Ableitung der m -ten Legendre-Gleichung also

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_z^m (\partial_z(1 - z^2)\partial_z + l(l + 1)) P_l(z) \\ &= (\partial_z^{2+m} - \partial_z \partial_z^m z^2 \partial_z + l(l + 1) \partial_z^m) P_l(z) \\ &= (\partial_z^{2+m} - \partial_z (z^2 \partial_z^m + 2m z \partial_z^{m-1} + m(m-1) \partial_z^{m-2}) \partial_z + l(l + 1) \partial_z^m) P_l(z) \\ &= (\partial_z(1 - z^2)\partial_z - \partial_z 2mz - m(m-1) + l(l + 1)) \partial_z^m P_l(z) \\ &= (\partial_z(1 - z^2)\partial_z - 2mz \partial_z - 2m - m(m-1) + l(l + 1)) \partial_z^m P_l(z) \\ &= (\partial_z(1 - z^2)\partial_z - 2mz \partial_z - m(m+1) + l(l + 1)) \partial_z^m P_l(z) \end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass das Polynom

$$P_{lm}(z) = \partial_z^m P_l(z)$$

die Gleichung

$$(\partial_z(1-z^2)\partial_z + l(l+1) - 2mz\partial_z - m(m+1)) P_{lm}(z) = 0$$

erfüllt. Um nun zur allgemeinen Legendre-Gleichung zu gelangen, multiplizieren wir diese Gleichung noch mit einer zunächst unbekanntem Funktion $f(z)$ von links und versuchen, diese nach rechts zu ziehen. Vom ersten Term erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z)\partial_z(1-z^2)\partial_z &= (\partial_z f(z) - f'(z))(1-z^2)\partial_z \\ &= \partial_z(1-z^2) f(z)\partial_z - f'(z)(1-z^2)\partial_z \\ &= \partial_z(1-z^2)(\partial_z f(z) - f'(z)) - f'(z)(1-z^2)\partial_z \\ &= \partial_z(1-z^2)\partial_z f(z) - \partial_z(1-z^2) f'(z) - f'(z)(1-z^2)\partial_z \\ &= \partial_z(1-z^2)\partial_z f(z) - (1-z^2)\partial_z f'(z) + 2z f'(z) - f'(z)(1-z^2)\partial_z \\ &= \partial_z(1-z^2)\partial_z f(z) - (1-z^2) f'(z)\partial_z - (1-z^2) f''(z) + 2z f'(z) - f'(z)(1-z^2)\partial_z \\ &= \partial_z(1-z^2)\partial_z f(z) - 2(1-z^2) f'(z)\partial_z - (1-z^2) f''(z) + 2z f'(z) \end{aligned}$$

womit die Gleichung insgesamt

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_z(1-z^2)\partial_z f(z) - 2(1-z^2) f'(z)\partial_z - (1-z^2) f''(z) + 2z f'(z) \\ &\quad - 2mz f(z)\partial_z + l(l+1) f(z) - m(m+1) f(z)) P_{lm}(z) \end{aligned}$$

lautet. In der allgemeinen Legendre-Gleichung tritt kein erster Ableitungsterm auf, daher fordern wir dass dieser hier verschwindet, also

$$f'(z)(1-z^2) + mz f(z) \stackrel{!}{=} 0$$

Mit dieser Wahl vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$0 = \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - (1-z^2) \frac{f''(z)}{f(z)} + 2z \frac{f'(z)}{f(z)} + l(l+1) - m(m+1) \right) f(z) P_{lm}(z)$$

Die Funktion $f(z)$ erhalten wir durch Integration von

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -m \frac{z}{1-z^2}$$

also

$$\ln(f(z)) = \frac{m}{2} \ln(1-z^2)$$

oder

$$f(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}}$$

wobei wir eine multiplikative Konstante fixiert haben. Nun müssen wir noch die zweite Ableitung bestimmen

$$\begin{aligned} f''(z) &= \left(-zm(1-z^2)^{\frac{m}{2}-1} \right)' \\ &= -m(1-z^2)^{\frac{m}{2}-1} + m(m-2)z^2(1-z^2)^{\frac{m}{2}-2} \\ &= (1-z^2)^{\frac{m}{2}-2} (m(m-2)z^2 - m(1-z^2)) \\ &= (1-z^2)^{\frac{m}{2}-2} (m(m-1)z^2 - m) \end{aligned}$$

Unsere Gleichung nimmt damit folgende Form an

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - (1-z^2)\frac{f''(z)}{f(z)} + 2z\frac{f'(z)}{f(z)} + l(l+1) - m(m+1) \right) f(z) P_{lm}(z) \\
&= \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - \frac{m(m-1)z^2 - m}{1-z^2} - 2m\frac{z^2}{1-z^2} + l(l+1) - m(m+1) \right) f(z) P_{lm}(z) \\
&= \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - \frac{m(m+1)z^2 - m}{1-z^2} + l(l+1) - m(m+1) \right) f(z) P_{lm}(z) \\
&= \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - \frac{m(m+1)z^2 + m(m+1)(1-z^2) - m}{1-z^2} + l(l+1) \right) f(z) P_{lm}(z) \\
&= \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - \frac{m(m+1) - m}{1-z^2} + l(l+1) \right) f(z) P_{lm}(z) \\
&= \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - \frac{m^2}{1-z^2} + l(l+1) \right) f(z) P_{lm}(z)
\end{aligned}$$

was genau die allgemeine Legendre-Gleichung ist. Wir definieren nun die zugeordneten Legendre-Funktionen (die oft auch als zugeordnete Legendre-Polynome bezeichnet werden, obwohl sie keine Polynome sind) als

$$P_l^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{\frac{m}{2}} P_{lm}(z)$$

und sehen, dass diese die allgemeine Legendre-Gleichung

$$\left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - \frac{m^2}{1-z^2} + l(l+1) \right) P_l^m(z) = 0$$

für $l, m \in \mathbb{N}_0$ und $m \leq l$ erfüllen. Die letzte Einschränkung ergibt sich daraus, dass zur Konstruktion der $P_l^m(z)$ zunächst $P_l(z)$ m mal nach z abgeleitet wurde. Da $P_l(z)$ aber selbst ein Polynom der Ordnung l ist, liefert jede Ableitung über $m = l$ hinaus 0 und somit die triviale Lösung. Interessanterweise gibt es allerdings Lösungen zu negativen m . Dies folgt unmittelbar aus der Form der allgemeinen Legendre-Gleichung, die nur von m^2 abhängt. Daraus folgt auch, dass die Lösungen zu negativen m proportional den Lösungen zu $|m|$ sind. Aus Normierungsgründen definieren wir diese als

$$P_l^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(z)$$

Die wichtigsten Eigenschaften der zugeordneten Legendre-Funktionen sind ihre Orthogonalitätsrelationen. Um die Orthogonalität zu zeigen multiplizieren wir zunächst die Legendre-Gleichung mit einer zweiten Lösung von links und integrieren das Ergebnis

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^1 dz P_l^m(z) \left(\partial_z(1-z^2)\partial_z - \frac{m^2}{1-z^2} + l(l+1) \right) P_l^m(z) \\
&= - \int_{-1}^1 dz (1-z^2) (\partial_z P_l^m(z)) \partial_z P_l^m(z) + \int_{-1}^1 dz P_l^m(z) \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_l^m(z)
\end{aligned}$$

wobei wir partiell integriert haben und der Randterm aufgrund des $1-z^2$ Faktors verschwindet. Wenn wir die Positionen von $P_l^m(z)$ und $P_l^m(z)$ vertauschen, erhalten wir

$$0 = - \int_{-1}^1 dz (1-z^2) (\partial_z P_l^m(z)) \partial_z P_l^m(z) + \int_{-1}^1 dz P_l^m(z) \left(l'(l'+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_l^m(z)$$

Subtrahieren wir die beiden Gleichungen voneinander, erhalten wir

$$(l(l+1) - l'(l'+1)) \int_{-1}^1 dz P_l^m(z) P_l^m(z) = 0$$

was bedeutet, dass für alle $l \neq l'$ das Integral verschwinden muss. Mit der korrekten Normierung erhalten wir daraus die erste Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 P_l^m(z) P_{l'}^m(z) dz = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{ll'}$$

Auf ähnliche Weise können wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 dz P_l^{m'}(z) \left(\partial_z(1-z^2) \partial_z - \frac{m^2}{1-z^2} + l(l+1) \right) P_l^m(z) \\ &= - \int_{-1}^1 dz (1-z^2) (\partial_z P_l^{m'}(z)) \partial_z P_l^m(z) + \int_{-1}^1 dz P_l^m(z) \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_l^{m'}(z) \end{aligned}$$

und

$$0 = - \int_{-1}^1 dz (1-z^2) (\partial_z P_l^m(z)) \partial_z P_l^{m'}(z) + \int_{-1}^1 dz P_l^m(z) \left(l'(l'+1) - \frac{m'^2}{1-z^2} \right) P_l^{m'}(z)$$

bilden und voneinander subtrahieren, woraus die Orthogonalitätsbeziehung

$$(m'^2 - m^2) \int_{-1}^1 \frac{dz}{1-z^2} P_l^{m'}(z) P_l^m(z) = 0$$

folgt. Wiederum mit der korrekten Norm erhalten wir schließlich

$$\int_{-1}^1 \frac{P_l^m(z) P_l^{m'}(z)}{1-z^2} dz = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{mm'}$$

Kehren wir nun zurück zu unserem Separationsansatz. Wir können die Lösung des winkelabhängigen Teils der Poisson-Gleichung nun schreiben als

$$P(\theta) F(\varphi) = c_{lm} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

für ganzzahlige $|m| \leq l$. Es ist üblich, diesen winkelabhängigen Teil der Lösung zusammenzufassen als

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

die man als Kugelflächenfunktionen bezeichnet. Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen der zugeordneten Legendre-Polynome erfüllen die Kugelflächenfunktionen eine Orthogonalitätsrelation bezüglich l und aufgrund der Orthogonalität der ebenen Wellen $e^{im\varphi}$ eine in m . Durch unsere Normierung erhalten wir insgesamt die Relation

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

das heißt, die Kugelflächenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis. Die beiden Winkelintegrale werden oft kombiniert geschrieben als

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta$$

sodass die Orthonormalitätsrelation der Kugelflächenfunktionen die einfache Form

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

annimmt. Wenn wir also den Laplace-Operator in einen radialen und einen winkelabhängigen Teil trennen

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \\ \Delta_\Omega &= \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \end{aligned}$$

können wir den winkelabhängigen Teil der Lösung separieren und erhalten

$$\Delta_\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Zum Abschluss müssen wir noch die radiale Gleichung

$$\frac{r}{R(r)} \partial_r r^2 \partial_r \frac{R(r)}{r} = l(l+1)$$

lösen, wobei wir nun wissen, dass l eine nicht negative ganze Zahl ist. Wir formen zunächst den Ausdruck auf der linken Seite um

$$\begin{aligned} \left(r^2 \left(\frac{R}{r} \right)' \right)' &= \left(r^2 \frac{R' r - R}{r^2} \right)' \\ &= R'' r \end{aligned}$$

also lautet unsere Gleichung

$$r^2 R'' = l(l+1) R$$

Die Lösung ist offensichtlich eine Potenz in r , also $R = cr^\alpha$. Mit diesem Ansatz finden wir

$$\alpha(\alpha-1) = l(l+1)$$

das als Lösungen $\alpha = l+1$ bzw. $\alpha = -l$ besitzt, so dass

$$\frac{R_l(r)}{r} = A_l r^l + B_l r^{-l-1}$$

Insgesamt finden wir als Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten also

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

2.8.3 Lösung der Poisson-Gleichung

Wir wollen nun die inhomogene Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r, \theta, \varphi)$$

in Kugelkoordinaten betrachten und zwar wieder in dem Spezialfall, dass unsere Ladungsverteilung vollständig in einem Volumen V liegt, das vom Ursprung nicht weiter entfernt ist als R . Weiter sind wir vor allem an der Lösung in einer Entfernung $r = |\vec{x}| > R$ interessiert. Da es in dieser Region keine Ladungen gibt, gilt für das Potential dort die Laplace-Gleichung und wir können die allgemeine Lösung für das Potential aus dem letzten Abschnitt als Lösungsansatz verwenden. Das verbleibende Problem ist das Finden der Koeffizienten A_{lm} und B_{lm} .

Eine erste Vereinfachung ergibt sich aus der radialen Form der Lösungen. Während die Lösungen zu A_{lm} für $r \rightarrow \infty$ divergieren, fallen die Lösungen zu B_{lm} für $r \rightarrow \infty$ ab. Nur die für $r \rightarrow \infty$ abfallenden Lösungen entsprechen unserer physikalischen Situation einer Ladungsverteilung, die um den Ursprung herum konzentriert ist, weshalb wir $A_{lm} = 0$ setzen müssen. Für $r < R$ ist diese Lösung nicht gültig, wir können aber einen allgemeinen Lösungsansatz machen, indem wir die B_{lm} von r abhängen lassen, also

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}(r) r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Wenden wir darauf den Laplace-Operator an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \phi(r, \theta, \varphi) &= \Delta \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}(r) r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \Delta_r B_{lm}(r) r^{-l-1} + B_{lm}(r) r^{-l-1} \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r B_{lm}(r) r^{-l-1} - B_{lm}(r) r^{-l-1} \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 (B_{lm}(r)(-l-1) r^{-l-2} + B'_{lm}(r) r^{-l-1}) \\ &\quad - B_{lm}(r) r^{-l-1} \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \partial_r (B_{lm}(r)(-l-1) r^{-l} + B'_{lm}(r) r^{-l+1}) \\ &\quad - B_{lm}(r) r^{-l-1} \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} (B'_{lm}(r)(-l-1) r^{-l} + B''_{lm}(r) r^{-l+1} + (-l+1) B'_{lm}(r) r^{-l}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) (-2l B'_{lm}(r) r^{-l-2} + B''_{lm}(r) r^{-l-1}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) (B'_{lm}(r) r^{-2l})' r^{l-1} \end{aligned}$$

also lautet die Poissongleichung

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) (B'_{lm}(r) r^{-2l})' r^{l-1} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r, \theta, \varphi)$$

Wir multiplizieren von links mit $Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi)$ und integrieren über $d\Omega$, so dass

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) (B'_{lm}(r) r^{-2l})' r^{l-1} = -\int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r, \theta, \varphi)$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation für Kugelflächenfunktionen trägt nur der $l=l'$ und $m=m'$ Term zum Integral bei und wir erhalten

$$(B'_{l'm'}(r) r^{-2l})' r^{l-1} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) \rho(r, \theta, \varphi)$$

oder

$$(B'_{lm}(r) r^{-2l})' = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \rho(r, \theta, \varphi) r^{1-l}$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen verwenden wir wieder das Superpositionsprinzip und die Methode der Green'schen Funktionen. Wir lösen die Gleichung zunächst für den Fall, in dem sich eine Einheitsladung an einem Punkt \vec{x}_0 mit den Kugelkoordinaten r_0, θ_0, φ_0 befindet, also

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

und integrieren danach über die Ladungsdichte. Wir haben also zunächst

$$\begin{aligned} (B'_{\vec{x}_0 lm}(r) r^{-2l})' &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) r^{1-l} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) \frac{1}{r_0^{l+1}} \delta(r - r_0) \end{aligned}$$

Wir können über r integrieren und erhalten

$$B'_{\vec{x}_0 lm}(r) r^{-2l} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) \frac{1}{r_0^{l+1}} \Theta(r - r_0)$$

Multiplikation mit r^{2l} und nochmalige Integration über r liefert schließlich

$$\begin{aligned} B_{\vec{x}_0 lm} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) \frac{1}{r_0^{l+1}} \int_0^R \Theta(r - r_0) r^{2l} dr \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) \frac{1}{r_0^{l+1}} \frac{1}{2l+1} (R^{2l+1} - r_0^{2l+1}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) \frac{1}{2l+1} \left(r_0^l - \frac{R^{2l+1}}{r_0^{l+1}} \right) \end{aligned}$$

was die Lösung zu einer Punktladung der Größe 1 an \vec{x}_0 ist. Um die Lösung für eine allgemeine Ladungsverteilung zu finden, integrieren wir diese Lösung über die Ladungsverteilung, also

$$\begin{aligned} B_{lm}(R) &= \int_0^R r_0^2 dr_0 \int_0^\pi d\theta \sin \theta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 B_{\vec{x}_0 lm} \rho(r_0, \theta_0, \varphi_0) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R r_0^2 dr_0 \int_0^\pi d\theta \sin \theta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) \frac{1}{2l+1} \left(r_0^l - \frac{R^{2l+1}}{r_0^{l+1}} \right) \rho(r_0, \theta_0, \varphi_0) \end{aligned}$$

Erinnern wir uns nun wieder daran, dass unsere Ladungsverteilung auf eine Kugel mit dem Radius R um den Ursprung beschränkt ist. Außerhalb dieser Kugel gilt die Laplace-Gleichung und die B_{lm} sind konstant. Für die obige Lösung trifft das aber nur auf den ersten Term in der Klammer zu. Der zweite hängt explizit von R ab und würde ein anderes Ergebnis liefern, wenn wir R vergrößern würden. Dies ist aber ein unsinniges Ergebnis - ist unsere Lösung also falsch? Nein, doch um das zu sehen, müssen wir diesen Term in unsere Potentialentwicklung einsetzen. $B_{lm}(r)$ multipliziert dort einen Term r^{-l-1} . Der zweite Term im obigen Ausdruck liefert ein r^{2l+1} , womit die gesamte radiale Abhängigkeit insgesamt also r^l wird - also zum A_{lm} Term gehört. Wir können den zweiten Term in der obigen Klammer also in A_{lm} absorbieren und danach $A_{lm} = 0$ setzen. Für die weitere Rechnung können wir diesen Term daher ignorieren und erhalten schließlich als Lösung der Poisson-Gleichung

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l B_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

mit den Koeffizienten

$$B_{lm} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{2l+1} \int_0^R r_0^2 dr_0 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi_0 Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) r_0^l \rho(r_0, \theta_0, \varphi_0)$$

Es ist üblich die Konstanten etwas anders aufzuteilen, nämlich

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi} \varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

mit

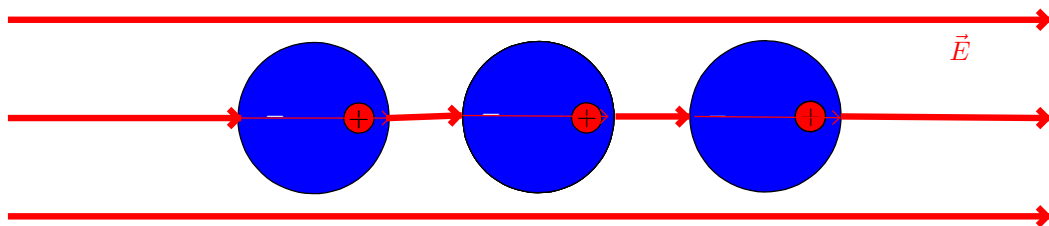
$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_V d^3x r^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \rho(r, \theta, \varphi)$$

Wie wir nun sehen können, stellen Terme mit verschiedenem l die Beiträge zu einer systematischen Entwicklung des Potentials in $1/r$ dar, also einer Multipolentwicklung, die wir in kartesischen Koordinaten bereits kennen. Die q_{lm} sind die Multipolmomente und mit $Y_{00}(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$ können wir den führenden Term wieder leicht als den Beitrag der Gesamtladung erkennen. Im Allgemeinen gibt es zur Ordnung l insgesamt $2l+1$ Beiträge, die sich in m unterscheiden. Es ist auch interessant zu sehen, dass Terme im Potential, die wie r^{-l-1} abfallen, genau von Momenten produziert werden, die über die Ladungsverteilung mit r^l integrieren.

2.9 Dielektrika

Bisher haben wir elektrische Felder im Vakuum und in Leitern untersucht. Tatsächlich ist, fundamental gesehen, nur der Fall von Ladungsverteilungen im Vakuum interessant. Im Fall von Leitern hatten wir es mit einer idealisierten Form von Materie zu tun: beliebig viele Punktladungen, die sich innerhalb eines gegebenen Volumens frei bewegen können. Wir hätten uns darauf beschränken können, nur die Ladungsverteilung, die in einem Leiter entsteht, zu betrachten und mit ihr die Poisson-Gleichung im Vakuum zu lösen. Der Grund warum wir Leiter trotzdem eingeführt haben ist, dass einiges der gewöhnlichen Materie, die uns umgibt, gut durch einen idealen Leiter genähert werden kann - z.B. Metalle.

Tatsächlich besteht die ganze uns alltäglich umgebende Materie aus geladenen Teilchen, nur sind diese nicht immer frei beweglich. Um ihre Struktur genauer zu beschreiben benötigen wir die Quantenmechanik, doch nichtsdestotrotz können wir die elektrischen Eigenschaften der Materie recht gut durch ein einfaches empirisches Modell beschreiben. In diesem Modell sind die elektrischen Ladungen in der Materie jeweils zu neutralen Einheiten verbunden, die wir uns anschaulich als Moleküle oder Teile eines Kristallgitters vorstellen können. Diese neutralen Einheiten haben natürlich keine Gesamtladung, doch sie können ein Dipolmoment besitzen. Solch ein Dipolmoment kann entweder durch eine asymmetrische Elektronenwolke in einem Molekül permanent vorhanden sein oder aber durch Anlegen eines elektrischen Feldes erst induziert werden. Beim Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes richten sich erstere Dipole aus (die sogenannte Orientierungspolarisation), während sich im zweiten Fall die positiven und negativen Ladungen relativ zueinander verschieben (die sogenannte Verschiebungspolarisation). Das so induzierte elektrische Feld wirkt dem angelegten Feld entgegen und schwächt dieses im Inneren, wie in der folgenden Skizze veranschaulicht.



Diese Eigenschaft von Materie nennt man Dielektrizität und die entsprechenden Materialien Dielektrika. Das Umkehren der permanenten Dipole bei der Orientierungspolarisation dissipiert Energie, während bei der Verschiebungspolarisation sich nur die Elektronenwolken verformen, was ohne nennenswerte Reibung vor sich geht. (Das ist übrigens der Grund, warum in einem Mikrowellenherd nur gewisse Stoffe erhitzt werden.) Neben Leitern und Dielektrika gibt es noch Ferroelektrika, deren permanente Dipole sich unterhalb einer kritischen Temperatur T_c selbst ausrichten. Oberhalb dieser kritischen Temperatur bezeichnet man diese Materialien auch als Paraelektrika.

2.9.1 Das makroskopische elektrische Feld

Wir wollen nun das elektrische Feld in einem Dielektrikum beschreiben. Dabei interessiert uns die mikroskopische Struktur nicht, sondern nur die Feldstärke, wie sie gemittelt über viele Moleküldurchmesser aussieht. Nennen wir das tatsächliche elektrische Feld, inklusive all seiner mikroskopischen Struktur \vec{E}_m . Wir können nun ein gemittelt oder makroskopisches elektrisches Feld \vec{E} definieren, indem wir das mikroskopische Feld \vec{E}_m über ein Volumen $V(\vec{x})$ um den Punkt \vec{x} miteln, das viele Moleküle enthält

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{V(\vec{x})} \int_{V(\vec{x})} d^3x' \vec{E}_m(\vec{x}')$$

Dieses Volumen soll sich mit dem Punkt \vec{x} mitbewegen, aber ansonsten seine Form nicht verändern, sodass wir schreiben können

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{E}_m(\vec{x} + \vec{x}')$$

Wenden wir nun unsere beiden Grundgleichungen für das elektrostatische Feld an, die ja für \vec{E}_m gelten, so finden wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_m(\vec{x} + \vec{x}') \\ &= \frac{1}{V} \int_V d^3x' \frac{1}{\epsilon_0} \rho_m(\vec{x} + \vec{x}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{tot}}(\vec{x}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{\nabla} \times \vec{E}_m(\vec{x} + \vec{x}') \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei wir die makroskopisch gemittelte Ladungsdichte

$$\rho_{\text{tot}}(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \rho_m(\vec{x} + \vec{x}')$$

definiert haben. Da die Rotation des makroskopischen Feldes verschwindet, können wir es ebenfalls durch ein Potential ausdrücken

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

Es liegt nahe, dass wir das makroskopische Potential $\phi(\vec{x})$ durch Mittelung über das mikroskopische Potential ausdrücken können

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \phi_m(\vec{x} + \vec{x}')$$

und tatsächlich finden wir

$$-\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{\nabla}\phi_m(\vec{x} + \vec{x}') = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{E}(\vec{x} + \vec{x}') = \vec{E}(\vec{x})$$

was unsere Vermutung bestätigt.

2.9.2 Freie und gebundene Ladungen in einem Dielektrikum

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Quellen das makroskopische elektrische Feld in einem Dielektrikum besitzt bzw. woher das makroskopische Potential stammt. Im Prinzip gibt es hier zwei Möglichkeiten: Einerseits kann es nach wie vor freie Ladungsträger (freie Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$) geben, die wir in einem Dielektrikum platzieren können. Andererseits gibt es in einem Dielektrikum aber auch die (induzierten) Dipole aus der Verschiebungs- oder Orientierungspolarisation. Nehmen wir an, dass dieses Dipolmoment durch eine Dipoldichte $\vec{p}(\vec{x})$ pro Volumen gegeben ist, so können wir das makroskopisch gemittelte Potential schreiben als

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{\text{freie Ladungen}} + \underbrace{\frac{\vec{p}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{\text{induz. Dipole}} d^3x'$$

Durch partielle Integration können wir den zweiten Term umformen zu ($\vec{\nabla}'$ ist der Differentialoperator bezüglich \vec{x}')

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{p}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{p}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{x}') d^3x' \end{aligned}$$

womit das Potential insgesamt als

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \underbrace{(\rho(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{x}'))}_{\rho_{\text{tot}}(\vec{x}')} d^3x'$$

geschrieben werden kann. Wir können daraus direkt ablesen, dass die gesamte Ladungsdichte

$$\rho_{\text{tot}}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}(\vec{x})$$

aus der freien Ladungsdichte und der von der Polarisation herrührenden besteht. Die Divergenz des elektrischen Feld ist daher gegeben als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{tot}}(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho(\vec{x}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}(\vec{x}))$$

was wir auch schreiben können als

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}(\vec{x}) + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{p}(\vec{x}) \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x})$$

Wir definieren das Argument der Divergenz in dieser Gleichung als die dielektrische Verschiebung

$$\boxed{\vec{D}(\vec{x}) := \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x})}$$

womit die Quellengleichung für das elektrostatische Feld die besonders einfache Form

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})}$$

annimmt. Nun erinnern wir uns daran, dass die Polarisation $\vec{p}(\vec{x})$ für Dielektrika durch das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ selbst induziert wird und daher diesem in führender Ordnung proportional sein sollte. Wir setzen daher an

$$\vec{p}(\vec{x}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{x})$$

wobei die Proportionalitätskonstante χ_e die elektrische Suszeptibilität genannt wird. Setzen wir diese Beziehung in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \rho(\vec{x})$$

Die Proportionalitätskonstante

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

wird Dielektrizitätskonstante genannt und ist eine Materialkonstante. Im allgemeinen Fall, den wir hier allerdings nicht betrachten, kann sie orts- und richtungsabhängig (also inhomogen und anisotrop) sein. Es ist üblich, für Materialien nicht die Dielektrizitätskonstante ε selbst, sondern die relative Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

anzugeben.

2.9.3 Elektrostatische Energie im Dielektrikum

Um die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung in einem homogenen, isotropen Dielektrikum zu finden, können wir unsere Herleitung der elektrostatischen Energie im Vakuum aus Kapitel 2.5 nochmals verwenden. Die einzige Änderung, die wir vornehmen müssen, ist das ε_0 durch ein ε zu ersetzen. Wir erhalten also eine Energiedichte

$$u(\vec{x}) = \frac{\varepsilon}{2} \vec{E}^2(\vec{x})$$

die sich mit der Relation $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ auch als

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})$$

schreiben lässt. Wir erkennen daraus eine praktisch sehr wichtige Eigenschaft eines Dielektrikums: es kann bei gleichbleibendem elektrischen Feld die Energiedichte erhöhen. Man nutzt diese Eigenschaft z.B. aus, um die Kapazität eines Kondensators zu erhöhen. Die Spannung an einem idealen Plattenkondensator mit Plattenabstand d ist $U = Ed$ und die Ladungsdichte an seiner Oberfläche ist $q/A = \sigma = D$. Die Kapazität eines Plattenkondensators ist daher gegeben als

$$C = \frac{q}{U} = \frac{DA}{dE} = \varepsilon \frac{A}{d}$$

und nimmt proportional zur Dielektrizitätskonstante ε des Materials zwischen den Kondensatorplatten zu. Die im Kondensator gespeicherte Energie bei konstanter Spannung U ist daher

$$W = Adu = Ad \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \varepsilon \frac{AU^2}{2d}$$

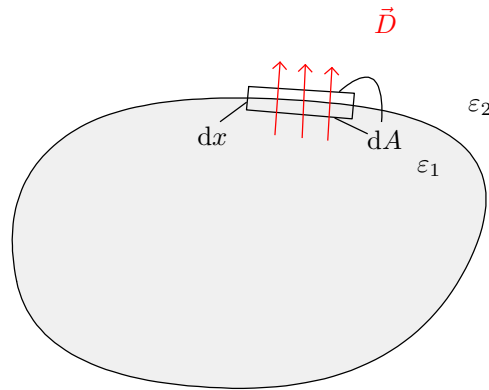
und nimmt ebenfalls mit ε zu.

2.9.4 Randbedingungen an der Grenzfläche zweier Dielektrika

Randbedingungen für elektrische Felder beim Übergang zwischen zwei Dielektrika (wobei sowohl das Vakuum als auch der ideale Leiter als Grenzfälle dargestellt werden können) können ganz einfach aus den Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

gefunden werden. Betrachten wir zunächst die erste Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ und integrieren sie über ein infinitesimal kleines Volumen entlang der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ε_1 und ε_2 wie in der nachfolgenden Figur abgebildet.



Dank des Gauß'schen Satzes wissen wir, dass der Gesamtfluss von \vec{D} durch die Oberfläche des kleinen Volumens

$$\oint_{\partial V} \vec{dA} \cdot \vec{D} = \int_V d^3x \rho(x)$$

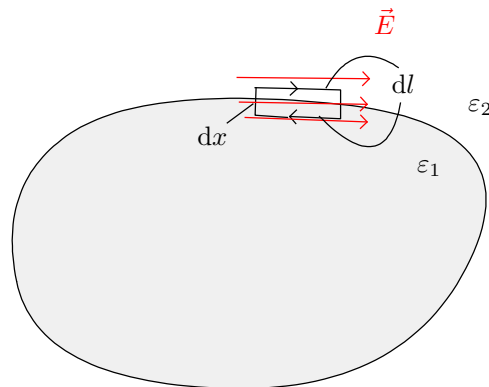
durch die Gesamtladung in dem Volumen gegeben ist. Nun können wir die Höhe des Volumens beliebig klein machen, sodass die Gesamtladung verschwindet (sofern sich nicht eine freie Oberflächenladungsdichte ebenfalls direkt an der Grenzfläche befindet). Das verbleibende Oberflächenintegral beiderseits der Grenzfläche ist nun jeweils durch die Normalkomponente D_{\perp} von \vec{D} gegeben. Mit der Vorzeichenkonvention, dass die Normalkomponente in Richtung ε_2 positiv ist, haben wir daher insgesamt

$$\oint_{\partial V} \vec{dA} \cdot \vec{D} = D_{\perp} dA|_{\varepsilon_2} - D_{\perp} dA|_{\varepsilon_1} = 0$$

womit wir die Randbedingung

$$D_{\perp}|_{\varepsilon_2} = D_{\perp}|_{\varepsilon_1}$$

erhalten. Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung ist also beim Übergang zwischen zwei Dielektrika konstant. Um die Parallelkomponente zu finden, verwenden wir die zweite Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ und wenden den Satz von Stokes an. Wir bilden das Umlaufintegral von \vec{E} über eine infinitesimale Strecke, wie in der folgenden Figur dargestellt.



Wir haben

$$\oint_{\partial A} \vec{dl} \cdot \vec{E} = \int_V \vec{dA} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

Die beiden Seiten dx machen wir dabei beliebig klein, sodass sie nichts zum Umlaufintegral beitragen. Es bleiben schließlich die gegeneinander gerichteten Parallelkomponenten E_{\parallel} des elektrischen Feldes in ε_1 bzw. ε_2 entlang dl , sodass

$$E_{\parallel} dl|_{\varepsilon_2} - E_{\parallel} dl|_{\varepsilon_1} = 0$$

und wir somit die Randbedingung

$$E_{\parallel}|_{\varepsilon_2} = E_{\parallel}|_{\varepsilon_1}$$

finden, d.h. die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika bleibt konstant. Zusammenfassend haben wir an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ε_1 und ε_2 also die Randbedingungen

$$\boxed{\begin{array}{l} D_{\perp}|_{\varepsilon_2} = D_{\perp}|_{\varepsilon_1} \\ E_{\parallel}|_{\varepsilon_2} = E_{\parallel}|_{\varepsilon_1} \end{array}}$$

Zum Abschluss wollen wir noch die zwei anfangs kurz erwähnten Grenzfälle betrachten, das Vakuum und den idealen Leiter. Nehmen wir zunächst an, dass ein Dielektrikum, z.B. ε_1 das Vakuum sei. Wir können das einfach erreichen, indem wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ setzen. Der andere Grenzfall, der eines idealen Leiters, ist etwas subtiler. Wir können uns einen idealen Leiter als ein extremes Dielektrikum vorstellen, das Polarisation erzeugt, ohne dass das elektrische Feld in das Medium eindringt. Formal bedeutet das, dass die Suszeptibilität χ_e und damit die Dielektrizitätskonstante ε divergieren. Ist in unserem Fall also $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, so besagt die Randbedingung

$$\varepsilon_2 E_{\perp}|_{\varepsilon_2} = D_{\perp}|_{\varepsilon_2} = D_{\perp}|_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 E_{\perp}|_{\varepsilon_1}$$

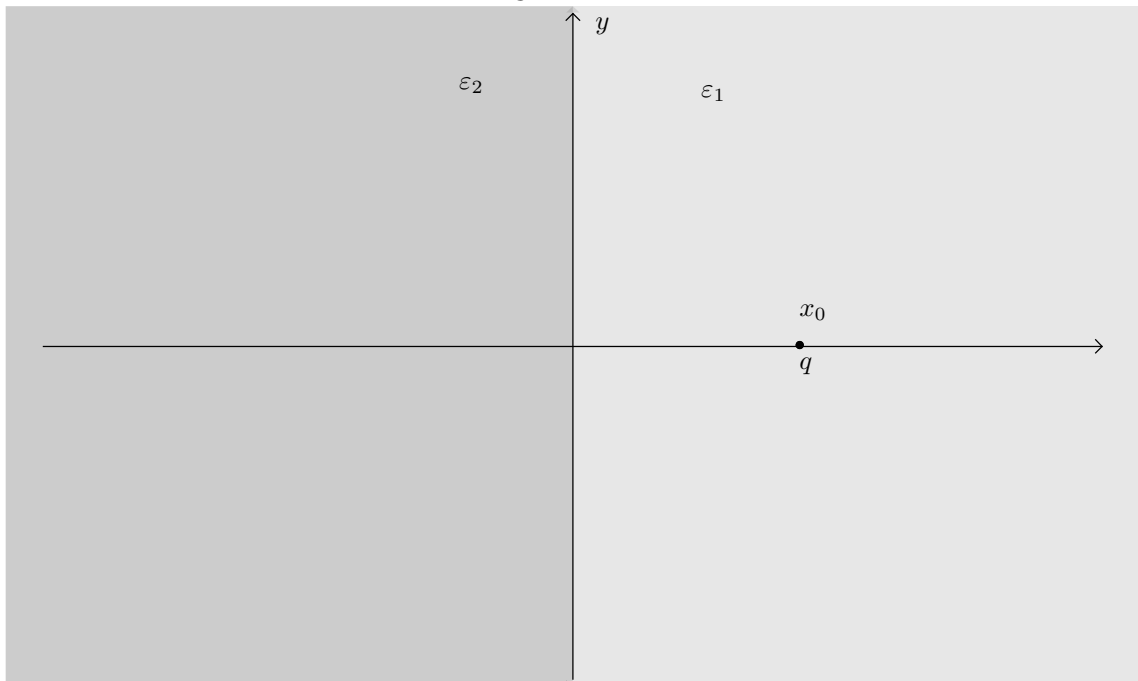
dass

$$E_{\perp}|_{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{\perp}|_{\varepsilon_2} \rightarrow 0$$

die Normalkomponente des elektrischen Feldes im Leiter also verschwindet. Die zweite Randbedingung, $E_{\parallel}|_{\varepsilon_2} = E_{\parallel}|_{\varepsilon_1}$ ist für einen Leiter, wie wir bereits wissen, ebenfalls erfüllt, da in diesem Fall $E_{\parallel}|_{\varepsilon_2} = E_{\parallel}|_{\varepsilon_1} = 0$.

2.9.5 Randwertprobleme mit Dielektrika

Wir betrachten ein einfaches Randwertproblem, eine Punktladung q in einem Dielektrikum ε_1 , das an einer Ebene an ein zweites Dielektrikum ε_2 grenzt.



Wir wählen die Geometrie wieder wie im Falle der Punktladung gegenüber einer Leiterfläche, die wir im Abschnitt 2.6.2 betrachtet haben. Die allgemeine Lösung des Problems für $x > 0$ ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \Phi_h(\vec{x}) \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei im Vergleich zur Vakuumlösung nur die Konstante ε_0 durch ε_1 ersetzt wurde. Für die homogene Lösung $\Phi_h(\vec{x})$ setzen wir wieder eine Spiegelladung q' am Ort $-\vec{x}_0$ an, sodass

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(\frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + \frac{q'}{|\vec{x} + \vec{x}_0|} \right)$$

Um zu sehen, ob dieser Ansatz korrekt ist und in diesem Falle q' zu bestimmen, müssen wir die Einhaltung der Randbedingungen an der Grenzfläche der beiden Dielektrika, also bei $x = 0$ verlangen. Dazu müssen wir zunächst das elektrische Feld aus dem Potential berechnen. Für $x > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(q \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} + q' \frac{\vec{x} + \vec{x}_0}{|\vec{x} + \vec{x}_0|^3} \right) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Problem einer Punktladung gegenüber einem Leiter können wir hier allerdings den Halbraum $x < 0$ nicht einfach vernachlässigen, da das elektrische Feld dort anders als im Leiter nicht verschwindet. Da das Feld im Halbraum $x < 0$ aber auch keine Quellen besitzt, ist das Potential dort alleine durch ein homogenes Potential gegeben. Auch hier liegt es nahe, den Ansatz für das Potential mithilfe einer Ladung q'' außerhalb des Halbraumes bei \vec{x}_0 zu machen. Dies ist keine Spiegelladung im engeren Sinne, sondern sozusagen die Auswirkungen der Ladung q , die im Dielektrikum ε_1 sitzt, auf einen Punkt im Dielektrikum ε_2 . Wir setzen also für das Potential im Halbraum $x < 0$ an

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q''}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$$

woraus ein elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} q'' \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

folgt. Nun können wir die Randbedingungen am Übergang der beiden Dielektrika bei $x = 0$ formulieren. Zunächst wissen wir, dass die Parallelkomponente des elektrischen Feldes, hier also E_y und E_z konstant bleiben muss. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(q \frac{y}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + q' \frac{y}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} q'' \frac{y}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(q \frac{z}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + q' \frac{z}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} q'' \frac{z}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Beide Gleichungen führen zur selben Bedingung

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\varepsilon_2} q''$$

Für die Normalkomponente andererseits gilt dass $D_x = \varepsilon E_x$ konstant sein muss. Daraus erhalten wir

$$\frac{1}{4\pi} \left(q \frac{-x_0}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + q' \frac{x_0}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{1}{4\pi} q'' \frac{-x_0}{(x_0^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

also

$$q - q' = q''$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die erste Randbedingung erhalten wir

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\varepsilon_2}(q - q')$$

und somit

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad q'' = 2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

Wir konnten also mit unserem Spiegelladungsansatz die Randbedingungen erfüllen. Darüber hinaus sehen wir das korrekte Verhalten in zwei Grenzfällen: Wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, also für den Fall eines homogenen Dielektrikums, ist $q' = 0$ und $q'' = q$, wie wir es erwarten würden. Für $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$, für den Fall also, dass sich bei $x < 0$ ein Leiter befindet, erhalten wir $q' = -q$, wie wir es für einen Leiter hatten. Wir erhalten auch $q'' = 2q$, aber da $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ verschwindet trotzdem das Potential für $x < 0$. Weiter ist interessant dass für den Fall $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ die Spiegelladung q' dasselbe Vorzeichen hat wie q , für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ sich das Vorzeichen jedoch ändert.

Beispiel. Wir wollen nun eine Konfiguration betrachten, die aus einer dielektrischen Kugel ε_2 mit Radius R um den Ursprung herum besteht, die in ein in alle Richtungen unendliches ausgedehntes Dielektrikum ε_1 eingebettet ist, in dem alleine ein homogenes elektrisches Feld

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

herrscht. Für das Potential bei $r > R$ setzen wir daher an

$$\phi^+ = -Ez + \phi_h = -Er \cos \theta + \phi_h$$

wobei ϕ_h der noch zu bestimmende homogene Anteil des Potentials ist, der aus den Randbedingungen folgt. Aus unserer Betrachtung einer Leiterkugel wissen wir bereits, dass ein solches Feld in einem Leiter einen Spiegeldipol induziert. In Polarkoordinaten können wir einen solchen Spiegeldipol schreiben als

$$\phi^+(r, \theta, \varphi) = E \cos \theta (-r + Ar^{-2})$$

wobei A eine noch zu bestimmende Konstante ist. Wir sehen außerdem, dass diese Form des Potentials genau dem Term $l = 1$, $m = 0$ unserer Multipolentwicklung in Polarkoordinaten entspricht ($P_1(\cos \theta) = \cos \theta$). Im Inneren der dielektrischen Kugel ε_2 , also für $r < R$, existiert dagegen nur ein Feld aufgrund des angelegten homogenen Feldes, also

$$\phi^-(r, \theta, \varphi) = -Er \cos \theta B$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante B . Wir wollen nun mithilfe der Randbedingungen überprüfen, ob der Ansatz korrekt ist und wenn ja die Werte der Konstanten A und B bestimmen. Für die erste Randbedingung, $\varepsilon_1 E_{\perp}^+ = D_{\perp}^+ = D_{\perp}^- = \varepsilon_2 E_{\perp}^-$ benötigen wir die Normalkomponente des elektrischen Feldes auf die Kugeloberfläche, also das elektrische Feld in radialer Richtung. Am direktesten erhalten wir dies aus der Radialkomponente des Differentialoperators $\nabla_r = \partial_r$ angewandt auf das Potential, also

$$\begin{aligned} E_{\perp}^+(R) &= -\nabla_r \phi^+(R) \\ &= \cos \theta E(1 + 2AR^{-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\perp}^-(R) &= -\nabla_r \phi^-(R) \\ &= \cos \theta EB \end{aligned}$$

Die Randbedingung lautet also

$$\varepsilon_1(1 + 2AR^{-3}) = \varepsilon_2 B$$

Für die zweite Randbedingung $E_{\parallel}^+ = E_{\parallel}^-$ benötigen wir die Komponenten des elektrischen Feldes parallel zur Kugeloberfläche. In Polarkoordinaten sind diese gegeben durch die Komponenten des Differentialoperators $\vec{\nabla}$ in θ und φ Richtung angewandt auf das Potential, also

$$E_{\theta} = -\nabla_{\theta} \phi = -\frac{1}{r} \partial_{\theta} \phi \quad E_{\varphi} = -\nabla_{\varphi} \phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\varphi} \phi$$

In unserem Fall ist die zweite Bedingung trivial erfüllt, da unser Problem rotationssymmetrisch in φ ist. Aus der ersten Bedingung erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{\theta}^{+}(R) &= -\frac{1}{r} \partial_{\theta} \phi^{+}(R) = \sin \theta E(-R + AR^{-2}) \\ E_{\theta}^{-}(R) &= -\frac{1}{r} \partial_{\theta} \phi^{-}(R) = -\sin \theta ERB \end{aligned}$$

und damit

$$B = 1 - AR^{-3}$$

Kombinieren wir diese mit der ersten Randbedingung, so erhalten wir

$$A = R^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \quad B = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}$$

und damit

$$\begin{aligned} \phi^{+}(r, \theta, \varphi) &= -Er \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \right) \\ \phi^{-}(r, \theta, \varphi) &= -Er \cos \theta \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \end{aligned}$$

Wieder sehen wir, dass im Grenzfall $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ das homogene elektrische Feld ungestört bleibt, während wir für eine Leiterkugel $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ $A = R^3$ und somit ein Potential

$$\begin{aligned} \phi^{+}(r, \theta, \varphi) &= -Er \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \\ \phi^{-}(r, \theta, \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

erhalten. Dies stimmt (abgesehen von der anderen Wahl der Koordinaten) mit unserem Resultat aus Abschnitt 2.6.4 überein.

3 Magnetostatik

Magnetische Phänomene sind wie elektrostatische schon seit dem Altertum bekannt. Der Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus blieb jedoch lange Zeit im Dunkeln. Der erste wichtige Schritt zu einem quantitativen Verständnis gelang im Jahre 1820 Jean-Baptiste Biot und Félix Savart, die das Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter beschreiben konnten und im Jahre 1825 André-Marie Ampère, der das integrierte Magnetfeld in einer geschlossenen Schleife mit dem durch die Schleife fließenden Strom in Zusammenhang brachte. In diesen Betrachtungen wird der Stromfluss jeweils als stationär angenommen, das heißt er verändert sich zeitlich nicht. Dies ist noch nicht der vollständige Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Phänomenen, doch wir wollen dieses Kapitel der wichtigen Betrachtung dieser sogenannten magnetostatischen Phänomene widmen.

3.1 Ströme

Bevor wir uns dem Magnetfeld zuwenden, wollen wir zunächst ein paar grundlegende Betrachtungen zum elektrischen Strom anstellen, der die Ursache statischer Magnetfelder darstellt. Elektrischer Strom I ist definiert als die Ladung dQ , die in einer gegebenen Zeit dt durch eine Fläche A fließt,

also

$$I|_A = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_A$$

Der gesamte Stromfluss durch die Fläche A setzt sich dabei zusammen aus der Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$, die durch ein Flächenelement $d\vec{A}$ fließt, also

$$I|_A = \int_A \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{A}$$

Wählen wir als Fläche die Oberfläche eines Volumens $A = \partial V$, in dem sich die Ladung Q befindet, so erhalten wir

$$I|_{\partial V} = - \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{\partial V} = \oint_{\partial V} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{A}$$

wobei das negative Vorzeichen ausdrückt, dass die Ladung aus dem Volumen fließt. Da wir die Gesamtladung als Volumenintegral der Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ ausdrücken können, erhalten wir schließlich

$$- \int_V \frac{d\rho(\vec{x}, t)}{dt} d^3x = \oint_{\partial V} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{A}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung können wir mithilfe des Gauß'schen Satzes umformen, sodass wir schließlich

$$- \int_V \frac{d\rho(\vec{x}, t)}{dt} d^3x = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) d^3x$$

erhalten. Da dies für jedes beliebige Volumen gelten muss, schließen wir daraus

$$- \frac{d\rho(\vec{x}, t)}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t)$$

Diese Gleichung ist als Kontinuitätsgleichung bekannt und drückt die Erhaltung elektrischer Ladung mikroskopisch aus. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit statischen Strömen beschäftigen, also mit Strömen, die die Gesamtladungsdichte unverändert lassen. Für diese gilt daher

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = 0$$

Bemerkung. Im Hinblick auf die relativistische Formulierung in späteren Kapiteln sei hier angemerkt, dass sich die Kontinuitätsgleichung auf sehr kompakte Art schreiben lässt, wenn wir die Ladungsdichte ρ als zeitliche „nullte“ Komponente der Stromdichte auffassen $j_0 = c\rho$ und den kartesischen Differentialoperator ∂_i um die zeitliche Ableitung $\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$ erweitern.² Die Kontinuitätsgleichung lautet dann, unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention

$$\partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0$$

oder, wenn man die Summenkonvention so ausdehnt, dass griechische Indizes von 0 bis 3 summiert werden:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

² Die Konstante c dient hier nur dazu die Einheiten richtigzustellen, d.h. aus einer Ladungsdichte ρ eine Stromdichte j^0 zu machen und kann für diese Betrachtung auch vernachlässigt werden. Trotzdem ist es interessant zu bemerken, dass c die Einheiten einer Geschwindigkeit besitzt und diese - sollte unsere Betrachtung relevant sein - konstant ist.

Dies gibt uns einen ersten Hinweis darauf, dass wir dreidimensionale dynamische Probleme als vierdimensionale statische Probleme darstellen können.

3.2 Das Magnetfeld

Im letzten Kapitel haben wir die Elektrostatik aus dem Coulombgesetz entwickelt. Wir haben das Konzept des elektrischen Feldes eingeführt und viele mathematische Hilfsmittel anwenden gelernt, doch im Grunde haben wir nur das Coulombgesetz näher untersucht, das selbst wiederum an das Newton'sche Gravitationsgesetz angelehnt ist. Es ist bisher die einzige Form eines fundamentalen Kraftgesetzes, die wir kennen: Eine Kraft zwischen zwei Punktladungen im Euklid'schen Raum, proportional zu beiden Ladungen und zum inversen Quadrat des Abstandes. Die r^{-2} Proportionalität wiederum haben wir aus rein geometrischen Überlegungen erhalten - Der Fluss des Feldes durch eine Oberfläche um die Punktladung ist konstant. Auch wenn wir viele andere Kräfte kennengelernt haben - Reibungskräfte, Auftriebskraft, Federkraft usw. - so waren diese doch alle nur effektive Modelle oder Idealisierungen. Die Kräfte, die einen Festkörper zusammenhalten oder die Seilspannung eines Fadenpendels bewirken, sind uns im Grunde unbekannt.

Mit der magnetischen Kraft tritt uns eine neue fundamentale Kraft gegenüber und es ist naheliegend, auch hier das uns bekannte Schema anzuwenden - eine Kraft zwischen Punktladungen, proportional zum Produkt der Ladungen und zu deren inversen Abstand zum Quadrat. Wir treffen auch in der Natur magnetische Dipole an, die sich völlig analog zu elektrischen Dipolen verhalten. Wir können sogar ein Magnetfeld \vec{B} einführen³, das magnetische Dipole genau so produzieren wie elektrische Dipole ein elektrisches Feld und in dem sie sich auch genau so ausrichten. Doch nach einigem Experimentieren wird ziemlich schnell klar, dass sich magnetische Dipole nicht in zwei magnetische Ladungen trennen lassen. Diese Tatsache macht uns klar, dass wir für magnetische Phänomene nicht einfach die mathematische Form des Newton'schen Gravitationsgesetzes ansetzen können, wenn wir nicht gleichzeitig dazu bereit sind, Dipole als fundamental anzunehmen. Wir können aber andererseits, ausgestattet mit unserem Wissen über Felder, das wir aus der Untersuchung des elektrischen Feldes gewonnen haben, die Nichtexistenz von Monopolen dazu nutzen, die erste Grundgleichung für das Magnetfeld \vec{B} aufzustellen. Wenn magnetische Ladungen oder Monopole wirklich nicht existieren, so hat das Magnetfeld keine Quellen, also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Wie aber entstehen magnetische Dipole, wenn sie nicht aus Monopolen zusammengesetzt sind? Noch allgemeiner können wir uns fragen, wie überhaupt ein Magnetfeld existieren kann, wenn es keine Quellen hat. Eine erste Antwort darauf finden wir in Experimenten, die zeigen, dass sich magnetische Dipole in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters ausrichten. Solche Experimente wurden erstmals am Anfang des 19. Jahrhunderts durchgeführt und zeigten dabei, dass das Magnetfeld in der Nähe eines sehr langen, stromdurchflossenen Leiters

- a) Normal auf den Leiter steht
- b) Normal auf den Abstandsvektor des Dipols zum Leiter steht
- c) Proportional dem Stromfluss durch den Leiter ist
- d) Proportional zum inversen Abstand des Dipols vom Leiter ist

Wir können diese Fakten kompakt zusammenfassen als

$$\vec{B} \propto \frac{1}{r} \vec{I} \times \vec{e}_r \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{r} \quad r = |\vec{x}|$$

³. Die genaue Bezeichnung für \vec{B} lautet magnetische Flussdichte, doch wir werden hauptsächlich die generische Bezeichnung Magnetfeld verwenden.

wobei \vec{I} der Stromfluss durch den Leiter ist und \vec{r} der Abstandsvektor des Punktes vom Leiter. Wir legen die Proportionalitätskonstante fest als

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{I} \times \vec{e}_r$$

wobei μ_0 als magnetische Feldkonstante oder Vakuumpermeabilität bezeichnet wird. Wir wollen aus dieser Beziehung nun die Grundgleichung für das Magnetfeld herleiten. Dazu integrieren wir das Magnetfeld entlang des Umfangs eines Kreises A mit Radius r , der normal zum Leiter steht und durch dessen Mittelpunkt der Leiter verläuft. Bilden wir das Umlaufintegral, so erhalten wir

$$\oint_{\partial A} \vec{dl} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 I|_A = \mu_0 \int_A \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{dA}$$

wobei $\vec{j}(\vec{x})$ die Stromdichte ist. Andererseits können wir das Umlaufintegral mithilfe des Satzes von Stokes auch umschreiben als

$$\oint_{\partial A} \vec{dl} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot \vec{dA}$$

Der Vergleich der beiden Ausdrücke legt nahe, dass unsere zweite Grundgleichung für das Magnetfeld

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

lautet. Dabei müssen wir annehmen, dass auch für das Magnetfeld das Superpositionsprinzip gilt, d.h. dass das Magnetfeld, das durch zwei überlagerte Ströme verursacht wird, gleich der Summe der Magnetfelder der einzelnen Ströme ist.

3.2.1 Die Wirkung des Magnetfeldes auf Ladungen

Wir sind nun in einer einigermaßen seltsamen Situation. Dank der Analogie zum elektrostatischen Feld und der Existenz von magnetischen Dipolen konnten wir die Grundgleichungen des Magnetfelds, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$, aus Experimenten deduzieren. Wir haben aber immer noch keine Ahnung, woraus ein magnetischer Dipol besteht und welche Auswirkungen das Magnetfeld auf andere Objekte hat. Die Vermutung liegt natürlich nahe, dass das Magnetfeld eine Kraft auf elektrische Ströme bewirkt, da es ja auch von ihnen hervorgerufen wird. In der Tat finden wir experimentell, dass auf eine sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegende Ladung q in einem Magnetfeld \vec{B} eine Kraft wirkt, die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Vielleicht fragen Sie sich, warum wir hier keine Proportionalitätskonstante benötigen. Tatsächlich haben wir noch eine bisher unbestimmte Konstante, nämlich μ_0 . Wir können daher die Stärke des Magnetfeldes so definieren, dass in der Lorentz-Kraft keine weitere Proportionalitätskonstante benötigt wird.

Die Lorentz-Kraft, im Sinne einer Kraft auf eine Punktladung, ist streng genommen kein Teil der Magnetostatik mehr: Eine sich bewegende Punktladung stellt einen zeitlich nicht konstanten Strom dar. Wir können aber einen zeitlich konstanten Strom durch die Bewegung von Ladungsträgern darstellen, zumindest im Grenzfall von unendlich vielen, infinitesimalen sich bewegenden Ladungsträgern. Dazu betrachten wir eine Querschnittsfläche \vec{dA} um den Punkt \vec{x} , durch die eine Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{dl}/dt$ fließt. Die Ladung, die pro Zeit dt durch \vec{dA} fließt ist daher $dq = \vec{dA} \cdot \vec{dl} \rho(\vec{x})$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}) = \vec{v} \rho(\vec{x})$. Für die Lorentz-Kraft auf die Ladung dq im Volumen $dV = \vec{dA} \cdot \vec{dl}$ finden wir daher

$$d\vec{F}(\vec{x}) = \vec{dA} \cdot \vec{dl} \rho(\vec{x}) \frac{\vec{j}(\vec{x})}{\rho(\vec{x})} \times \vec{B}(\vec{x})$$

was wir schreiben können als

$$\frac{d\vec{F}(\vec{x})}{dV} = \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

In dieser Form können wir nun die Lorentz-Kraft auf magnetostatische Fälle anwenden. Untersuchen wir zunächst den einfachen Fall zweier paralleler, unendlich langer Leiter im Abstand d zueinander, durch die jeweils ein Strom I_1 bzw. I_2 fließen. Berechnen wir zunächst das Magnetfeld, das vom Strom I_1 erzeugt wird. Wählen wir unser kartesisches Koordinatensystem so, dass der Strom I_1 entlang der positiven x -Achse fließt, so wissen wir schon dass das Magnetfeld gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{I}_1 \times \vec{e}_r \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{y^2 + z^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{y^2 + z^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -I_1 z \\ I_1 y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{y^2 + z^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um die Kraft auf den zweiten Leiter zu berechnen benötigen wir zunächst dessen Stromdichte. Wählen wir unser Koordinatensystem so, dass sich der zweite Leiter bei $z=0$ und $y=d$ befindet, so haben wir

$$\vec{j}(\vec{x}) = \vec{I}_2 \delta(z) \delta(y-d) \quad \vec{I}_2 = \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

woraus sich eine Kraft pro Volumen $dV = dx dy dz$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}(\vec{x})}{dV} &= \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) \\ &= \vec{I}_2 \times \vec{B}(\vec{x}) \delta(z) \delta(y-d) \end{aligned}$$

ergibt. Integrieren wir dies über eine Querschnittsfläche A um $z=0$ und $y=d$, durch die I_2 , aber nicht I_1 fließt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_A dy dz \frac{d\vec{F}(\vec{x})}{dV} &= \frac{d\vec{F}(x)}{dx} \\ &= \vec{I}_2 \times \int_A dy dz \vec{B}(\vec{x}) \delta(z) \delta(y-d) \\ &= \vec{I}_2 \times \overset{A}{\vec{B}}(x, d, 0) \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d^2} \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -I_2 d \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \vec{e}_y \end{aligned}$$

Es gibt also eine Kraft pro Länge l

$$\frac{\vec{F}}{l} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \vec{e}_y$$

die auf zwei parallele, stromdurchflossene Leiter wirkt. Wir können ablesen, dass die Kraft anziehend ist für Ströme, die in die gleiche Richtung fließen. Weiter ist sie proportional zu dem Produkt beider Ströme und zum inversen Abstand. Die inverse Proportionalität zum Abstand lässt sich wiederum geometrisch verstehen: Im Gegensatz zum Coulombgesetz, wo sich der Fluss über eine Kugeloberfläche verteilt und damit verbunden $F \propto r^{-2}$, verteilt sich der Fluss hier über eine Zylinderoberfläche, weshalb $F \propto r^{-1}$. Wir können nun auch die magnetische Feldkonstante fixieren. In SI-Einheiten ist $\mu_0 \cong 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$.

Dieses Resultat lässt sich als magnetisches Pendant zum Coulomb-Gesetz verstehen und als eine neue Form eines fundamentalen Kraftgesetzes. Allerdings sehen wir schon an dieser Stelle, dass sich dieses neue Kraftgesetz nicht so gut in die Newton'sche Mechanik einfügen wird wie das elektrostatische Coulomb-Gesetz. Wir erinnern uns, dass in der Newton'schen Mechanik alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind. Nun können wir aber in dem obigen Problem zweier paralleler, stromdurchflossener Leiter in ein Inertialsystem gehen, in dem die Stromdichte in einem der Leiter verschwindet. Die Kraft zwischen den beiden Leitern scheint also vom Inertialsystem abzuhängen - eine Inkonsistenz der Theorie, die weitreichende Folgen hat, wie wir noch sehen werden.

3.3 Das magnetische Potential

Fassen wir noch einmal die Grundgleichungen der Magnetostatik zusammen und stellen sie denen der Elektrostatik gegenüber

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Dank der Rotationsfreiheit des elektrischen Feldes konnten wir es als Gradienten eines Potentials schreiben - eine Möglichkeit, die uns in der Magnetostatik nicht offen steht. Wir können allerdings die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes nutzen: Sie erlaubt es, das Magnetfeld als eine Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{x})$ zu schreiben, das wir magnetisches Potential oder Vektorpotential nennen. Wir haben also

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

womit die homogene Feldgleichung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

automatisch erfüllt ist. Die inhomogene Feldgleichung können wir damit schreiben als

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

Der Ausdruck auf der linken Seite lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \\ &= \partial_i \partial_m A_m - \partial_j \partial_j A_i \end{aligned}$$

was wir in Vektorschreibweise als

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (3)$$

ausdrücken können. Daher lautet unsere Gleichung für das Vektorpotential auch

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}(\vec{x})$$

und wiederum gilt, dass wir mit einer Lösung dieser einen Gleichung beide Grundgleichungen für das Magnetfeld erfüllt haben.

3.3.1 Eichsymmetrie

In der Elektrostatik hatten wir schon bemerkt, dass die Poissongleichung nicht immer eine eindeutige Lösung für das elektrostatische Potential liefert - wir konnten zum Potential eine beliebige Konstante addieren und erhielten dasselbe elektrische Feld. Ursache für diese Ambiguität war im Fall des elektrostatischen Feldes die Tatsache, dass die Divergenz einer Konstanten verschwindet und eine additive Konstante im Potential daher keine Auswirkung auf das elektrostatische Feld hatte. Ähnlich können wir nun im Falle des Vektorpotentials uns die Frage stellen, welche Modifikationen keine Auswirkungen auf das daraus resultierende Magnetfeld haben. Die Antwort ist natürlich, dass wir zum Vektorpotential jeden Term addieren können, dessen Rotation verschwindet, ohne dass dies das resultierende Magnetfeld ändern würde. Welche Terme das sind, wissen wir aber bereits: Jedes Vektorfeld das als Gradient eines Skalarfeldes dargestellt werden kann, hat eine verschwindende Rotation. Wir können also ein Skalarfeld $\psi(\vec{x})$ definieren und damit aus einem gegebenen Vektorpotential $\vec{A}^0(\vec{x})$ mit dazugehörigem Magnetfeld $\vec{B}^0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}^0$ ein neues

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}^0(\vec{x}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$$

konstruieren, aus dem dasselbe Magnetfeld

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{A}^0(\vec{x}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{x})) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A}^0(\vec{x}) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\psi(\vec{x})) \\ &= \vec{B}^0(\vec{x})\end{aligned}$$

resultiert. Diese Transformation nennt sich Eichtransformation und die Tatsache, dass die Eichtransformation das Magnetfeld unberührt lässt, nennen wir Eichsymmetrie. Wir wollen diese Eichsymmetrie nun nutzen, um unsere Gleichung für das Vektorpotential zu vereinfachen. Im Speziellen wollen wir verlangen, dass $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, woraus resultieren würde, dass

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}(\vec{x})$$

somit also die Grundgleichung für das Vektorpotential eine Poisson-Gleichung für jede seiner Komponenten wäre. Die Frage ist: Dürfen wir $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ verlangen oder, anders gesagt, gibt es immer eine Eichtransformation $\psi(\vec{x})$, sodass wir aus jedem $\vec{A}^0(\vec{x})$ ein $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}^0(\vec{x}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{x})$ erhalten können, dessen Divergenz verschwindet? Wir verlangen also

$$\begin{aligned}0 &= \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \\ &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}^0(\vec{x}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{x})) \\ &= \vec{\nabla}\cdot\vec{A}^0(\vec{x}) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\psi(\vec{x}) \\ &= \vec{\nabla}\cdot\vec{A}^0(\vec{x}) + \Delta\psi(\vec{x})\end{aligned}$$

Die Eichtransformation $\psi(\vec{x})$ ist also gegeben als Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\psi(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}^0(\vec{x})$$

Wir müssen diese Gleichung nicht lösen, es reicht uns festzustellen, dass eine solche Lösung existiert. Tatsächlich ist diese Lösung nicht einmal unbedingt eindeutig, da wir eine beliebige Lösung der homogenen Poisson-Gleichung zu $\psi(\vec{x})$ addieren können. Wir wollen diese Prozedur, die sogenannte Eichfixierung, an dieser Stelle aber nicht weiter treiben und geben uns damit zufrieden, dass wir immer $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ verlangen können. Diese spezielle Form der Eichfixierung nennt man die Coulomb-Eichung.

3.3.2 Lösung des magnetostatischen Problems in der Coulomb-Eichung

Wie wir sehen, hat die Grundgleichung der Magnetostatik in der Coulomb-Eichung

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

große Ähnlichkeiten zur Grundgleichung der Elektrostatik

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Die allgemeine Lösung in der Elektrostatik lautete

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \Phi_h(\vec{x})$$

wobei Φ_h eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung $\Delta \Phi_h = 0$ darstellte. In der Magnetostatik haben wir es mit einer Poisson-Gleichung in jeder der drei Komponenten A_i zu tun und müssen entsprechend Φ durch A_i sowie ρ durch j_i ersetzen. Weiter ist die Proportionalitätskonstante μ_0 anstatt ϵ_0 , also erhalten wir insgesamt

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{A}_h(\vec{x})$$

wobei $\vec{A}_h(\vec{x})$ eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung $\Delta \vec{A}_h(\vec{x}) = 0$ darstellt, die durch die Randbedingungen gegeben ist. Im Prinzip könnten wir zu dieser Lösung noch eine beliebige Eichtransformation addieren, wir wollen allerdings hier in der Coulomb-Eichung bleiben.

Beispiel. Als Beispiel für wollen wir das Vektorpotential eines unendlich langen, infinitesimal dünnen Drahts berechnen, durch den ein Strom I fließt. Wir wählen das Koordinatensystem wieder so, dass der Strom entlang der positiven z -Achse fließt. Die Stromdichte ist daher

$$\vec{j}(\vec{x}) = I \delta(x) \delta(y) \vec{e}_z$$

Berechnen wir zunächst die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} \vec{A}_p(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z' - z)^2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = z' - z \\ dt = dz' \\ \pm\infty \rightarrow \pm\infty \end{array} \right\} \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + t^2}} \end{aligned}$$

Wie wir erkennen können, divergiert dieses Integral. Wir werden daher etwas vorsichtiger vorgehen und zunächst das Integral für einen endlich langen Draht mit Integralgrenzen $-T, T$ bestimmen und danach den Grenzwert $T \rightarrow \infty$ bilden. Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ haben wir

$$\begin{aligned} \vec{A}_p^T(r) &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-T}^T dt \frac{1}{\sqrt{r^2 + t^2}} \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{\frac{T}{r}} dt \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{r}\right)^2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = r \sinh \theta \\ dt = r \cosh \theta d\theta \\ T \rightarrow \operatorname{asinh}\left(\frac{T}{r}\right) \\ 0 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\operatorname{asinh}\left(\frac{T}{r}\right)} d\theta \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \operatorname{asinh}\left(\frac{T}{r}\right) \end{aligned}$$

Aus

$$e^\theta = \sinh \theta + \cosh \theta = \sinh \theta + \sqrt{1 + \sinh^2 \theta}$$

folgt mit $\theta = \operatorname{asinh} y$

$$e^{\operatorname{asinh} y} = y + \sqrt{1 + y^2}$$

also

$$\operatorname{asinh} y = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$$

oder

$$\operatorname{asinh} y = \ln y + \ln\left(1 + \sqrt{1 + y^{-2}}\right)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{A}_p^T(r) &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{T}{r}\right) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{T}\right)^2}\right) \right) \\ &= -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r) + \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln(T) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{T}\right)^2}\right) \right) \end{aligned}$$

Wir haben also insgesamt

$$\begin{aligned} \vec{A}(r) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r) + \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln(T) + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{T}\right)^2}\right) \right) \right) \\ &= -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r) + \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \ln(T) + \ln(2) \right) \\ &= -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(r) + \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \ln(2T) \end{aligned}$$

Der divergente Term in diesem Ausdruck

$$\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(2T)$$

ist (für ein beliebiges, fixes T) ein konstanter Vektor und damit eine Lösung der homogenen Poisson-Gleichung. Das bedeutet, wir können bei endlichem T die durch die Randbedingungen gegebene homogene Lösung ansetzen als

$$\vec{A}_h(r) = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(2T)$$

und erhalten damit

$$\vec{A}(r) = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r$$

oder

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$$

Wir können leicht überprüfen, dass uns dieses Potential das korrekte Magnetfeld liefert:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \\ &= -\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \\ &= -\begin{pmatrix} \partial_y \\ -\partial_x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y/r \\ x/r \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / r \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi r} \vec{I} \times \vec{e}_r \end{aligned}$$

Ein interessanter Aspekt dieser Rechnung ist die Tatsache, dass wir eine vollkommen reguläre, physikalische Lösung erhalten haben, obwohl ein Zwischenresultat divergent war. Der entscheidende Schritt dabei war zu identifizieren, welches die physikalisch relevanten Größen sind - in unserem Fall sind es das gesamte Vektorpotential und das Magnetfeld - und darauf zu achten, dass diese während der Rechnung endlich bleiben. Wenn unphysikalische Hilfsgrößen - in unserem Fall die partikuläre Lösung $\vec{A}_p(\vec{x})$ - divergieren ist das solange kein Problem, wie diese Divergenz in einer anderen Hilfsgröße - in unserem Fall der homogenen Lösung $\vec{A}_h(r)$ - absorbiert werden kann. Dieses Vorgehen nennt man Regularisierung und es ist besonders in der quantisierten Version der Elektrodynamik - der Quantenelektrodynamik - von zentraler Wichtigkeit.

Zum Abschluss dieser Rechnung noch eine kleine technische Bemerkung. Vielleicht ist es Ihnen aufgefallen, dass im Endresultat für $\vec{A}(\vec{x})$ der Logarithmus einer dimensionsbehafteten Größe $\ln r$ erscheint. Dies wurde in der Herleitung dadurch verursacht, dass wir im homogenen Potential ebenfalls den Logarithmus einer dimensionsbehafteten Größe, nämlich $\ln(2T)$, angesetzt hatten. Wir können dies jederzeit dadurch korrigieren, dass wir anstatt $\ln(2T)$ ein $\ln(2T/T_0)$ verwenden, wobei T_0 eine beliebige Konstante der selben Dimension wie T ist. Unser Endresultat würde dann lauten

$$\vec{A}(r) = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{T_0}$$

womit das Argument des Logarithmus wieder dimensionslos ist. Freilich ändert sich dadurch das Magnetfeld nicht, denn die Lösung kann ihrerseits nun wieder als

$$\vec{A}(r) = -\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \underbrace{\vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln T_0}_{\text{konstant}}$$

geschrieben werden. Der zweite Term auf der rechten Seite ist eine Konstante, deren Ableitung verschwindet, auch wenn sie den Logarithmus einer dimensionsbehafteten Größe enthält.

3.4 Energiedichte des magnetostatischen Feldes

Wir wollen nun in Analogie zum elektrostatischen Fall die Energie einer magnetostatischen Feldkonfiguration berechnen. Dazu beginnen wir mit der Lorentz-Kraft

$$\frac{d\vec{F}(\vec{x})}{dV} = \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

einer Stromdichte \vec{j} in einem äußeren Magnetfeld \vec{B} . Wir definieren die Kraftdichte

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$$

und schreiben diese Beziehung als

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

oder, in Komponenten,

$$f_i = \varepsilon_{ijk} j_j B_k$$

Wird das Magnetfeld \vec{B} von der Stromdichte \vec{j} selbst erzeugt, so gilt $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$, womit die Kraftdichte als

$$\begin{aligned} f_i &= \varepsilon_{ijk} j_j B_k \\ &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm}}_{\delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{km}} B_k \partial_l B_m \\ &= \frac{1}{\mu_0} (B_k \partial_k B_i - B_k \partial_i B_k) \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \partial_i B_k B_k + \frac{1}{\mu_0} \partial_k B_k B_i \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Integrieren wir diesen Ausdruck nun über den gesamten Raum und sehen uns dabei zunächst den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung an

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \partial_k B_k(\vec{x}) B_i(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{B}(\vec{x}) B_i(\vec{x})) \\ &= \oint_{\partial\mathbb{R}^3} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{x}) B_i(\vec{x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Um auf die zweite Zeile zu kommen, haben wir den Satz von Gauß verwendet. Das Magnetfeld einer endlich ausgedehnten Konfiguration von Strömen verschwindet im Unendlichen und damit verschwindet auch das gesamte Integral. Die integrierte Kraftdichte können wir somit schreiben als

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{f}(\vec{x}) = -\frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^2(\vec{x})$$

Wir sehen nun, dass der Integrand auf der rechten Seite ein Gradient ist und daher der Integrand auf der linken Seite, also die Kraftdichte \vec{f} , ebenfalls als Gradient geschrieben werden kann. Das Objekt, dessen negativer Gradient eine Kraftdichte \vec{f} ist, ist selbst natürlich eine Energiedichte u , also

$$\vec{f}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} u(\vec{x})$$

womit wir die Energiedichte eines statischen Magnetfeldes ablesen können als

$$\boxed{u(\vec{x}) = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{x})}$$

Natürlich gilt für diese magnetostatische Energiedichte dieselbe Einschränkung wie für die elektrostatische Energiedichte, nämlich dass wir sie nicht lokalisieren können. Wir können nur die Gesamtenergie einer Konfiguration von statischen Strömen berechnen, nicht aber die zeitliche Veränderung einer Energiedichte, denn dies würde über die magnetostatische Näherung hinausgehen. Interessant ist auch der Ursprung des Faktors $\frac{1}{2}$, der hier aus der Anwendung der Produktregel folgte. Anders als im Fall der elektrostatischen Energie haben wir unsere Konfiguration nicht anschaulich aus endlichen Kreisströmen - den magnetostatischen Äquivalenten von Punktladungen - aufgebaut, sondern direkt aus der Stromdichte und dem dazugehörigen Feld. Ein ähnlicher Ansatz ist tatsächlich auch für die Elektrostatik möglich, wenn man dort mit der „Coulomb-Kraftdichte“ $\vec{j}_c = \rho \vec{E}$ beginnt.

Wir können die magnetostatische Energie noch in einer anderen Form schreiben, die ebenfalls nützlich sein kann. Dazu erinnern wir uns zunächst, dass das Magnetfeld als Rotation des Vektorpotentials $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ geschrieben werden kann und somit

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \varepsilon_{ijk} B_i \partial_j A_k \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \varepsilon_{ijk} \partial_j B_i A_k - \frac{1}{2\mu_0} \varepsilon_{ijk} (\partial_j B_i) A_k \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Um die Gesamtenergie zu finden integrieren wir die Energiedichte wieder über den gesamten Raum mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x u(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{A} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{A} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\partial\mathbb{R}^3} d\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Der zweite Term in der letzten Zeile ist wieder ein Oberflächenintegral über den Rand des Raumes, wo das Magnetfeld verschwindet. Dieser Term verschwindet daher ebenfalls und wir erhalten

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{A} \cdot \vec{j}$$

für die Gesamtenergie des Systems.

3.5 Magnetische Multipolentwicklung

Da die Grundgleichung für das Vektorpotential in jeder Komponente eine Poissongleichung ist, können wir in jeder Komponente eine Multipolentwicklung in völliger Analogie zum elektrostatischen Potential durchführen. Wir betrachten wieder eine Region $r' < R$ um den Ursprung, in der die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}')$ nicht verschwindet und einen Punkt $r > R$, an dem wir das Vektorpotential bestimmen wollen. Neu im Vergleich zur Elektrostatik ist zusätzlich, dass zwischen den drei Komponenten der Stromdichte ein Zusammenhang besteht, nämlich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Um zu sehen, wie diese Beziehung unsere Lösungen einschränkt, betrachten wir zunächst das Integral

$$\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{x}) f(\vec{x})$$

über die Stromdichte auf der Kugeloberfläche $r = R$, innerhalb derer die Stromdichte beschränkt ist, mit einer beliebigen Funktion $f(x)$. Da die Stromdichte am Rand verschwindet, wissen wir, dass das Integral verschwinden muss. Wir können nun den Satz von Gauß anwenden und das Oberflächen- in ein Volumenintegral umformen

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}(\vec{x}) f(\vec{x})) \\ &= \int_V d^3x \left(f(\vec{x}) \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x})}_0 + \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right) \\ &= \int_V d^3x \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Wir können nun für $f(\vec{x})$ nacheinander $f(\vec{x}) = x$, $f(\vec{x}) = y$ und $f(\vec{x}) = z$ wählen und erhalten damit

$$\int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}') = 0$$

Betrachten wir nun den führenden Term in der elektrostatischen Multipolentwicklung

$$q = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}')$$

Der entsprechende Term in der magnetostatischen Entwicklung ist

$$\vec{q}^m = \int_V d^3x' \vec{j}(\vec{x}')$$

von dem wir eben gesehen haben, dass er verschwinden muss. Das Fehlen eines Monopolterms folgt also direkt aus den Grundannahmen der Magnetostatik und muss nicht zusätzlich postuliert werden.

3.5.1 Der Dipolterm

Betrachten wir als nächstes den Dipolterm in der Entwicklung in kartesischen Koordinaten. Im elektrostatischen Fall hatten wir

$$p_i = \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') x'_i$$

mit dem entsprechenden Dipolpotential

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x}_i}{r^2} p_i$$

Das magnetostatische Äquivalent dieser Ausdrücke ist der magnetische Dipolterm

$$p_{ji}^m = \int_V d^3x' \vec{j}_j(\vec{x}') x'_i$$

und das Vektorpotential

$$A_j^D(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{x}_i}{r^2} p_{ji}^m$$

Der Dipolterm p^m ist also zunächst ein Tensor (mit den beiden Indizes i und j). Wir müssen allerdings die Einschränkung

$$\int_V d^3x \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) = 0$$

beachten, die ja für beliebige Funktionen $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ gilt. Für den Monopolterm waren die drei Funktionen x , y und z -also jeweils die Koordinaten zur ersten Potenz - relevant, die alle drei Komponenten des Monopolterms verschwinden ließen. Für den Dipolterm sind alle Kombinationen der Koordinaten zur zweiten Potenz relevant und davon gibt es insgesamt 6, nämlich x^2 , y^2 , z^2 , xy , xz und yz . Durch den Differentialoperator verschwindet jeweils eine Koordinate und für ein allgemeines $x_i x_j$ erhalten wir daraus Einschränkungen der Form

$$\int_V d^3x (j_i(\vec{x}) \cdot x_j + j_j(\vec{x}) \cdot x_i) = 0$$

oder

$$p_{ij}^m + p_{ji}^m = 0$$

oder, mit anderen Worten, alle 6 symmetrischen Komponenten des Tensors müssen verschwinden und es bleiben nur die 3 antisymmetrischen Komponenten erhalten. Wie man leicht sehen kann, setzt sich dieses Muster - das Verschwinden aller symmetrischen Komponenten - für höhere Multipolmomente fort, wenn für $f(\vec{x})$ alle Kombinationen der Koordinaten bis zur jeweiligen Potenz verwendet werden. Wir begnügen uns hier aber mit dem Dipolterm, der ja in der Magnetostatik die führende Ordnung darstellt. Da alle symmetrischen Komponenten des Dipolmoments verschwinden, können wir die verbleibenden 3 antisymmetrischen Komponenten zusammenfassen als

$$p_{ji}^m = \varepsilon_{ijk} m_k$$

mit der Umkehrung

$$\varepsilon_{lji} p_{ji}^m = \varepsilon_{lji} \varepsilon_{ijk} m_k = -2 m_l$$

oder

$$m_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{lij} p_{ji}^m = \frac{1}{2} \int_V d^3x' \varepsilon_{lij} j_j(\vec{x}') x'_i$$

Das Vektorpotential eines Dipols ist damit

$$A_j^D(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{x}_i}{r^2} p_{ji}^m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{x}_i}{r^2} \varepsilon_{ijk} m_k$$

In Vektornotation lauten diese Beziehungen

$$\boxed{\vec{A}^D(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\hat{x}}{r^2} \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3x' \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')} }$$

3.5.2 Eigenschaften eines magnetischen Dipols

Betrachten wir nun, wie sich ein magnetischer Dipol in einem äußeren Magnetfeld verhält. Dazu beginnen wir mit der Lorentz-Kraft

$$F_i = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j_j(\vec{x}) B_k(\vec{x})$$

wobei das Magnetfeld \vec{B} diesmal nicht mit der Stromdichte zusammenhängt, da es extern gegeben ist. Wir stellen uns nun vor, dass der magnetische Dipol, dessen Stromdichte durch $\vec{j}(\vec{x})$ gegeben ist, sich nahe des Ursprungs befindet. Wir können daher das Magnetfeld um den Ursprung in eine Taylorreihe entwickeln

$$B_k(\vec{x}) = B_k(0) + x_l \partial_l B_k(0) + \dots$$

Wir vernachlässigen höhere Ordnungen und setzen in die Lorentz-Kraft ein, wodurch wir

$$\begin{aligned} F_i &= \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j_j(\vec{x}) (B_k(0) + x_l \partial_l B_k(0)) \\ &= \varepsilon_{ijk} B_k(0) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j_j(\vec{x}) + \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j_j(\vec{x}) x_l \partial_l B_k(0) \end{aligned}$$

erhalten. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, verschwindet das Integral über eine stationäre Stromdichte und somit der erste Term in der zweiten Zeile. Für den zweiten Term verwenden wir die Beziehung

$$\int_V d^3x (j_i(\vec{x}) \cdot x_j + j_j(\vec{x}) \cdot x_i) = 0$$

die wir ebenfalls im letzten Abschnitt hergeleitet haben. Diese erlaubt uns, $j_j(\vec{x}) x_l$ im Integranden durch die antisymmetrisierte Form $(j_j(\vec{x}) x_l - j_l(\vec{x}) x_j) / 2$ zu ersetzen sodass

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (j_j(\vec{x}) x_l - j_l(\vec{x}) x_j) \partial_l B_k(0) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \underbrace{(\delta_{jm} \delta_{ln} - \delta_{jn} \delta_{lm})}_{\varepsilon_{pjl} \varepsilon_{pmn}} j_m(\vec{x}) x_n \partial_l B_k(0) \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pjl} \frac{1}{2} \varepsilon_{pmn} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x j_m(\vec{x}) x_n}_{-m_p} \partial_l B_k(0) \\ &= \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jpl}}_{\delta_{il} \delta_{kp} - \delta_{ip} \delta_{kl}} m_p \partial_l B_k(0) \\ &= m_k \partial_i B_k(0) - m_i \partial_k B_k(0) \end{aligned}$$

Der zweite Term in der letzten Zeile verschwindet, da das Magnetfeld divergenzfrei ist. Insgesamt bleibt also für die Kraft auf einen magnetischen Dipol \vec{m} von konstanter Größe durch ein Magnetfeld \vec{B} in niedrigster Ordnung

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Wir sehen, dass die Kraft durch einen Gradienten beschrieben wird und können daher aus der allgemeinen Beziehung

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W$$

zwischen Kraft \vec{F} und potentieller Energie W die potentielle Energie

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

identifizieren, die ein Dipol in einem Magnetfeld besitzt.

3.6 Magnetfeld in Materie

Wir wollen nun, wie wir es für das elektrische Feld schon getan haben, ein einfaches phänomenologisches Modell dafür entwickeln, wie sich Magnetfelder in Materie verhalten. Zunächst sehen wir, dass es kein direktes magnetisches Analogon zu einem elektrischen Leiter gibt. Da keine magnetischen Ladungen existieren, kann ein Magnetfeld auch nicht durch Oberflächenladungen verursacht werden. Es können allerdings in Materie Kreisströme vorhanden sein, die ein elektrisches Dipolmoment besitzen. Diese Dipole richten sich dann beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes aus sodass ein Medium, in Analogie zur elektrostatischen Polarisierung, auch magnetostatisch polarisierbar sein kann.

3.6.1 Das makroskopische Magnetfeld

In Analogie zur Elektrostatik konstruieren wir zunächst ein makroskopisches Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{B}_m(\vec{x} + \vec{x}')$$

durch Mittelung des mikroskopischen Magnetfeldes \vec{B}_m über ein Volumen V . Aus den Grundgleichungen, die für das mikroskopische Magnetfeld gelten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_m(\vec{x} + \vec{x}') \\ &= 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{\nabla} \times \vec{B}_m(\vec{x} + \vec{x}') \\ &= \frac{1}{V} \int_V d^3x' \mu_0 \vec{j}_m(\vec{x} + \vec{x}') \\ &= \mu_0 \vec{j}_{\text{tot}}(\vec{x}) \end{aligned}$$

wobei

$$\vec{j}_{\text{tot}}(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{j}_m(\vec{x} + \vec{x}')$$

wiederum die gesamte Stromdichte ist, die sich aus der freien Stromdichte \vec{j} sowie der für die magnetische Polarisation verantwortlichen Stromdichte \vec{j}_{mag} zusammensetzt

$$\vec{j}_{\text{tot}}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) + \vec{j}_{\text{mag}}(\vec{x})$$

Da auch das gemittelte Magnetfeld \vec{B} divergenzfrei ist, lässt es sich durch ein Vektorpotential \vec{A} darstellen, sodass

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Setzen wir das gemittelte Vektorpotential an als

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{A}_m(\vec{x} + \vec{x}')$$

so sehen wir, dass es tatsächlich das korrekte gemittelte Magnetfeld wiedergibt

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{\nabla} \times \vec{A}_m(\vec{x} + \vec{x}') = \frac{1}{V} \int_V d^3x' \vec{B}(\vec{x} + \vec{x}') = \vec{B}(\vec{x})$$

3.6.2 Magnetische Polarisation in Medien

Teilen wir nun das Vektorpotential in einen freien Teil und einen Teil, der von der magnetischen Polarisation des Mediums herrührt

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{\text{freie Stromdichte}} + \underbrace{\frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{\text{induz. Dipole}} d^3x'$$

wobei

$$\vec{M}(\vec{x}') = \frac{d\vec{m}(\vec{x}')}{dV} = \frac{1}{2} \vec{x}' \times \vec{j}_{\text{mag}}(\vec{x}')$$

die magnetische Dipoldichte oder Polarisation des polarisierbaren Mediums darstellt. Der Polarisationsterm kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \vec{A}^{\text{mag}}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{M}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \end{aligned}$$

oder, in Komponenten

$$\begin{aligned} A_i^{\text{mag}}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_{ijk} M_j(\vec{x}') \partial'_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_{ijk} \partial'_k M_j(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_{ijk} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \partial'_k M_j(\vec{x}') d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\mathbb{R}^3} \varepsilon_{ijk} M_j(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dA_k + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \varepsilon_{ikj} \partial'_k M_j(\vec{x}') d^3x' \end{aligned}$$

Der erste Term in der rechten Zeile, den wir mithilfe des Gauß'schen Satzes erhalten haben, verschwindet, da $M_j(\vec{x}') = 0$ für \vec{x}' außerhalb des polarisierbaren Mediums, das wir uns wieder als begrenzt auf ein endliches Volumen vorstellen. Wir haben daher, in Vektornotation

$$\vec{A}^{\text{mag}}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}') d^3x'$$

und somit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \underbrace{(\vec{j}(\vec{x}') + \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}'))}_{\vec{j}_{\text{tot}}(\vec{x}')} d^3x'$$

Daraus können wir nun ablesen, dass die Stromdichte, die für die magnetische Polarisation des Mediums verantwortlich ist

$$\vec{j}_{\text{mag}} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Die Grundgleichung des Magnetfeldes wird somit zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{\text{mag}}) = \mu_0(\vec{j} + \vec{\nabla} \times \vec{M})$$

was wir auch schreiben können als

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{j}$$

Wir definieren das Argument der Rotation in dieser Gleichung als die magnetische Feldstärke

$$\boxed{\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}}$$

womit sich die Grundgleichung für das Magnetfeld in Materie zu

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}}$$

vereinfacht. Analog zum elektrostatischen Fall spezialisieren wir uns nun auf die Betrachtung des einfachsten Falles, in dem die magnetische Polarisation \vec{M} proportional zur magnetischen Feldstärke \vec{H} (und somit auch zur Flussdichte \vec{B}) ist

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Die Proportionalitätskonstante χ_m heißt magnetische Suszeptibilität. Wir haben somit die Beziehung

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H}$$

Der Proportionalitätsfaktor

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

heißt magnetische Permeabilität und ist eine Materialkonstante. Es ist üblich, anstatt der Permeabilität die relative Permeabilität

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

anzugeben. Wie im Falle der Elektrostatik in polarisierbaren Medien können wir auch hier alle Resultate der Magnetostatik im Vakuum auf ein Medium mit konstantem μ einfach dadurch übertragen, dass wir in allen Resultaten μ_0 durch μ ersetzen.

3.6.3 Magnetische Eigenschaften verschiedener Materialien

Die Polarisierbarkeit von Materialien kann sehr verschieden sein. Beginnen wir zunächst mit Materialien, die in der Elektrostatik den einfachsten Fall darstellten: ideale Leiter. Schiebt man einen idealen Leiter in eine Raumregion, in der ein Magnetfeld herrscht, so werden durch die Lorentzkraft Ströme induziert, die, wenn der Leiter wirklich ideal ist, nie dissipieren können und auch dann permanent weiterfließen, wenn der Leiter zum Stillstand kommt. Ähnlich wie im elektrostatischen Fall können wir auch hier argumentieren, dass sich die Stromdichte solange ändert, bis sich im Inneren des Leiters kein Magnetfeld mehr befindet (genauer gesagt, bis die magnetische Flussdichte \vec{B} im Inneren verschwindet) und damit keine neuen Ströme mehr hervorgerufen werden können. Eine solche Situation wird in unserem Formalismus ausgedrückt durch die Beziehung

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = 0$$

woraus folgt dass $\mu = \mu_r = 0$ oder $\chi_m = -1$. Diese Situation, die analog der eines elektrischen Leiters in der Elektrostatik oder eines idealen Dielektrikums ist, wird auch ideales Diamagnetikum genannt. Man beachte, dass wir in der Magnetostatik die Proportionalitätskonstante χ_m zwischen Polarisation \vec{M} und magnetischer Feldstärke \vec{H} und nicht zwischen Polarisation \vec{M} und magnetischer Flussdichte \vec{B} definiert haben. Aus diesem Grund erreichen wir den idealen Diamagneten bei $\chi_m = -1$ im Gegensatz zur Elektrostatik, wo das ideale Dielektrikum den Grenzfall $\chi_e \rightarrow \infty$ darstellt.

In der theoretischen Betrachtung des idealen Leiters gibt es also sehr starke Parallelen zwischen Elektrostatik und Magnetostatik. Die praktische Anwendbarkeit der Resultate ist allerdings sehr verschieden. In der Elektrostatik waren Metalle eine sehr gute Näherung an einen idealen Leiter - in der Magnetostatik sind sie das gar nicht. Der Grund dafür ist relativ klar: in der Magnetostatik verlangen wir von einem idealen Leiter, dass er Ströme nicht dissipiert, was in gewöhnlichen Metallen verletzt wird (man denke nur an Wirbelstrombremsen oder Induktionsherde!). Nur in Supraleitern fließen einmal induzierte Ströme tatsächlich immer weiter und in der Tat sind Typ-I Supraleiter (unterhalb eines kritischen Betrags des angelegten Magnetfelds) ideale Diamagneten, in deren Inneren das Magnetfeld verschwindet.

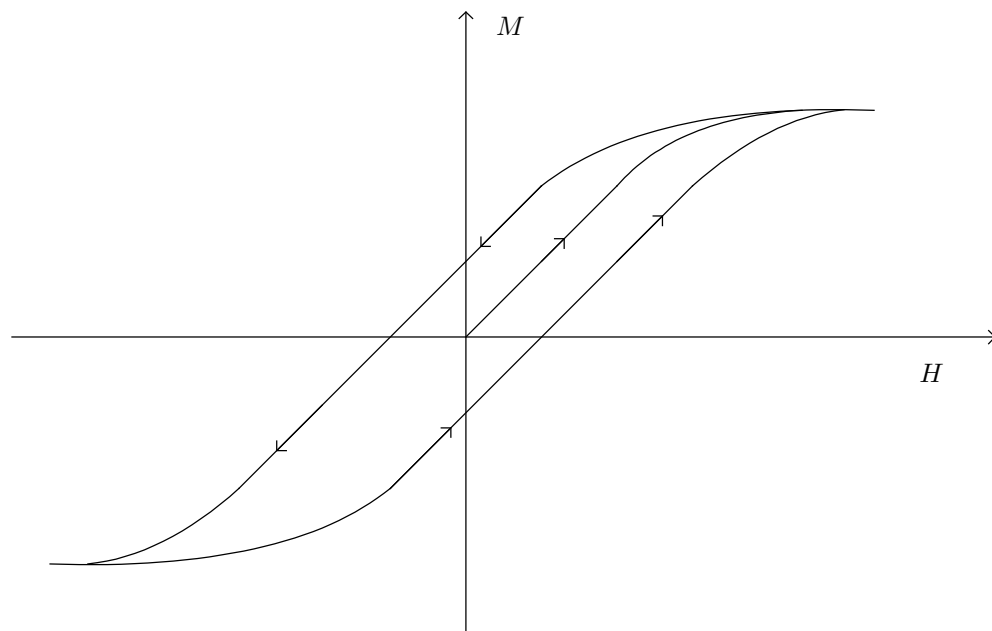
Materialien, die die magnetische Flussdichte in ihrem Inneren abschwächen, werden allgemein Diamagnete genannt. Sie sind charakterisiert durch $\mu_r < 1$ oder $\chi_m < 0$.

Beinhaltet ein Medium permanente Dipole, die durch ein angelegtes Magnetfeld ausgerichtet werden und dadurch das angelegte Magnetfeld verstärken, so spricht man von einem Paramagneten. Für Paramagnete ist $\chi_m > 0$ und $\mu_r > 1$. Typischerweise ist die relative Permeabilität bei hohen Temperaturen für Paramagnete geringer, da die thermischen Fluktuationen der Ausrichtung entgegenwirken. Bei einer fixen Temperatur hat ein Paramagnet jedoch näherungsweise ein konstantes μ_r .

Im Gegensatz dazu stehen die Ferromagnete, die unterhalb einer kritischen Temperatur T_c , die auch als Curie-Temperatur bezeichnet wird, eine permanente Magnetisierung \vec{M} selbst dann beibehalten, wenn das angelegte äußere Magnetfeld wieder entfernt wird. Für Ferromagnete ist die Beziehung $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ daher nicht in dieser Form gültig, es ist aber üblich die lokale Proportionalität

$$d\vec{M} = \chi_m(|\vec{H}|)d\vec{H}$$

zu verwenden, die eine effektive Suszeptibilität liefert, die von der Magnetisierungsgeschichte des Ferromagneten abhängt. Typisch für Ferromagneten sind Hysteresen:



Sie beschreiben den Verlauf der Magnetisierung in Abhängigkeit vom angelegten magnetischen Feld.

3.6.4 Randbedingungen

In völliger Analogie zur Elektrostatik können wir nun die Randbedingungen für Magnetfelder am Übergang zweier Materialien mit verschiedenen Permeabilitätskonstanten μ_1 und μ_2 formulieren. Wir können den Satz von Gauß verwenden, um aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ zu folgern, dass die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte konstant bleibt

$$B_{\perp}^1 = B_{\perp}^2$$

Unter der Annahme, dass an der Grenzfläche die freie Stromdichte \vec{j} endlich bleibt, können wir weiter aus $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$ folgern, dass die Parallelkomponente der magnetischen Feldstärke konstant bleibt

$$H_{\parallel}^1 = H_{\parallel}^2$$

Diese Beziehungen können in völliger Analogie zum elektrostatischen Fall hergeleitet werden, den wir in Abschnitt 2.9.4 behandelt haben.

4 Elektrodynamik

Bisher haben wir uns in dieser Vorlesung ausschließlich mit statischen, also zeitunabhängigen Phänomenen beschäftigt. Die Elektrostatik hatten wir zunächst in Anlehnung an die Newton'sche Gravitationstheorie als eine Theorie mit Fernwirkung beschrieben. Diese Beschreibung war selbstkonsistent und auch kompatibel mit der Newton'schen Mechanik, in der das Coulomb-Gesetz der Elektrostatik eine weitere Kraft darstellt. In der Magnetostatik hatten wir aber von Anfang an gesehen, dass absolute Bewegungszustände eine Rolle spielen. Die Lorentz-Kraft ist abhängig von der Stromdichte oder der Geschwindigkeit der Ladungsträger, wenn wir uns diese als geladene Massenpunkte vorstellen. Dieses Konzept scheint zunächst vollkommen inkompatibel zu sein mit der Newton'schen Mechanik, in der es keine absoluten sondern nur Relativgeschwindigkeiten gibt. Wir haben uns in der Magnetostatik um dieses Problem herumgeschwindelt, da wir Bewegungszustände einzelner Ladungsträger nicht betrachten konnten - sie bilden ja keinen erhaltenen Strom. Nun aber wollen wir genau auf diesen Punkt zurückkommen und fragen uns zunächst: Wie ist die Wirkung eines Magnetfeldes auf einen bewegten Ladungsträger in verschiedenen Bezugssystemen?

4.1 Magnetische Induktion

Betrachten wir also einen Ladungsträger q , der mit einer Geschwindigkeit \vec{v} ein Magnetfeld \vec{B} durchquert. Auf ihn wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Begeben wir uns nun in das Bezugssystem, das sich mit der Ladung bewegt, in dem die Ladung also eine Geschwindigkeit $\vec{v}' = 0$ besitzt. In diesem Bezugssystem gibt es keine Lorentz-Kraft, doch das Vorhandensein einer Kraft kann nicht vom gewählten Bezugssystem abhängen! Wir folgern daraus, dass es in dem Bezugssystem, das sich mit der Ladung bewegt, eine andere Kraft geben muss, die gleich groß ist, wie es die Lorentz-Kraft im ursprünglichen Bezugssystem war - doch was ist diese Kraft? Es muss eine Kraft sein, die auf unbewegte Ladungen wirkt und zu diesen proportional ist. Wir wissen schon, dass sich eine solche Kraft durch ein elektrisches Feld

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

ausdrücken lässt und folgern daher, dass ein Beobachter, der sich relativ zu einem Magnetfeld \vec{B} mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt ein elektrisches Feld

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

beobachtet. Diese Beziehung ist die Grundlage des Hall-Effektes, doch wir wollen allgemeiner ergründen, welche Konsequenzen diese Beobachtung für die Grundgleichungen des elektrischen Feldes hat. Die erste Frage die wir uns stellen ist: Hat das elektrische Feld neue Quellen bekommen? Wir können das ganz einfach nachprüfen indem wir die Divergenz berechnen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \frac{dx_j}{dt} B_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{d\delta_{ij}}{dt} B_k - \frac{dx_j}{dt} \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \\ &= -\vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ &= -\mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

In der Tat erhalten wir durch diese Transformation also eine zusätzliche Ladungsdichte, die wir als

$$\rho_L = -\varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j}$$

ausdrücken können. Aus der Ladungsdichte ρ in einem unbewegten Bezugssystem wird also in einem sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} dazu bewegenden Bezugssystem die Ladungsdichte

$$\rho' = \rho - \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j}$$

Dies ist ein auf den ersten Blick äußerst seltsam anmutender Zusammenhang - wie kann die Ladungsdichte vom Bewegungszustand des Beobachters abhängen? In der Tat ist das der erste Hinweis darauf, dass räumliche Ausdehnungen - hier die des Volumenelements dV in der Definition der Ladungsdichte $\rho = dq/dV$ - vom Bewegungszustand des Beobachters abhängen. Wir sehen hier die führende Ordnung eines relativistischen Effekts, den wir an dieser Stelle noch nicht vollständig einordnen können. Wir werden daher an dieser Stelle hier nicht weitergehen und erst wieder auf diese Transformation zurückkommen, wenn wir die vollständigen Bewegungsgleichungen des elektrischen und magnetischen Feldes hergeleitet haben werden. Für die weitere Entwicklung in diesem Kapitel nehmen wir einfach an, dass wir jeweils die im verwendeten Bezugssystem korrekte Ladungsdichte ρ benutzen - in Analogie zur korrekten Stromdichte \vec{j} , die ja ebenfalls vom verwendeten Bezugssystem abhängt.

Überprüfen wir noch, ob das elektrische Feld weiterhin rotationsfrei ist. Wir haben

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

was in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k &= \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \partial_j \frac{dx_l}{dt} B_m \\ &= \partial_j \frac{dx_i}{dt} B_j - \partial_j \frac{dx_j}{dt} B_i \\ &= \underbrace{\frac{d\delta_{ij}}{dt}}_0 B_j + \frac{dx_i}{dt} \underbrace{\partial_j B_j}_0 - \underbrace{\frac{d3}{dt}}_0 B_i - \frac{dx_j}{dt} \partial_j B_i \\ &= -\frac{dx_j}{dt} \partial_j B_i \\ &= -\frac{dB_i}{dt} \end{aligned}$$

entspricht. In Vektornotation ist also

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}}$$

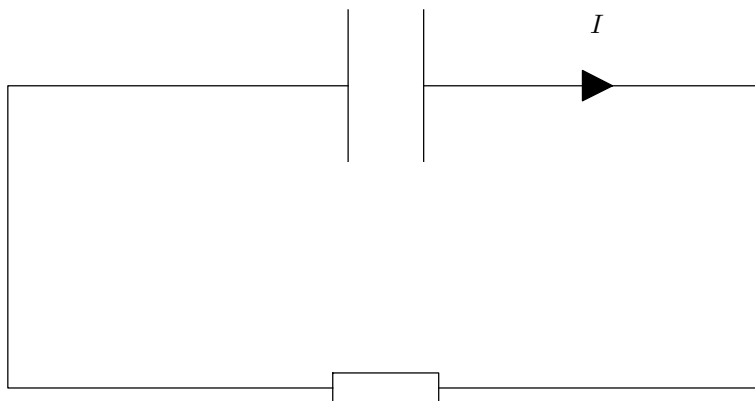
was bedeutet, dass die Rotation des elektrischen Feldes nicht mehr verschwindet, sondern durch die negative zeitliche Änderung des Magnetfeldes gegeben ist. Dieses Phänomen, das 1831 von Faraday entdeckt wurde, nennen wir magnetische Induktion und wie wir bald sehen werden, führt es zu einem noch viel klareren Widerspruch zwischen elektromagnetischen Phänomenen und den Axiomen der Newton'schen Mechanik.

4.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

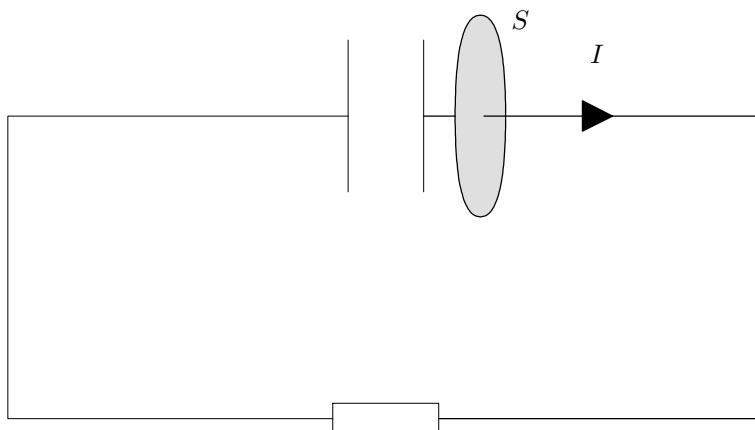
Im Jahre 1861 erkannte Maxwell, dass die Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

die wir bisher hergeleitet haben inkonsistent sind. Um dies zu sehen können wir einen einfachen Stromkreis betrachten, in dem ein Kondensator über einen Widerstand entladen wird:



Zu einem gewissen Zeitpunkt entlädt sich der Kondensator mit dem Strom I , der natürlich entlang der Leiterverbindung und des Widerstandes konstant ist. Stellen wir uns nun eine Fläche S vor, die vom Draht genau einmal durchstoßen wird



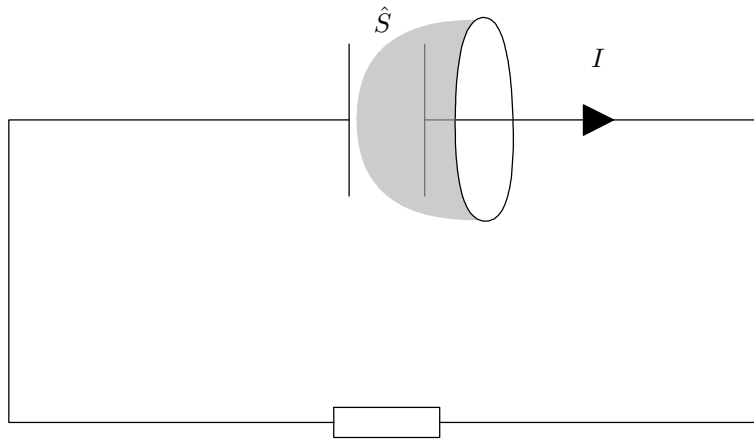
und berechnen wir das Umlaufintegral des Magnetfeldes \vec{B} entlang des Randes ∂S

$$\mathcal{B} = \oint_{\partial S} \vec{B}(x) \cdot d\vec{x}$$

Mit dem Satz von Stokes können wir dieses Integral schreiben als

$$\mathcal{B} = \oint_{\partial S} \vec{B}(x) \cdot d\vec{x} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

und wir sehen, dass es proportional zum Strom I mit der Proportionalitätskonstante μ_0 ist. Erinnern wir uns daran, dass wir für den Satz von Stokes jede beliebige Fläche \hat{S} verwenden können, die denselben Rand wie S hat $\partial \hat{S} = \partial S$. In der Magnetostatik stellte das kein Problem dar, weil die Divergenzfreiheit der Stromdichte $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0$ garantierte, dass die Summe aller Ströme an jedem beliebigen Raumpunkt immer verschwindet. Die Deformation der Integrationsfläche bei konstantem Rand konnte daher in der Magnetostatik den Stromfluss durch die Fläche nicht ändern. Im dynamischen Fall haben wir diese Einschränkung nun nicht mehr, denn Ströme können an einer Quelle beginnen und an einer Senke enden, wo sich entsprechend Ladungen ansammeln. In unserem Stromkreis sind diese Orte natürlich die Kondensatorplatten, zwischen denen kein Strom mehr fließt. Legen wir unsere Integralfläche \hat{S} also so, dass sie, anstatt den Draht zu schneiden, zwischen den Kondensatorplatten verläuft



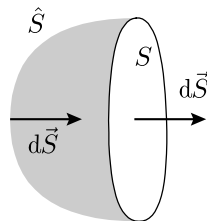
so erhalten wir als Umlaufintegral

$$\mathcal{B} = \oint_{\partial S} \vec{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{\hat{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{\hat{S}} \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{S} = 0$$

was im klaren Widerspruch zu unserem vorherigen Resultat $\mathcal{B} = \mu_0 I$ steht, das wir aus dem selben Umlaufintegral mit einer anderen Fläche S erhalten haben. Aber \mathcal{B} ist eine wohl definierte, physikalisch messbare Größe (deren Wert, wenn wir ihn messen, sehr nahe bei $\mathcal{B} = \mu_0 I$ liegt, wenn wir weit genug vom Streufeld des Kondensators entfernt sind). Um einen Widerspruch zu vermeiden muss unsere Theorie einen eindeutigen Wert für \mathcal{B} liefern, das heisst wir müssen verlangen, dass

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t)) \cdot d\vec{S} - \int_{\hat{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t)) \cdot d\vec{S} = 0$$

für beliebige Flächen S und \hat{S} , die den gleichen Rand besitzen. Beide Flächen S und \hat{S} zusammen bilden aber die Oberfläche ∂V eines Volumens V .



Ändern wir noch die Orientierung des Normalvektors $d\vec{S}$ auf \hat{S} , damit alle Normalvektoren konsistent nach innen zeigen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial V} (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t)) \cdot d\vec{S} \\ &= \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t)) d^3x \end{aligned}$$

was wir mithilfe des Gauß'schen Integralsatzes in ein Volumenintegral umgewandelt haben. Da dieses Integral für beliebige Volumen verschwinden muss, müssen wir fordern, dass

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

Wie Maxwell erkannte, liegt das Problem daher in der Grundgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$$

und zwar speziell an Punkten, an denen der Stromfluss Quellen oder Senken besitzt - in unserem Beispiel an den Kondensatorplatten. Tatsächlich ist das nicht sehr überraschend, denn wir hatten dieses Gesetz genau unter der Voraussetzung gefunden, dass es keine solchen Punkte gibt - das heißt, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = 0$. Im magnetostatischen Fall war die Rotation des Magnetfeldes also durch einen quellenfreien Strom gegeben, was die Gleichung konsistent machte. Im dynamischen Fall ist dieser Strom allerdings nicht mehr divergenzfrei, was sich in der Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) + \dot{\rho}(\vec{x}, t) = 0$$

ausdrückt und zur Inkonsistenz führt. Wir können allerdings aus der Quellengleichung des elektrischen Feldes die Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)$ ausdrücken und in die Kontinuitätsgleichung einsetzen. Wir erhalten damit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) + \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{E}}(\vec{x}, t) = 0$$

oder

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}(\vec{x}, t) + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}(\vec{x}, t)) = 0$$

womit der Strom

$$\vec{j}'(\vec{x}, t) = \vec{j}(\vec{x}, t) + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}(\vec{x}, t)$$

divergenzfrei ist. Der zweite Term in diesem neuen Strom, der sogenannte Maxwell'sche Verschiebungsstrom, verschwindet im statischen Fall. Da \vec{j}' also divergenzfrei ist und im statischen Grenzfall in $\vec{j}(\vec{x})$ übergeht, liegt es nahe, den nur im statischen Fall divergenzfremen Strom $\vec{j}(\vec{x})$ in der magnetostatischen Grundgleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})$ durch \vec{j}' zu ersetzen, also

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{j}'(\vec{x}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}}(\vec{x}, t)}$$

Mit dieser Ergänzung haben wir in der Tat ein konsistentes Gleichungssystem, das die gesamte Dynamik klassischer elektromagnetischer Felder wiedergibt und deren Kopplung an Ladungs- und Stromdichten in einem Bezugssystem beschreibt.

4.3 Die Maxwell-Gleichungen

Fassen wir nun die vollen Grundgleichungen für das elektrische und magnetische Feld zusammen, die wir kennengelernt haben

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \end{array}}$$

Dies sind die Maxwell-Gleichungen, die den Kern der klassischen Elektrodynamik bilden. Bevor wir versuchen, diese systematisch zu lösen, wollen wir zunächst einmal einen Eindruck davon gewinnen, welche Dynamik in den neu dazugekommenen Termen steckt. Wir betrachten um der Einfachheit Willen eine Konfiguration mit verschwindender Ladungs- und Stromdichte, sodass sowohl das elektrische als auch das Magnetfeld quellenfrei sind. Die erste nichttriviale Gleichung verbindet die zeitliche Ableitung des elektrischen Feldes mit der Rotation des Magnetfeldes

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Leiten wir diese Gleichung erneut nach der Zeit ab und setzen in das Resultat die zweite nichttriviale Gleichung

$$\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{E}} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die aus der Magnetostatik bekannte Vektoridentität (3) verwendet haben und in der Zeile danach die Quellenfreiheit des elektrischen Feldes $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Schreiben wir diese Gleichung noch einmal in etwas expliziterer Form

$$(\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \partial_t - \partial_i \partial_i) \vec{E} = 0$$

Wäre das relative Vorzeichen zwischen zeitlichen und räumlichen Komponenten positiv, so könnten wir einen Faktor $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ in die Definition der zeitlichen Ableitung absorbieren und hätten es wieder mit der Poisson-Gleichung zu tun. Das negative relative Vorzeichen allerdings macht aus der (elliptischen) Laplace-Gleichung unsere neue (hyperbolische) Gleichung, die völlig andere Lösungen zulässt. Versuchen wir zunächst, nur eine mögliche dieser neuen Lösungen zu finden, indem wir das Problem weiter vereinfachen. Nehmen wir z.B. an, dass unser elektrisches Feld konstant sowohl in y - als auch in z -Richtung ist. Wir erhalten dann die Gleichung

$$(\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \partial_t - \partial_x \partial_x) \vec{E} = 0$$

Um diese Gleichung zu lösen suchen wir also eine Funktion, deren zweite räumliche Ableitung (nach x) gleich ihrer zweiten zeitlichen Ableitung multipliziert mit einer Konstanten ist. Solche Funktionen sind leicht zu finden: sie können im Wesentlichen beliebig sein, nur ihre Abhängigkeit von x und t muss bis auf eine Konstante gleich sein, also

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}(x \pm ct)$$

Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$(\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \partial_t - \partial_x \partial_x) \vec{E}(x \pm ct) = (\varepsilon_0 \mu_0 c^2 - 1) \vec{E}''(x \pm ct) = 0$$

woraus wir sehen, dass $\vec{E}(x \pm ct)$ eine Lösung der Gleichung ist, wenn wir die Konstante

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

setzen. Was aber bedeutet diese Lösung nun physikalisch? Wir sehen, dass die eigentliche Form des elektrischen Feldes sich nicht ändert. Was sich allerdings ändert, ist die Position, an der diese Form auftritt. Vergleichen wir das Feld $\vec{E}(x \pm ct)$ zum Zeitpunkt t mit dem Feld $\vec{E}(x \pm c(t + dt))$ an einem infinitesimal späteren Zeitpunkt $t + dt$, so sehen wir, dass wir das letztere auch schreiben können als

$$\begin{aligned}\vec{E}(x \pm c(t + dt)) &= \vec{E}((x \pm cdt) \pm ct) \\ &= \vec{E}((x - dx) \pm ct)\end{aligned}$$

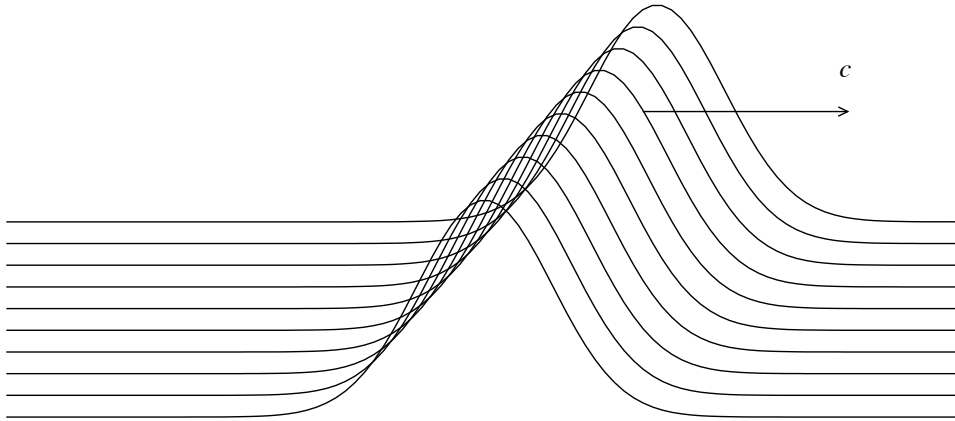
also eine Ortsverschiebung des Feldes um

$$dx = \mp cdt$$

Mit anderen Worten, das elektrische Feld bleibt in seiner Form unverändert, pflanzt sich aber mit einer Geschwindigkeit

$$v = \frac{dx}{dt} = \mp c$$

fort. Wir haben es also mit einer Welle zu tun, entsprechend heißt die Differentialgleichung auch Wellengleichung.



Der Betrag der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.854 \times 10^{-12} \text{ As/Vm} \times 4 \pi 10^{-7} \text{ Vs/Am}}} \simeq 2.998 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

was wir als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum identifizieren. Dies ist ein Resultat von ganz außerordentlicher Tragweite, das wir, die wir im 21. Jahrhundert leben wahrscheinlich nicht mehr ganz nachvollziehen können. Es gibt zumindest drei Aspekte dieses Ergebnisses, die, jedes für sich genommen, erstaunlich sind.

1. Elektromagnetische Felder können sich im Vakuum fortpflanzen, ohne dass es Ladungen oder Ströme gibt. Die Tatsache, dass ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit des Vakuums ist, legt nahe, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist.
2. Der Wert der Lichtgeschwindigkeit - einer im höchsten Maße dynamischen Größe - ist gegeben durch die elektrische Feldkonstante ε_0 und die magnetische Feldkonstante μ_0 . Diese wiederum können wir experimentell durch Messung der elektrostatischen Kraft zwischen zwei Punktladungen bzw. der magnetostatischen Kraft zwischen zwei Strömen bestimmen.
3. Da ε_0 und μ_0 jeweils Naturkonstanten sind, ist es auch c .

Die mit Abstand weitreichendsten Konsequenzen hat dabei Punkt 3. Eine konstante, vom Bezugssystem unabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle ist nicht mit der Newton'schen Mechanik, im Speziellen mit deren Invarianz unter Galilei-Transformation vereinbar. Wir hatten seit unserer Beschäftigung mit der Magnetostatik immer wieder gewisse Widersprüche mit der Newton'schen Mechanik bemerkt. Mit dem Resultat, dass die Lichtgeschwindigkeit konstant und unabhängig vom Bezugssystem ist sind wir nun endlich zum Kern dieses Widerspruchs vorgestoßen. Mehr noch: wir haben mit der Elektrodynamik eine widerspruchsfreie und experimentell bestätigte Beschreibung elektromagnetischer Phänomene gefunden, die über die an die Newton'sche Gravitationstheorie angelehnte Elektrostatik hinausgeht. Dabei haben wir ein neues Naturgesetz gefunden (die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit), mit der die Newton'sche Mechanik kompatibel gemacht werden muss, um die Natur korrekt zu beschreiben. Die Existenz einer Naturkonstante mit der Dimension Geschwindigkeit impliziert eine natürlichen Proportionalität - und damit im gewissen Sinne eine Gleichartigkeit - von räumlichen Strecken und Zeitintervallen. Wir werden die Konsequenzen davon im nächsten Kapitel erkunden; vorerst wollen wir uns aber noch ein wenig mit der allgemeinen Lösung der Maxwell-Gleichungen beschäftigen.

4.4 Dynamische Potentiale

Wenn wir die Maxwell-Gleichungen betrachten, so fällt uns auf, dass wir das skalare Potential ϕ nicht mehr wie in der Elektrostatik einführen können, da die Rotation des elektrischen Feldes nicht verschwindet. Allerdings sehen wir, dass die Divergenz des Magnetfeldes nach wie vor $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ist. Wir können diese Gleichung also weiterhin damit erfüllen, dass wir das Magnetfeld als Rotation eines Vektorpotentials darstellen

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Die beiden anderen Gleichungen, in denen das Magnetfeld erscheint, lauten damit (unter Verwendung der Identität $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{A}}$$

Die letztere wiederum kann umgeformt werden zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0$$

also ist im dynamischen Fall die Größe $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$ rotationsfrei und wir können sie wiederum als den (negativen) Gradienten eines skalaren Potentials

$$\vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} \phi$$

ausdrücken. Diese Beziehung verallgemeinert das elektrostatische Potential für den dynamischen Fall und lässt sich auch umschreiben als

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}}$$

Mit diesem Ansatz für das elektrische Feld ist auch die Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ automatisch erfüllt und uns verbleiben nur zwei Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} (-\vec{\nabla} \dot{\phi} - \ddot{\vec{A}})$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Aufgrund der Vektoridentität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ können wir die erste Gleichung umschreiben als

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j}$$

und die zweite Gleichung kann auch geschrieben werden als

$$\Delta \phi + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4.4.1 Eichsymmetrie

Erinnern wir uns nun daran, dass dasselbe Magnetfeld \vec{B} in der Magnetostatik durch verschiedene Eichpotentiale \vec{A} ausgedrückt werden kann. Auch im dynamischen Fall ist das immer noch richtig: Wenn wir zum Vektorpotential \vec{A}^0 mit $\vec{B}^0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}^0$ den Gradienten eines Skalarfeldes ψ (der Eichtransformation) addieren

$$\vec{A} = \vec{A}^0 + \vec{\nabla} \psi$$

so ändert sich das resultierende Magnetfeld nicht

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{A}^0 + \vec{\nabla} \psi) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A}^0 + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) \\ &= \vec{B}^0\end{aligned}$$

Allerdings hängt im dynamischen Fall auch das elektrische Feld vom Vektorpotential ab. Das ursprüngliche elektrische Feld $\vec{E}^0 = -\vec{\nabla} \phi^0 - \dot{\vec{A}}^0$ transformiert sich damit zu

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}} \\ &= -\vec{\nabla} \phi - (\dot{\vec{A}}^0 + \vec{\nabla} \dot{\psi}) \\ &= -\vec{\nabla} (\phi + \dot{\psi}) - \dot{\vec{A}}^0 \\ &= \vec{E}^0 - \vec{\nabla} (\phi - \phi^0 + \dot{\psi})\end{aligned}$$

Wir sehen nun, dass unter der Bedingung

$$\phi = \phi^0 - \dot{\psi}$$

das elektrische Feld ebenfalls unverändert bleibt. Wir haben daher im dynamischen Fall eine Eichsymmetrie: Die elektromagnetischen Felder bleiben unverändert unter der Transformation

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}^0(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) \quad \phi(\vec{x}, t) = \phi^0(\vec{x}, t) - \dot{\psi}(\vec{x}, t)$$

wobei $\psi(\vec{x}, t)$ eine beliebige skalare Funktion darstellt.

4.4.2 Grundgleichungen für die dynamischen Potentiale

Wir wollen nun wieder die Freiheit, die wir in der Wahl der Eichtransformation haben, dazu benutzen, um die zwei verbleibenden Gleichungen für die Potentiale

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j} \quad \Delta \phi + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

möglichst zu vereinfachen. Beginnen wir damit, dass wir wie für den statischen Fall die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ betrachten. In diesem Fall erhalten wir

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \dot{\phi} = \mu_0 \vec{j} \quad \Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Der Name Coulomb-Eichung rührt daher, dass wir in dieser Eichung auch im dynamischen Fall die Grundgleichung für das Coulomb-Potential

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

erhalten. Es gibt allerdings eine Eichbedingung, die unsere Grundgleichungen auf eine viel interessantere Art vereinfachen. Verlangen wir nämlich die Eichbedingung

$$\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

so erhalten wir

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad \frac{1}{c^2} \dot{\phi} - \Delta \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Diese Bedingung heißt Lorenz-Eichung⁴ und hebt die Symmetrie zwischen räumlichen und zeitlichen Komponenten, die wir durch eine Naturkonstante der Dimension Geschwindigkeit erwarten, noch stärker hervor. In Komponentenschreibweise haben wir

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_i \partial_i \right) \vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} \quad \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_i \partial_i \right) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

4. benannt nach dem dänischen Physiker Ludvig Lorenz (1829-1891).

was wieder die (inhomogene) Wellengleichung auf ϕ und jede Komponente von \vec{A} darstellt. Der Differentialoperator

$$\square := \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \partial_i \partial_i = \frac{1}{c^2} \partial_t \partial_t - \Delta$$

der dabei in gewissem Sinne den Laplace-Operator mit einer zeitlichen Komponente verallgemeinert, heißt d'Alembert Operator. Wie im Falle der Coulomb-Eichung in der Magnetostatik können wir auch für die Lorenz-Eichung zeigen, dass wir sie für jedes beliebige Potential fordern können, das heißt, dass wir jedes beliebige Potential durch eine Eichtransformation in die Lorenz-Eichung bringen können. Seien die ursprünglichen Potentiale $\phi^0(\vec{x}, t)$ bzw. $\vec{A}^0(\vec{x}, t)$ und die daraus gewonnenen Potentiale in Lorenz-Eichung $\phi(\vec{x}, t)$ bzw. $\vec{A}(\vec{x}, t)$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ &= \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^0 - \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^0 + \Delta \psi(\vec{x}, t) \\ &= \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^0 - \square \psi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist also erfüllt, wenn die Eichtransformation $\psi(\vec{x}, t)$ eine beliebige Lösung der d'Alembert-Gleichung

$$\square \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^0$$

ist, die immer existiert.

4.5 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Versuchen wir nun wieder die allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\square \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

zu finden. Mathematisch ist dieses Problem identisch mit der Lösung der Wellengleichungen für die Komponenten A_i , die wir daher nicht separat betrachten müssen. Wir versuchen nun möglichst analog dem elektrostatischen Fall vorzugehen. Zunächst ist es wichtig, dass das Superpositionsprinzip nach wie vor gilt - die Gleichung, die wir lösen, ist linear (in ϕ). Die allgemeine Lösung wird daher wieder von der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_p(\vec{x}, t) + \phi_h(\vec{x}, t)$$

geschrieben, wobei $\phi_p(\vec{x}, t)$ eine partikuläre Lösung ist und $\phi_h(\vec{x}, t)$ die mit den (nun auch zeitlichen) Randbedingungen kompatible Lösung der homogenen Gleichung $\square \phi = 0$.⁵ Konzentrieren wir uns auf die partikuläre Lösung und verwenden wir wieder die Methode der Green'sche Funktionen, d.h. wir schreiben die partikuläre Lösung als

$$\phi_p(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') \rho(\vec{x}', t')$$

wobei die Green'sche Funktion $G(\vec{x}, t, \vec{x}', t')$ die Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu einer (zeitlichen und räumlichen!) Punktquelle

$$\square G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$$

⁵ Hinzu kommt prinzipiell noch eine beliebige Eichtransformation, wenn wir eine Lösung in einer anderen als der Lorenz-Eichung erhalten möchten.

am Ort \vec{x}' zum Zeitpunkt t' ist. Anders als im Fall der Elektrostatik kennen wir die Green'sche Funktion aber noch nicht, sondern müssen sie erst berechnen.

4.5.1 Berechnung der Green'sche Funktion

Um die Green'sche Funktion zu berechnen, wenden wir Fourier-Transformationen an. Wir definieren die (raum-zeitliche) Fourier-Transformation einer Funktion $f(\vec{x}, t)$ als

$$\hat{f}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} f(\vec{x}, t)$$

mit der Rücktransformation

$$f(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \hat{f}(\vec{k}, \omega)$$

Die Nützlichkeit der Fourier-Transformation liegt hier vor allem darin, dass die Ableitung einer Funktion $\partial_i f(\vec{x}, t)$ geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} \partial_i f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \partial_i \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \hat{f}(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i k_i) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \hat{f}(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung eine Fourier-Transformation an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \partial_i f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i k_i) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \hat{f}(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}}}_{(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega') t}}_{2\pi \delta(\omega - \omega')} \\ &= (-i k_i) \hat{f}(\vec{k}, \omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega') (-i k_i) \hat{f}(\vec{k}, \omega) \\ &= -i k'_i \hat{f}(\vec{k}', \omega') \end{aligned}$$

In gleicher Weise ist

$$\begin{aligned} \partial_t f(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \hat{f}(\vec{k}, \omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (i\omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \hat{f}(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

und dessen Fourier-Transformation

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \partial_t f(\vec{x}, t) = i\omega' \hat{f}(\vec{k}', \omega')$$

Im Fourier-Raum wird aus einem Ableitungsoperator also eine Multiplikation mit $-ik_i$ für den Fall einer räumlichen Ableitung in der Koordinate x^i bzw. mit $i\omega$ für den Fall einer zeitlichen Ableitung. Für die zweiten Ableitungen finden wir daher

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \partial_t^2 f(\vec{x}, t) = -\omega'^2 \hat{f}(\vec{k}', \omega')$$

sowie

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega't - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \partial_i \partial_i f(\vec{x}, t) = -k'_i k'_i \hat{f}(\vec{k}', \omega')$$

und die Fourier-Transformation des d'Alembert Operators ist

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \square f(\vec{x}, t) = \left(\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{f}(\vec{k}, \omega)$$

Mit diesem Wissen können wir nun die Fourier-Transformation auf beide Seiten der Definitionsgleichung der Green'sche Funktion

$$\square G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$$

anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{G}(\vec{k}, \omega, \vec{x}', t') &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{x}')} \end{aligned}$$

Daraus können wir direkt die Fourier-Transformierte der Green'sche Funktion

$$\hat{G}(\vec{k}, \omega, \vec{x}', t') = \frac{1}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{e^{-i(\omega t' - \vec{k} \cdot \vec{x}')}}{\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

ablesen. Um hieraus die Green'sche Funktion selbst zu gewinnen, müssen wir die inverse Fourier-Transformation anwenden, also

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \hat{G}(\vec{k}, \omega, \vec{x}', t') \\ &= \frac{1}{16\pi^4 \varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\omega(t-t') - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}'))} \frac{1}{\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Wir wollen die Integrale nun schrittweise ausführen. Zunächst schreiben wir dazu das Integral über d^3k in Kugelkoordinaten, also

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3k = \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Wenn wir unsere Winkel so wählen, dass $\vec{x} - \vec{x}'$ in Richtung $\theta = 0$ zeigt, so haben wir im Integral keine φ -Abhängigkeit und $\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') = kl \cos \theta$ mit $l = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Damit ist

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \frac{1}{8\pi^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ikl \cos \theta} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Mit der Substitution $z = \cos \theta$ können wir das zweite Integral ausführen

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ikl \cos \theta} = \int_{-1}^1 dz e^{-iklz} = \frac{e^{-ikl} - e^{ikl}}{-ikl}$$

und erhalten damit

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \frac{i}{8\pi^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty dk k \frac{e^{-ikl} - e^{ikl}}{l} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

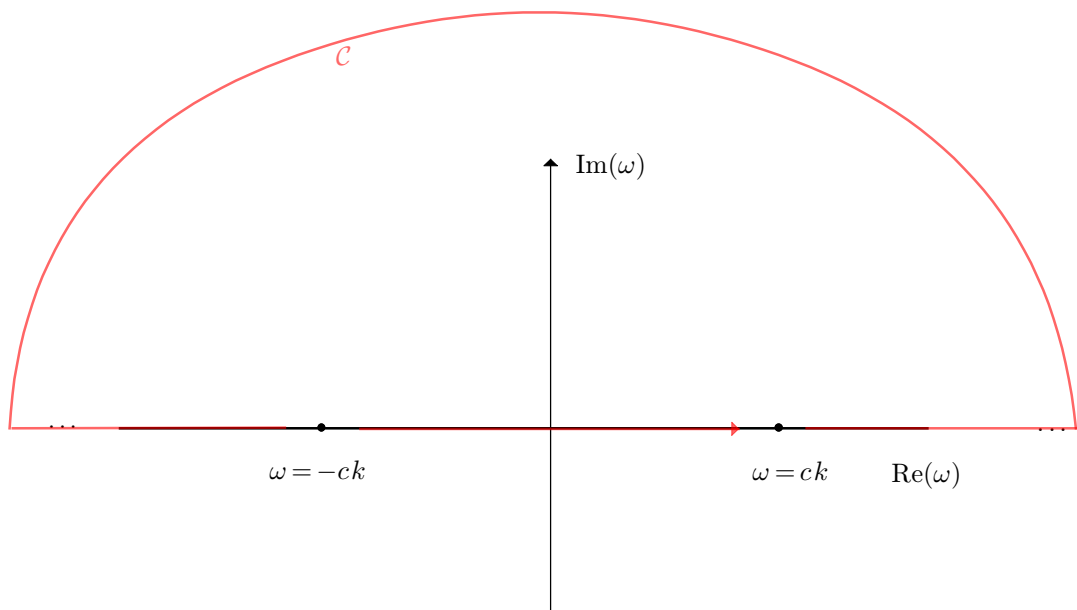
Wenden wir uns nun dem Integral über ω zu, also

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Wir werden dieses Integral durch Ergänzen der Integralkontur in der komplexen Ebene und den Residuensatz lösen. Dazu bemerken wir zunächst, dass die Exponentialfunktion $e^{i\omega(t-t')} \rightarrow 0$ verschwindet wenn der Imaginärteil $\text{Im}(\omega(t-t')) \rightarrow \infty$. Für $t > t'$, was physikalisch dem Fall entspricht, in dem der Beobachter (bei t) zeitlich nach der Quelle (beim Zeitpunkt t') liegt, bedeutet das, dass $e^{i\omega(t-t')} \rightarrow 0$ für $\text{Im}(\omega) \rightarrow \infty$, also dass wir das Integral in der oberen komplexen Halbebene schließen können, ohne das Resultat zu verändern. Wir haben also

$$t > t': \quad \mathcal{I} = \oint_{\mathcal{C}} d\omega e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

wobei \mathcal{C} folgende Kontur darstellt:



Das Integral \mathcal{I} ist daher gleich dem Residuum der Pole innerhalb der Integralkontur, das heißt in der oberen komplexen Halbebene $\text{Im}(\omega) > 0$. Wenn wir den Integranden betrachten, so hat er aber nur Pole bei

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm ck$$

das heißt genau auf der reellen Achse und somit am Rande der Integrationskontur, wie in der Abbildung oben dargestellt. Wie also gehen wir mit diesen Polen um? Im Prinzip können wir unsere Integrationskontur in der Nähe der Pole infinitesimal deformieren und damit jeden der Pole entweder in die Kontur einschließen oder aus ihr ausschließen. Schließen wir beide Pole aus, so ist $\mathcal{I} = 0$, womit die Green'sche Funktion verschwindet. Dies kann also nicht die gewünschte Lösung sein. Berechnen wir nun das Residuum jedes der Pole um zu sehen, welchen Effekt ihr Einschluss in die Integrationskontur jeweils hat. Wir schreiben den Integranden als

$$f(\omega) = e^{i\omega(t-t')} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = -e^{i\omega(t-t')} \frac{c^2}{(\omega - ck)(\omega + ck)}$$

woraus wir leicht die Residuen

$$\text{Res}(f(\omega), ck) = -e^{ick(t-t')} \frac{c}{2k} \quad \text{Res}(f(\omega), -ck) = e^{-ick(t-t')} \frac{c}{2k}$$

ablesen können. Mit der Kontur \mathcal{C} werden die eingeschlossenen Pole in mathematisch positivem Sinne umlaufen, weshalb die Beiträge zum Integral \mathcal{I} der beiden Pole durch

$$\mathcal{I}_{\pm} = 2i\pi \text{Res}(f(\omega), \pm ck) = \mp i\pi e^{\pm ick(t-t')} \frac{c}{k}$$

gegeben sind. Schließen wir beide Pole in die Integrationskontur ein, so erhalten wir für die Green'sche Funktion

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') &= \frac{i}{8\pi^3 \varepsilon_0} \int_0^{\infty} dk k \frac{e^{-ikl} - e^{ikl}}{l} (\mathcal{I}_+ + \mathcal{I}_-) \\ &= \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \int_0^{\infty} dk k \frac{(e^{-ikl} - e^{ikl})(e^{ick(t-t')} - e^{-ick(t-t')})}{k} \\ &= \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \int_0^{\infty} dk (e^{-ik(l-c(t-t'))} - e^{ik(l+c(t-t'))} - e^{-ik(l+c(t-t'))} + e^{ik(l-c(t-t'))}) \\ &= \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \underbrace{\int_0^{\infty} dk e^{-ik(l-c(t-t'))} - e^{-ik(l+c(t-t'))}}_{k \rightarrow -k} \\ &\quad + \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \int_0^{\infty} dk e^{ik(l-c(t-t'))} - e^{ik(l+c(t-t'))} \\ &= \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \int_{-\infty}^0 dk e^{ik(l-c(t-t'))} - e^{ik(l+c(t-t'))} \\ &\quad + \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \int_0^{\infty} dk e^{ik(l-c(t-t'))} - e^{ik(l+c(t-t'))} \\ &= \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \underbrace{\int_{-\infty}^0 dk e^{ik(l-c(t-t'))}}_{2\pi\delta(l-c(t-t'))} - \frac{c}{8\pi^2 \varepsilon_0 l} \underbrace{\int_0^{\infty} dk e^{ik(l+c(t-t'))}}_{2\pi\delta(l+c(t-t'))} \\ &= \frac{c}{4\pi \varepsilon_0 l} (\delta(l-c(t-t')) - \delta(l+c(t-t'))) \end{aligned}$$

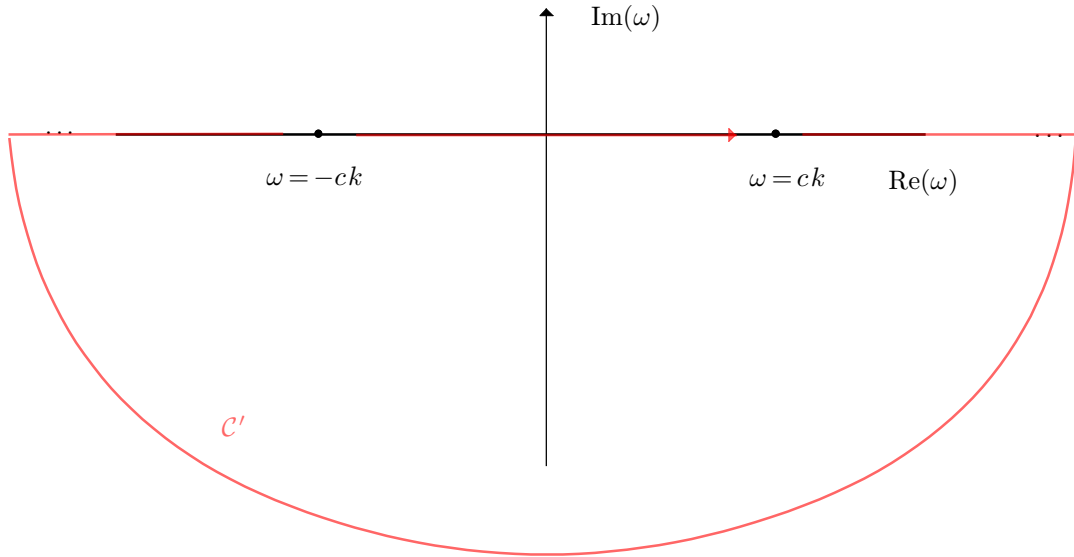
Wir verwenden hier die Beziehung $\delta(cx) = \frac{1}{c} \delta(x)$, um

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\delta\left(\frac{l}{c} - (t-t')\right) - \delta\left(\frac{l}{c} + (t-t')\right) \right)$$

zu erhalten. Nun erinnern wir uns, dass wir anfangs verlangt haben, dass $t > t'$. Damit ist $t - t' > 0$ und weil $l = |\vec{x} - \vec{x}'| > 0$, ist das Argument der zweiten δ -Funktion positiv und diese liefert somit keinen Beitrag. Die endgültige Form der Green'sche Funktion für $t > t'$ ist daher

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} - (t-t')\right) \quad t > t'$$

Was aber passiert wenn $t < t'$? In diesem Fall impliziert das Verschwinden des Integranden von \mathcal{I} , d.h. $e^{i\omega(t-t')} \rightarrow 0$ für $\text{Im}(\omega(t-t')) \rightarrow \infty$, dass $\text{Im}(\omega) \rightarrow -\infty$. Das bedeutet, dass wir die Integralkontur nach unten schließen können ohne weitere Beiträge zu erhalten.



Wieder befinden sich die Pole am Rand der Kontur und wir können die Kontur infinitesimal verformen, um beide Pole mitzunehmen. Für den Fall, dass wir die Pole gleich umlaufen wie früher beschrieben - nämlich nach unten - erhalten wir daraus

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = 0 \quad t < t'$$

Diese Green'sche Funktion hat daher nur Beiträge, bei denen $t > t'$, d.h. bei denen die „Quelle“ zeitlich früher liegt als der Beobachter. Wir nennen diese Green'sche Funktion retardierte Green'sche Funktion

$$G_r(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} - (t-t')\right) & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}$$

Obwohl die retardierte Green'sche Funktion die Lösung des Anfangswertproblems darstellt, die wir gesucht haben, beruht sie doch auf einer willkürlichen Festlegung: Wir haben die Pole nach unten hin umlaufen. Was aber passiert, wenn wir die Integrationskontur so wählen, dass die Pole nach oben hin umlaufen werden? Für den Fall $t > t'$ hatten wir schon gesehen, dass die Green'sche Funktion in dem Fall verschwindet. Bei $t < t'$ sind beide Pole im Integrationsgebiet und werden im mathematisch negativem Sinn umlaufen. Daher erhalten wir

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\delta\left(\frac{l}{c} - (t-t')\right) - \delta\left(\frac{l}{c} + (t-t')\right) \right)$$

Wir verwenden nun $t < t'$, also $t - t' < 0$, woraus folgt, dass das Argument der ersten δ -Funktion immer negativ ist und diese daher keinen Beitrag liefert. Daher haben wir für $t < t'$

$$G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} + (t-t')\right) \quad t < t'$$

Diese Green'sche Funktion, die sich von der retardierten nur durch die Wahl der Kontur um die Pole unterscheidet, nennen wir avancierte Green'sche Funktion. Sie verschwindet für Beobachterzeitpunkte t , die später als Quellzeitpunkte t' liegen, und hat nur Beiträge von $t < t'$, also aus der Zukunft des Beobachters. Wir haben also die avancierte Green'sche Funktion

$$G_a(\vec{x}, t, \vec{x}', t') = \begin{cases} 0 & t > t' \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} + (t - t')\right) & t < t' \end{cases}$$

Tatsächlich sind die retardierte und die avancierte Green'sche Funktion nur zwei Möglichkeiten, wie wir mit den Polen auf der reellen Achse umgehen. Im Prinzip können wir einen beliebigen Teil jedes der zwei Residuen entweder im oberen oder im unteren Integral mitnehmen. Solange die Summe konstant bleibt, erhalten wir wiederum Lösungen der Wellengleichung zu einer Punktquelle. In der Praxis wird sich allerdings herausstellen, dass diese Lösungen zwar mathematisch korrekt, aber für die gegebenen physikalischen Probleme unbrauchbar sind. All diesen Lösungen ist nämlich gemein, dass sie sowohl für $t > t'$ als auch für $t < t'$ nicht verschwinden, dass sie also, physikalisch gesprochen, Beiträge aus der Zukunft und der Vergangenheit beinhalten.

4.5.2 Retardierte und Avancierte Potentiale

Was bedeutet dieses Ergebnis nun physikalisch? Setzen wir zunächst die retardierte Green'sche Funktion in den Ausdruck

$$\phi_p(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{x}, t, \vec{x}', t') \rho(\vec{x}', t')$$

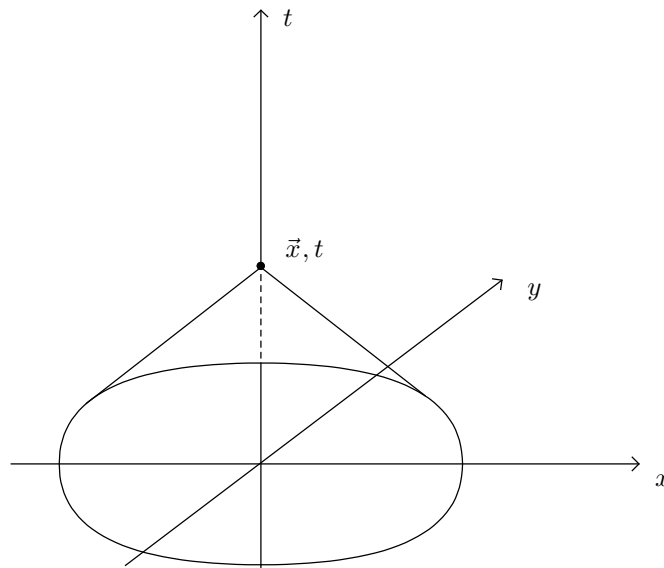
für das Potential ein, so erhalten wir

$$\phi_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\rho(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)\right)$$

Führen wir das Integral über t' aus, so ergibt sich schließlich der Ausdruck

$$\boxed{\phi_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho\left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

der dem Ausdruck in der Elektrostatik sehr ähnelt. Der einzige Unterschied ist tatsächlich, dass für das Potential zur Zeit t am Ort \vec{x} zwar ebenfalls die Ladungsdichte an allen Orten \vec{x}' entscheidend ist, jedoch nicht die Ladungsdichte zum Zeitpunkt t , sondern zu einem früheren Zeitpunkt. Um wieviel früher? Genau um $\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$, den Abstand der beiden Punkte geteilt durch die Lichtgeschwindigkeit! Das bedeutet, dass wir in der Elektrodynamik eines der großen konzeptuellen Probleme der Newton'schen Mechanik überwunden haben: Die Fernwirkung. Verändern wir die Ladungsdichte am Ort \vec{x}' , so hat das keine unmittelbaren Auswirkungen am Ort \vec{x} . Erst zu einem späteren Zeitpunkt, der durch den Abstand der beiden Punkte geteilt durch die Lichtgeschwindigkeit gegeben ist, wird der Beobachter am Ort \vec{x} es bemerken. Wir sehen hier auch, dass es viel zu kurz gegriffen ist, c nur als die Geschwindigkeit des Lichts zu begreifen. c ist eine sehr grundlegende Naturkonstante, die Entfernungen und Zeit auf eine fundamentale Weise verbindet. Für das Potential, das wir betrachten, gibt sie die Geschwindigkeit, mit der die Information, dass sich die Ladungsdichte geändert hat, weitergegeben wird. Wenn wir am Punkt \vec{x} sitzen, so ist das Potential dort bestimmt durch die Ladungsdichte aller Raum-Zeit Punkte, die im zeitlichen und räumlichen Sinne gleich weit von \vec{x}, t entfernt sind und in der Vergangenheit liegen. Wenn wir zwei der drei Raumdimensionen um die Zeit in einem Diagramm ergänzen, können wir uns die Menge dieser Punkte so vorstellen:



Diese wird daher auch als Vergangenheitslichtkegel des Punktes \vec{x}, t bezeichnet. Das Potential nennt man auch das retardierte Potential.

Was aber geschieht, wenn wir anstatt der retardierten die avancierte Green'sche Funktion verwenden? Setzen wir diese in unser Potential ein, so erhalten wir

$$\phi_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho\left(\vec{x}', t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wieder tragen nur die von \vec{x}, t zeitlich und räumlich gleich weit entfernten Punkte \vec{x}', t' zum Potential bei \vec{x}, t bei, diesmal aber sind es die in der Zukunft gelegenen Punkte, die Punkte also auf dem Vorwärtslichtkegel. Das Potential nennt man auch das avancierte Potential und obwohl es zunächst der Kausalität zu widersprechen scheint, ist es doch nur der mathematische Ausdruck davon, dass die Maxwell-Gleichungen, aus denen wir die Potentiale hergeleitet haben, invariant unter Zeitumkehr sind. Die Tatsache, dass Zeit vorwärts läuft, steckt nicht in den Maxwell-Gleichungen oder der Wellengleichung. Wir müssen sie zusätzlich mit (zeitlichen) Randbedingungen einfordern. Wählen wir Anfangsbedingungen und betrachten die zeitliche Vorwärtsentwicklung, so verwenden wir das retardierte Potential. Würden wir hingegen „Endbedingungen“ einfordern, würde die zeitliche Entwicklung also rückwärts laufen, müssten wir das avancierte Potential verwenden. Die Mathematik gibt uns hier keinen Hinweis auf die physikalische Flussrichtung der Zeit.

4.6 Energie des elektromagnetischen Feldes

In der Elektrostatik und später in der Magnetostatik hatten wir gesehen, dass sich die Energie von statischen Ladungs- bzw. Stromkonfigurationen als ein Integral über die Energiedichte von elektrischen bzw. magnetischen Feldern schreiben lässt. Fassen wir diese beiden Energiedichten im Vakuum zusammen, so erhalten wir

$$u(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2(\vec{x}) + c^2 \vec{B}^2(\vec{x}))$$

In der Elektro- und Magnetostatik hatten wir aber jeweils das Problem, dass wir nur die Gesamtenergie einer statischen Konfiguration wirklich bestimmen konnten und nicht Energiedichten. Das Problem war immer das Fehlen von Dynamik - die Aufnahme und Abgabe von Energie konnten wir im statischen Fall nicht beschreiben. Im dynamischen Fall können wir das aber. Beginnen wir daher ganz konkret damit, zu betrachten, wie elektrische bzw. Magnetfelder auf eine Ladung wirken. Genauer gesagt: welche mechanische Arbeit sie an einer Ladung verrichten. Dies ist ganz einfach zu ermitteln: Die Kraft, die auf eine Ladung q am Punkt \vec{x} zur Zeit t wirkt, ist

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t))$$

womit die Arbeit dW , die an dieser Ladung verrichtet wird

$$dW = q(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t)) \cdot d\vec{x} = q \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{x}$$

ist. Man beachte, dass die Lorentz-Kraft hier keinen Beitrag leistet, da sie normal zu $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ und daher $d\vec{x}$ ist. Die Verschiebung der Ladung $q d\vec{x}$ können wir mithilfe des Stroms

$$\vec{I} = q \frac{d\vec{x}}{dt}$$

auch ausdrücken als

$$q d\vec{x} = \vec{I} dt$$

womit

$$dW = \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \vec{I} dt$$

Verallgemeinern wir diesen Ausdruck für eine beliebige Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$ bzw. Stromdichte $\vec{j}(\vec{x}, t)$, so erhalten wir

$$dw(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) dt$$

als Dichte der an einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}, t)$ vom elektromagnetischen Feld geleisteten Arbeit. Aus der inhomogenen Maxwell-Gleichung für das Magnetfeld

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} + \dot{\vec{E}} \right)$$

können wir den Strom ausdrücken als

$$\vec{j} = \varepsilon_0 (c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}})$$

womit wir

$$\begin{aligned} dw &= \vec{E} \cdot \varepsilon_0 (c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}}) dt \\ &= -\varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} - c^2 \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}) dt \\ &= -\varepsilon_0 \left(\frac{1}{2} \partial_t \vec{E}^2 - c^2 \varepsilon_{ijk} E_i \partial_j B_k \right) dt \\ &= -\varepsilon_0 \left(\frac{1}{2} \partial_t \vec{E}^2 - c^2 \varepsilon_{ijk} (\partial_j E_i B_k - B_k \partial_j E_i) \right) dt \\ &= -\varepsilon_0 \left(\frac{1}{2} \partial_t \vec{E}^2 + c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - c^2 \vec{B} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{-\dot{\vec{B}}} \right) dt \\ &= -\partial_t \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) dt - \varepsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) dt \end{aligned}$$

erhalten. Im ersten Term der letzten Zeile erkennen wir die uns aus der Elektro-/Magnetostatik bekannte Energiedichte

$$\boxed{u(\vec{x}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2(\vec{x}, t) + c^2 \vec{B}^2(\vec{x}, t))}$$

Der zweite Term stellt einen neuen, bisher unbekanntenen Ausdruck dar. Definieren wir den Poynting-Vektor als

$$\boxed{\vec{S}(\vec{x}, t) := \varepsilon_0 c^2 \vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{B}(\vec{x}, t)}$$

so ergibt sich zwischen der Energiedichte der Materie w , der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes u und dem neu definierten Poynting-Vektor \vec{S} folgender Zusammenhang

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

Da laut Ansatz $dw/dt = \vec{j} \cdot \vec{E}$ ist, können wir diese Beziehung auch in der Form

$$\boxed{\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0}$$

schreiben, die als Poynting'scher Satz bekannt ist. Um die physikalische Bedeutung des Poynting-Vektors zu verstehen, betrachten wir den Fall $\vec{j} = 0$, also des reinen elektromagnetischen Feldes ohne Wechselwirkung mit Materie. In diesem Fall erkennen wir, dass sich der Poynting'sche Satz reduziert zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

was die Form einer Kontinuitätsgleichung hat. Da die „Ladung“ dieser Kontinuitätsgleichung u die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist, ist folglich \vec{S} eine Energiestromdichte. Damit ist explizit gezeigt, dass Energie im elektromagnetischen Feld lokalisiert und auch transportiert werden kann. Das elektrische Feld, ursprünglich eingeführt als Abstraktion, um die Kraft zwischen elektrischen Ladungen besser zu beschreiben, sowie das Magnetfeld erhalten damit endgültig den Charakter von physikalischen Größen, die auch unabhängig von ihren Quellen existieren und Effekte hervorrufen können.

4.7 Der Hertz'sche Dipol

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch eine klassische Rechnung als Beispiel betrachten, nämlich den Hertz'schen Dipol. Dazu betrachten wir ein infinitesimales, Strom führendes Element

$$\vec{j} = I \vec{e}_z \delta^3(x) \cos(\omega t)$$

Das retardierte Potential in der Lorenz-Eichung ergibt sich damit als

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 I \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)}{4\pi |\vec{x}|} \vec{e}_z$$

woraus wir das Magnetfeld bestimmen können

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \frac{\vec{e}_z}{|\vec{x}|} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c}\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + \frac{y\omega}{c}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) - \frac{x\omega}{c}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}{|\vec{x}|} \begin{pmatrix} -\frac{\omega}{c} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + \frac{\cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)}{|\vec{x}|} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat zwei Teile. Der Cosinus-Term stellt dabei ein Magnetfeld dar das, bis auf seine Retardierung, so auch in der Magnetostatik resultieren würde. Er fällt proportional zu $|\vec{x}|^{-2}$ ab und wird daher auch als Nahfeldterm bezeichnet. Der Sinus-Term hingegen ist völlig neu und nur in der Elektrodynamik enthalten. Er fällt mit $|\vec{x}|^{-1}$ und daher langsamer ab und wird daher

auch als Fernfeld bezeichnet. In weiter Entfernung vom Herz'schen Dipol ist nur er relevant und wir werden daher nur ihn weiter betrachten. Wir haben also das Fernfeld

$$\vec{B}_f(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi c} I \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}{|\vec{x}|} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$$

Aus dem Maxwell'schen Verschiebungsstrom erhalten wir nun für das zum magnetischen Fernfeld gehörende elektrische Feld

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}_f \\ &= \frac{\mu_0 \omega c}{4\pi} I \vec{\nabla} \times \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}{|\vec{x}|} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ &= \frac{\mu_0 \omega c}{4\pi} I \begin{pmatrix} \frac{\partial_x}{\partial_y} \\ \frac{\partial_y}{\partial_z} \\ \frac{\partial_z}{\partial_x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \sin\left(\omega\left(t - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c}\right)\right) \\ -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \sin\left(\omega\left(t - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c}\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\mu_0 \omega c}{4\pi} I \begin{pmatrix} 2xz|\vec{x}|^{-4} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + \frac{\omega}{c} zx|\vec{x}|^{-3} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ 2yz|\vec{x}|^{-4} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + \frac{\omega}{c} zy|\vec{x}|^{-3} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ \frac{2}{|\vec{x}|^2} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + (x^2 + y^2) \left(-\frac{\omega}{c|\vec{x}|^3} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) - \frac{2}{|\vec{x}|^4} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\mu_0 \omega c}{4\pi} I \begin{pmatrix} 2xz|\vec{x}|^{-4} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + \frac{\omega}{c} zx|\vec{x}|^{-3} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ 2yz|\vec{x}|^{-4} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + \frac{\omega}{c} zy|\vec{x}|^{-3} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \\ 2\frac{|\vec{x}|^2 - (x^2 + y^2)}{|\vec{x}|^4} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) - \omega\frac{x^2 + y^2}{c|\vec{x}|^3} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I \left(\frac{2cz}{|\vec{x}|^4} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{\omega}{|\vec{x}|^3} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I \left(\frac{2c \cos\theta}{|\vec{x}|^2} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_r + \frac{\omega}{|\vec{x}|} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\theta \sin\varphi \\ -\sin^2\theta \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I \left(\frac{2c \cos\theta}{|\vec{x}|^2} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_r + \frac{\omega}{|\vec{x}|} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \sin\theta \right) \\ &= -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I \left(\frac{2c \cos\theta}{|\vec{x}|^2} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_r + \frac{\omega}{|\vec{x}|} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_\theta \sin\theta \right) \end{aligned}$$

Die zeitliche Integration ist sehr einfach und liefert uns

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \left(-\frac{2c \cos\theta}{|\vec{x}|^2} \cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_r + \frac{\omega}{|\vec{x}|} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_\theta \sin\theta \right)$$

Wieder sehen wir, dass der $\sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$ Term langsamer in $|\vec{x}|$ abfällt und daher für große Entfernungen dominiert. Wir erhalten also ein elektrisches Fernfeld

$$\vec{E}_f = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I \frac{1}{|\vec{x}|} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_\theta \sin\theta$$

Sehen wir uns nun den Hertz'schen Dipol in einer grossen Entfernung von der Quelle an. Wir haben ein zeitlich veränderliches elektrisches und magnetisches Feld und wir können uns fragen, ob der Dipol tatsächlich Energie in Form elektromagnetischer Wellen in den Raum abstrahlt. Dazu

berechnen wir den Poynting-Vektor des Fernfeldes

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_f &= \varepsilon_0 c^2 \vec{E}_f \times \vec{B}_f \\
 &= \varepsilon_0 c^2 \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} I \frac{1}{|\vec{x}|} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \sin\theta \frac{\mu_0}{4\pi c} I \frac{1}{|\vec{x}|} \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \vec{e}_\theta \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \\
 &= \frac{\mu_0 \omega^2}{(4\pi)^2 c} I^2 \frac{1}{|\vec{x}|^2} \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\mu_0 \omega^2}{(4\pi)^2 c} I^2 \frac{1}{|\vec{x}|^2} \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \sin\theta \begin{pmatrix} \sin^2\theta \cos\varphi \\ \sin^2\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\mu_0 \omega^2}{(4\pi)^2 c} I^2 \frac{1}{|\vec{x}|^2} \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \sin^2\theta \vec{e}_r.
 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass der Energiefluss nach aussen gerichtet und in der Äquatorebene maximal ist. Gemittelt über eine Periode $T = 2\pi\omega^{-1}$ ergibt das

$$\bar{\vec{S}} = \frac{\mu_0 \omega^2}{32\pi^2 c} I^2 \frac{1}{|\vec{x}|^2} \sin^2\theta \vec{e}_r.$$

Integrieren wir den gemittelten Gesamtfluss durch eine Kugeloberfläche von Radius $r = |\vec{x}|$, so ist das Resultat

$$P = \oint d\vec{A} \cdot \bar{\vec{S}} = \frac{\mu_0 \omega^2}{16\pi c} I^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta}_{4/3} = \frac{\mu_0 \omega^2}{12\pi c} I^2$$

Verwenden wir nun noch die Identität

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

so erhalten wir schliesslich die abgestrahlte Gesamtleistung des Dipols als

$$P = \frac{\pi c \mu_0}{3} \left(\frac{I}{\lambda}\right)^2$$

oder mit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$P = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{I}{\lambda}\right)^2$$

5 Spezielle Relativitätstheorie

Seit dem Beginn der Magnetostatik hatten wir bemerkt, dass sich speziell magnetische Phänomene nicht widerspruchsfrei in den Rahmen der klassischen Newton'schen Mechanik einordnen ließen. Mit den Wellenlösungen der Maxwell-Gleichungen hatten wir diesen Widerspruch schliesslich auf den Punkt gebracht: In der Elektrodynamik existiert eine Naturkonstante c mit der Dimension einer Geschwindigkeit. Da aus den Maxwell-Gleichungen folgt, dass sich elektromagnetische Wellen immer mit dieser Geschwindigkeit ausbreiten, lässt sich c experimentell auch einfach bestimmen. Frühe Versuche, die Elektrodynamik in den Rahmen der Newton'schen Mechanik einzubauen, konzentrierten sich darauf, c die Eigenschaft abzusprechen, eine Naturkonstante zu sein: Die Vorstellung ging in die Richtung, dass die Maxwell-Gleichungen nur in einem speziellen Bezugssystem gelten und dass dieses Bezugssystem durch ein Medium, den Äther, physikalisch realisiert wäre. Dieser Äther würde für eine mechanische Ausbreitung elektromagnetischer Wellen sorgen (ähnlich wie Luft für den Schall), müsste das gesamte sichtbare Universum ausfüllen (ansonsten würden wir kein Sternenlicht sehen können!) und hätte noch sehr viele andere äußerst ungewöhnliche Eigenschaften für eine materielle Substanz, die alle nur dazu dienen, den Rahmen der klassischen Newton'schen Mechanik unverändert auf die Elektrodynamik anwenden zu können. Nachdem die

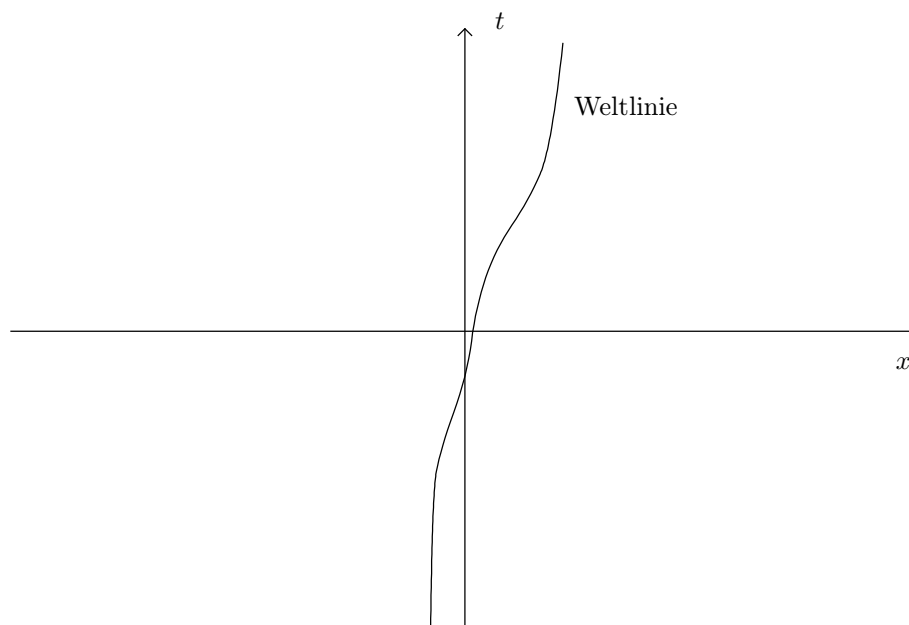
Experimente von Michelson und Morley Ende des 19. Jahrhunderts allerdings gezeigt hatten, dass die Geschwindigkeit der Erde im Bezug auf den Äther nicht festzustellen war und dass darüberhinaus jede Art von Licht (z.B. Sternenlicht) sich immer mit genau der Geschwindigkeit c bewegt, musste diese Art der Unterordnung der Elektrodynamik unter die Newton'sche Mechanik aufgegeben werden. Der Status von c als einer Naturkonstanten muss ernst genommen werden und wir müssen die gesamte Mechanik, inklusive ihrer Grundlage in der Kinematik, also der reinen Beschreibung von Bewegungen, neu überdenken.

5.1 Relativistische Kinematik

5.1.1 Ereignisse, Weltlinien und Raum-Zeit Diagramme

Beginnen wir mit der Beschreibung physikalischer Vorgänge in verschiedenen Koordinatensystemen. Zunächst definieren wir, dass ein Ereignis immer an einem Punkt im Raum \vec{x} zu einer gegebenen Zeit t stattfindet. Beispiele für solche idealisierten Ereignisse wären ein Lichtblitz, der einen Detektor trifft oder eine Punktmasse, die von einer Wand reflektiert wird. Da Ereignisse zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort stattfinden, gilt das einfache Grundprinzip, dass zwei Ereignisse, die zur selben Zeit am selben Ort stattfinden, dies unabhängig vom Koordinatensystem tun, in denen wir sie betrachten.

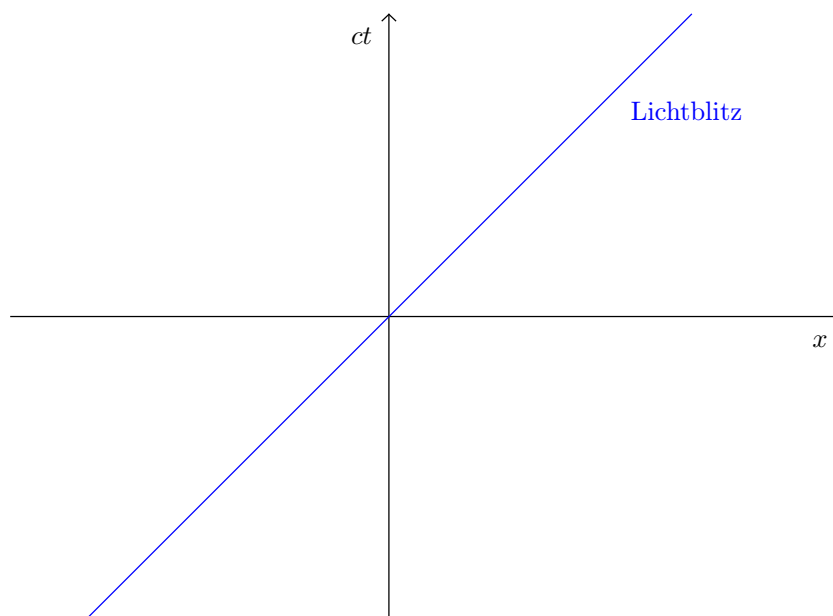
Betrachten wir nun ein punktförmig idealisiertes physikalisches Objekt, z.B. eine Masse, eine Ladung oder auch einen Lichtblitz (also eine idealisierte elektromagnetische Welle, deren Energiedichte auf einen Punkt lokalisiert ist), so können wir, wie in der Mechanik üblich, seine Bahn durch den Raum als Funktion der Zeit darstellen. Wir nennen diese Bahn die Weltlinie des Punktes und im Sinne der obigen Definition eines Ereignisses können wir die Weltlinie als die zeitliche Abfolge von Ereignissen verstehen. Für unsere grundlegenden Betrachtungen werden wir zunächst zwei Raumdimensionen vernachlässigen und uns nur mit den Weltlinien von physikalischen Objekten beschäftigen, die sich in einer räumlichen Dimension x im Laufe der Zeit t fortbewegen.



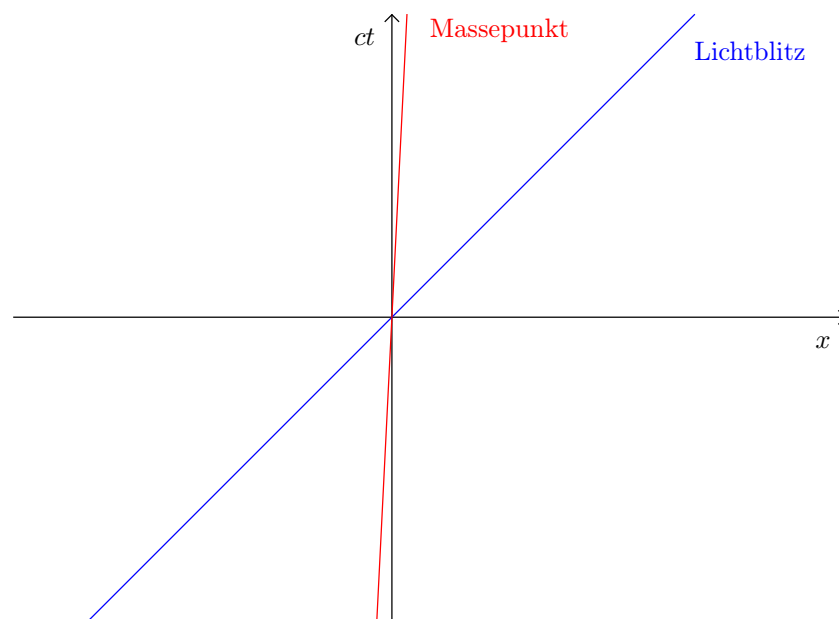
5.1.2 Inertialsysteme

Mit dieser begrifflichen Grundlage gehen wir nun daran, die Grundlagen der Newton'schen Mechanik

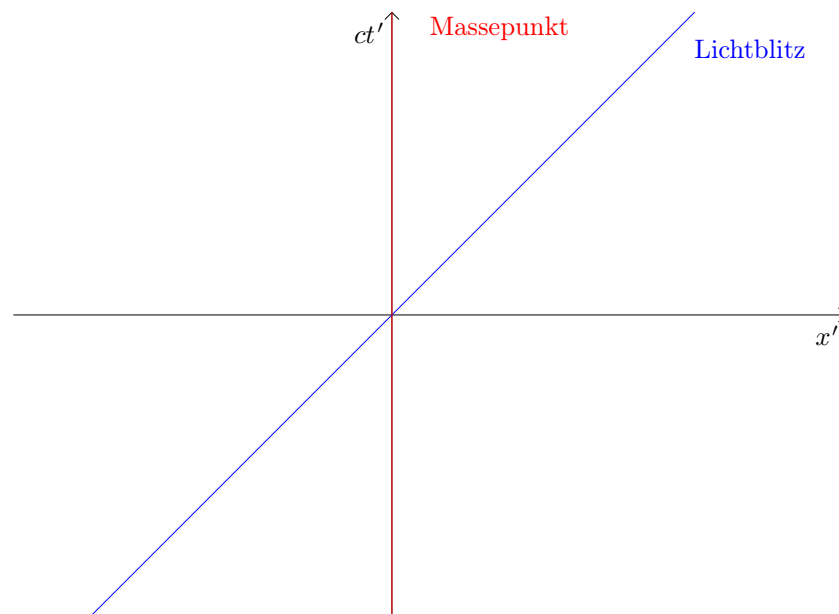
neu aufzubauen, wobei wir immer das neue Naturgesetz - die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit - im Auge behalten. Am Anfang der Newton'schen Mechanik steht Galileis Trägheitsgesetz - ein Körper auf den keine äußere Kraft wirkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit fort. Das Trägheitsgesetz erlaubt es uns, Inertialsysteme zu definieren, nämlich als Koordinatensysteme, in denen ein Körper ohne äußere Kräfte sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Diese Definition eines Inertialsystems hat sich in der Mechanik als extrem nützlich, ja eigentlich unabdingbar, erwiesen und wir müssen uns die Frage stellen, ob wir diese Definition aufrecht erhalten können. Können wir also in Anbetracht einer konstanten Lichtgeschwindigkeit nach wie vor Inertialsysteme als Koordinatensysteme definieren, in denen Objekte, auf die keine Kraft wirkt, sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen? Die Antwort auf diese Frage ist, vielleicht etwas überraschend, ja. Da sich Licht in jedem Inertialsystem immer geradlinig mit einer Geschwindigkeit vom Betrag c ausbreitet, gibt es keinen Grund den Begriff eines Inertialsystems über Bord zu werfen. Zeichnen wir ein Raum-Zeit Diagramm mit der Weltlinie eines Lichtblitzes, der sich in die positive x -Richtung ausbreitet



Wir haben hierbei auf der Zeitachse ct aufgetragen, womit Licht immer einen Winkel von 45° zu beiden Achsen einnimmt. Diese Normierung wird sich als sehr praktisch erweisen. Zeichnen wir nun zusätzlich zur Weltlinie des Lichtblitzes auch noch die Weltlinie eines Massenpunktes ein, auf den keine äußere Kraft wirkt:



Man beachte, dass trotz des sehr geringen Neigungswinkels zur Zeitachse der eingetragene Massepunkt sich mit einer Geschwindigkeit von $v \sim 15000 \text{ km/s}$ bewegt - eine Geschwindigkeit, die mindestens zwei Größenordnungen über den höchsten Geschwindigkeiten (Planetengeschwindigkeiten in der Himmelsmechanik) liegt, auf die die Newton'sche Mechanik bis ins 19. Jahrhundert jemals Anwendung fand. Stellen wir diese Situation nun in einem Inertialsystem mit den Koordinaten x' und t' dar, das sich mit dem Massepunkt mitbewegt:



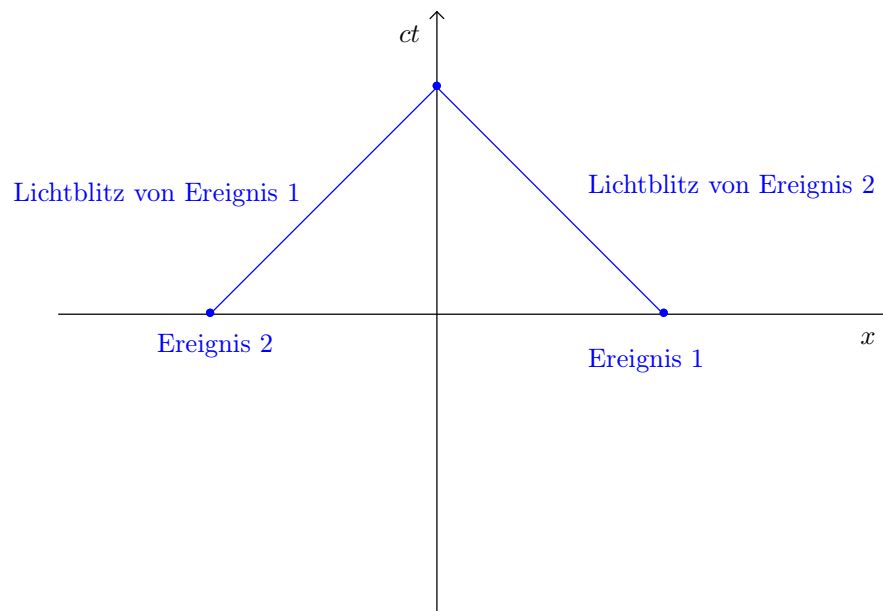
Die Frage, die wir uns nun stellen müssen, ist, wie die neuen Koordinaten x' und t' mit den alten Koordinaten x und t zusammenhängen. In der klassischen Newton'schen Mechanik wäre dieser Zusammenhang einfach $t' = t$ und $x' = x - vt$ (die Zeit ändert sich nicht, während von der Ortskoordinate der Ort des Massenpunktes vt abgezogen werden muss). Dieser Zusammenhang kann aber nun nicht mehr stimmen, denn wenn für den Lichtblitz $ct = x$ gilt, so kann nicht gleichzeitig $ct = x' = x - vt$ gelten. Tatsächlich steht hinter diesem Zusammenhang die Annahme,

dass Gleichzeitigkeit absolut ist, sich also in verschiedenen Inertialsystemen nicht unterscheidet. Tatsächlich ist $t' = t$ ein Postulat, das wir hinterfragen müssen.

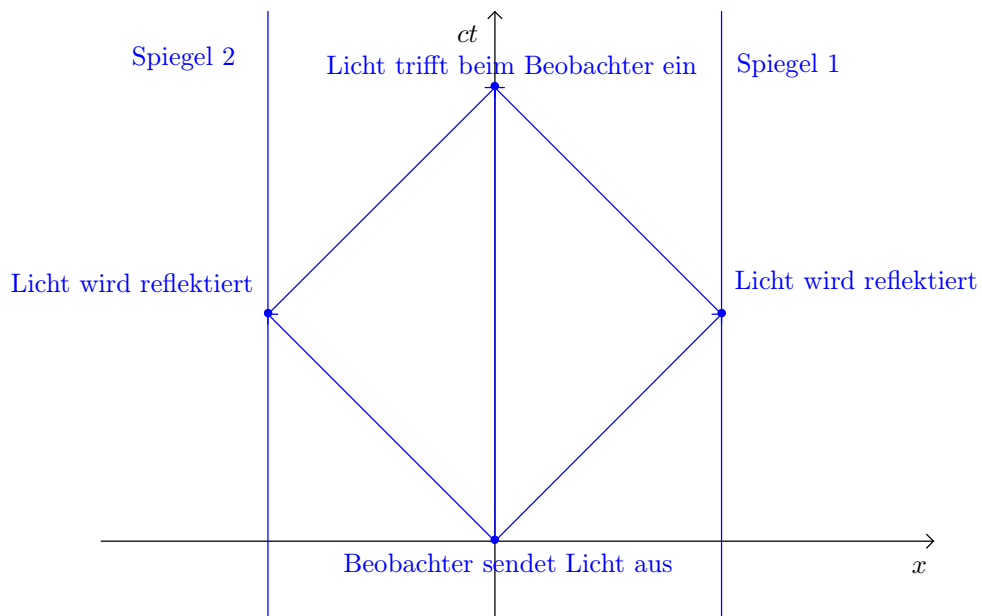
5.1.3 Relativität der Gleichzeitigkeit

Wenn wir die beiden obigen Raum-Zeit Diagramme eines Massenpunkts betrachten, so sehen wir, dass der Massepunkt im zweiten Diagramm sich immer am selben Ort $x' = 0$ befindet während er im ersten Diagramm nicht an einem konstanten Ort ist. Dass sich die Eigenschaft, ob ein Objekt sich an zwei verschiedenen Zeitpunkten am gleichen Ort befindet, von unserer Wahl des Koordinatensystems abhängt, ist eine solche Selbstverständlichkeit, dass man es kaum erwähnen muss. Trotzdem ist es wichtig das hier zu betonen, denn wir wissen, dass die Existenz einer Naturkonstanten mit der Dimension einer Geschwindigkeit uns dazu zwingt, räumliche und zeitliche Koordinaten in ähnlicher Weise zu behandeln. Wir wollen uns daher die Frage stellen, wie wir die Gleichzeitigkeit zweier räumlich getrennter Ereignisse über physikalische Experimente definieren können und wie sich das auf den Gleichzeitigkeitsbegriff in verschiedenen Bezugssystemen auswirkt.

Beginnen wir mit einer Alltagsdefinition und untersuchen diese etwas näher: Wenn wir während eines Gewitters zwei Blitze gleichzeitig sehen, so sagen wir, dass diese auch gleichzeitig entstanden sind. Diese Definition ist natürlich nur richtig, wenn man entweder annimmt, dass die Blitze in gleicher Entfernung stattgefunden haben oder sich das Licht unendlich schnell ausbreitet. Da die Zeitverzögerung durch die Lichtlaufzeit hier weniger als eine Millisekunde beträgt, ist letzteres eine Näherung, die im Alltag gut genug ist und uns die Illusion vermittelt, dass Gleichzeitigkeit trivial zu bestimmen sei. Wollen wir Gleichzeitigkeit tatsächlich exakt definieren, ist es besser, zunächst die Gleichzeitigkeit von zwei Ereignissen zu definieren, die gleich weit vom Beobachter entfernt sind. Wenn nun jeweils ein Signal von jedem der beiden Ereignisse ausgesendet wird, das sich in gerader Linie und mit gleichem Betrag der Geschwindigkeit auf den Beobachter zubewegt (z.B. ein Lichtblitz) und beide Signale beim Beobachter gleichzeitig ankommen, so können wir sagen, dass die beiden Ereignisse gleichzeitig stattgefunden haben.

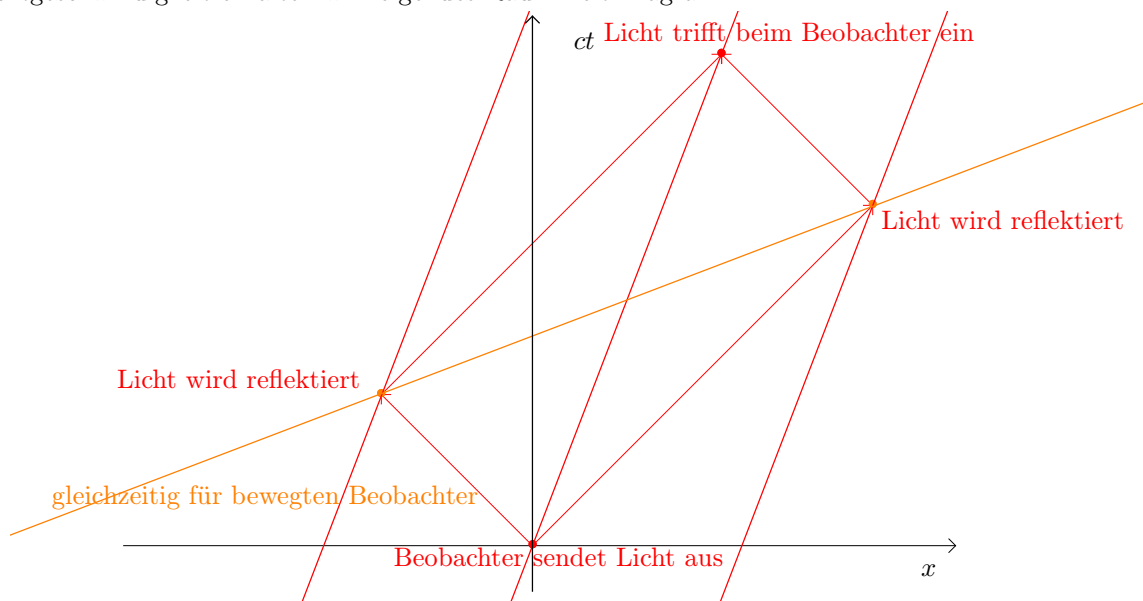


Um sicherzustellen, dass die beiden Ereignisse wirklich gleich weit vom Beobachter entfernt sind, können wir uns vorstellen, dass der Beobachter selbst zu einem früheren Zeitpunkt gleichzeitig zwei Lichtblitze in Richtung der Punkte aussendet, an denen die Ereignisse stattfinden werden. Dort angekommen, werden sie reflektiert und wenn sie danach wieder gleichzeitig beim Beobachter ankommen, so sind die Ereignisse in gleicher Entfernung vom Beobachter gleichzeitig geschehen. Wir können uns z.B. zwei Spiegel vorstellen, die sich relativ zueinander und zum Beobachter, der in ihrer Mitte ist, nicht bewegen.



Mit der gleichzeitigen Rückkehr ausgesendeten Lichts haben wir somit eine experimentell begründete Definition der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse - der Reflexion des Lichts an den beiden Spiegeln - doch warum haben wir hier ausgerechnet Lichtblitze als Signale verwendet und nicht Schallwellen oder z.B. Gummibälle? Die Antwort ist, dass wir uns bei Licht sicher sein können, dass es sich (im Vakuum) immer mit demselben Betrag der Geschwindigkeit c bewegt, weshalb es für diese Gedankenexperimente ideal geeignet ist. Abgesehen von Störungen wie Reibungseffekten, Inelastizität oder Luftströmungen für reale Objekte oder Schallwellen, müssten wir, wenn wir das Bezugssystem wechseln, immer dessen relative Geschwindigkeit addieren oder subtrahieren, was, wie wir gesehen haben, problematisch ist. Wir nutzen daher die konstante Lichtgeschwindigkeit c zu einer physikalischen Definition von Gleichzeitigkeit und ersetzen dadurch das Postulat, dass Gleichzeitigkeit unabhängig vom Bezugssystem ist - eine auf keinen physikalischen Beobachtungen beruhende Annahme der Newton'schen Mechanik.

Verwenden wir nun diese Definition der Gleichzeitigkeit für einen bewegten Beobachter und zwei relativ zu ihm ruhende Spiegel, in deren Mitte er sich befindet. Aufgrund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erhalten wir folgendes Raum-Zeit Diagramm:

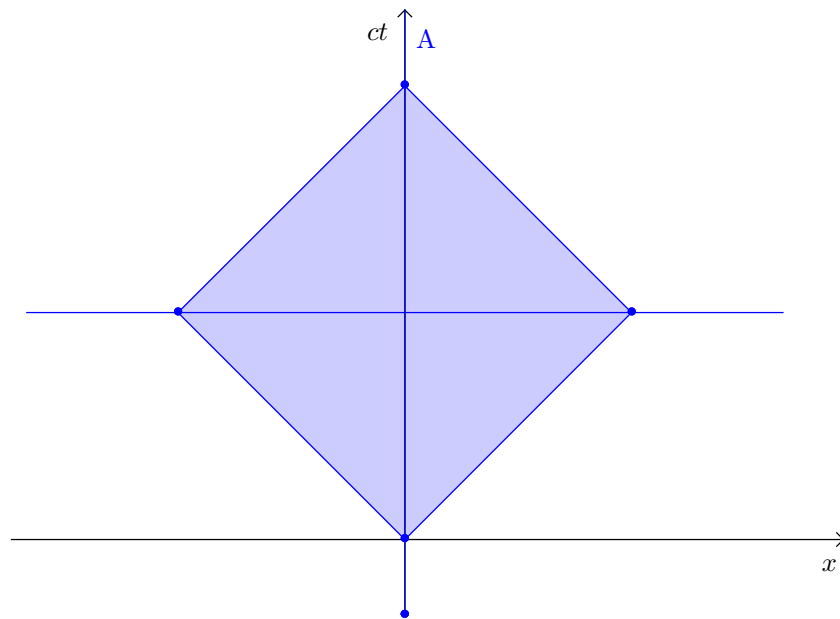


Wie wir sehen, haben die Ereignisse, die für den bewegten Beobachter gleichzeitig sind, eine andere

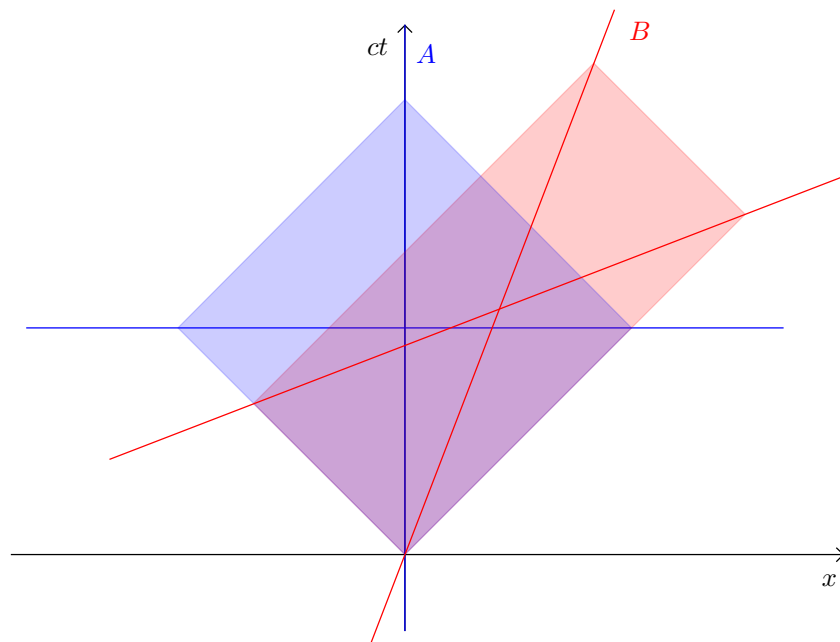
t -Koordinate, sind also für den unbewegten Beobachter nicht gleichzeitig.

5.1.4 Lorentz-Transformation

Nennen wir unseren unbewegten Beobachter Alice und zeichnen ihre Weltlinie ($x=0$) sowie die Lichtblitze die sie aussendet und ihre Definition der Gleichzeitigkeit blau in unser Raum-Zeit Diagramm.

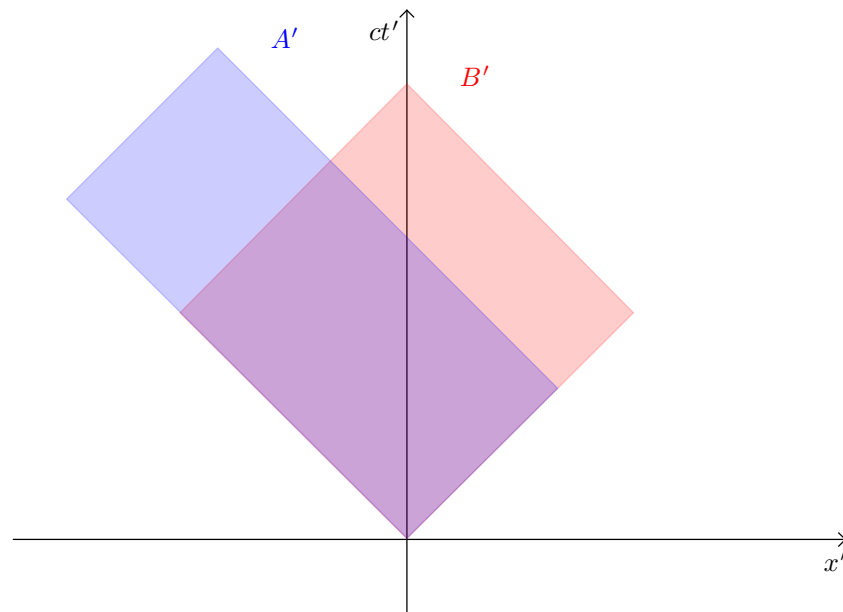


Fügen wir nun unseren (mit der Geschwindigkeit v bewegten) Beobachter, nennen wir ihn Bob, hinzu. Seine Weltlinie $x = vt$ sowie die Lichtblitze, die er aussendet, und seine Definition von Gleichzeitigkeit zeichnen wir rot ein:

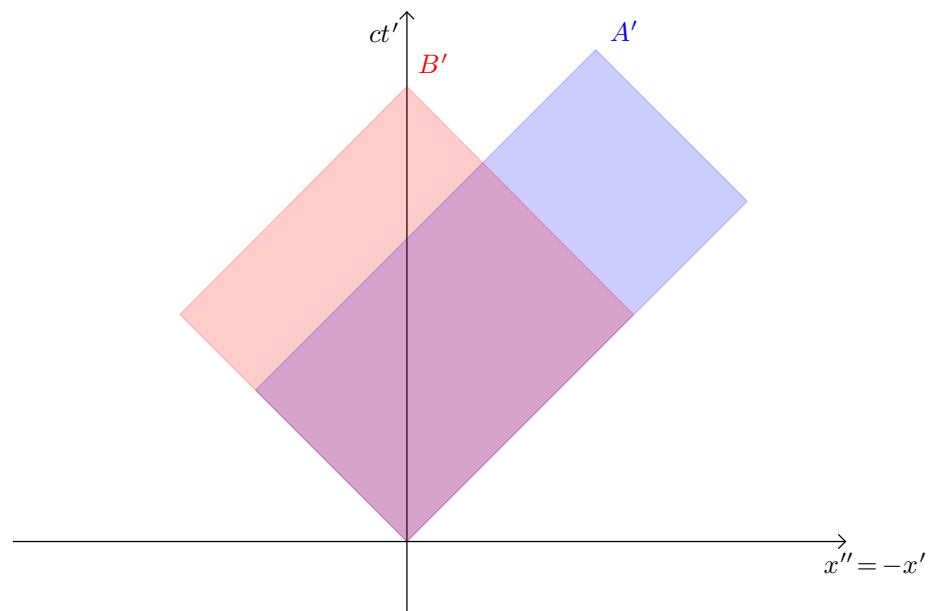


Gehen wir nun in ein Inertialsystem $x' t'$, in dem Bob ruht - Bobs Weltlinie ist also gegeben durch

$x' = 0$. Alice bewegt sich in diesem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit $-v$ auf einer Weltlinie $x' = -vt$. Das entsprechende Raum-Zeit Diagramm ist:



Wir konzentrieren uns zunächst nur auf die Flächen A und A' bzw. B und B' , die in den Raum-Zeit Diagrammen jeweils von den Lichtblitzen eingeschlossen werden, die Alice bzw. Bob aussenden. Dabei geht A' aus A durch eine Transformation hervor, die wir als $A' = \text{LT}(A, v)$ schreiben, wobei v die Geschwindigkeit bezeichnet, die das Inertialsystem $x' t'$ im Bezug auf $x t$ besitzt. Natürlich ist auch $B' = \text{LT}(B, v)$. Wählen Alice und Bob die Abstände zu ihren Spiegeln im Inertialsystem, in dem sie jeweils ruhen, gleich, so ist $A = B'$. Wir drehen nun die x' -Achse um, d.h. wir führen eine neue Koordinate $x'' = -x'$ ein, was an den Flächen A' und B' nichts ändert.



Von diesem gespiegelten Inertialsystem $x'' t'$ gelangen wir durch eine Transformation mit v aber nun wieder zurück in unser ursprüngliches Inertialsystem $x t$. Daher ist

$$A = \text{LT}(A', v) = \text{LT}(\text{LT}(A, v), v)$$

Das zweimalige Anwenden derselben Transformation auf A liefert also wieder A , woraus wir schließen können, dass die Fläche A unter der Koordinatentransformation unverändert bleibt. Dies ist die erste Eigenschaft der Koordinatentransformation in ein bewegtes Bezugssystem, die wir benötigen. Die zweite Eigenschaft ist deren Linearität. Diese folgt unmittelbar daraus, dass wir alle Eigenschaften der Transformation im Raum-Zeit Diagramm durch Schnitte von Geraden (Weltlinien von Lichtblitzen und Beobachtern, auf die keine äußeren Kräfte wirken) erhalten. Wir schreiben also die Koordinatentransformation zwischen einem Inertialsystem x t und einem sich dazu relativ mit der Geschwindigkeit v bewegenden zweiten Inertialsystem x' t' allgemein als

$$t' = \alpha t + \beta x \quad x' = \gamma x + \delta t$$

mit noch unbekanntem Koeffizienten α , β , γ und δ . Eine erste Einschränkung der Koeffizienten erhalten wir durch die relative Geschwindigkeit $v = dx/dt$ bei konstantem x' des zweiten Inertialsystems im Vergleich zum ersten. Aus der zweiten Transformationsgleichung haben wir

$$dx' = \delta dt + \gamma dx$$

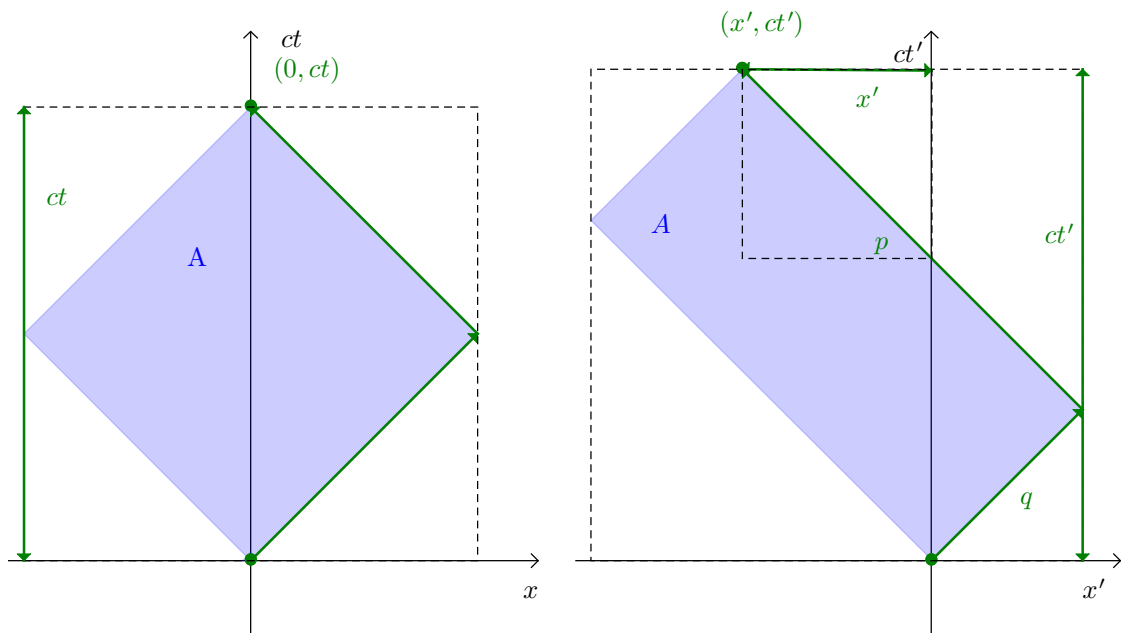
woraus folgt, dass

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x'} = -\frac{\delta}{\gamma} = v$$

Damit sind die Transformationsgleichungen

$$t' = \alpha t + \beta x \quad x' = \gamma(x - vt)$$

Um die Koeffizienten weiter zu bestimmen, verwenden wir nun die Eigenschaft, die wir aus unseren Gedankenexperimenten mit Alice, Bob und ihren Spiegeln hergeleitet haben: Die Fläche, die von den zwei Lichtblitzen eingeschlossen war, ist konstant in jedem Inertialsystem. Wir erinnern uns daran, dass die vier Ecken der Fläche jeweils zwei Ereignisse waren, die im relativ zum Beobachter ruhenden Inertialsystem sich entweder gleichzeitig (die Reflexionen am Spiegel) oder am selben Ort (das Aussenden und Empfangen der Lichtblitze) ereigneten. Betrachten wir die beiden Ereignisse, die im ruhenden Inertialsystem am gleichen Ort passieren, in den beiden Inertialsystemen:



Im ersten Fall ist die Fläche A ein Quadrat, das diagonal in ein Quadrat der Kantenlänge ct eingeschrieben ist, daher ist

$$A = \frac{(ct)^2}{2}$$

Im zweiten Fall ist A die Fläche des Rechtecks $A = pq$. Wir sehen, dass die Summe der beiden Kantenlängen gleich der Diagonale des umschriebenen Quadrats ist, also $p + q = \sqrt{2} ct'$. Die Diagonale des kleinen Quadrat mit Kantenlänge x' ist hingegen gegeben durch die Differenz der

Kantenlängen, also $p - q = \sqrt{2} x'$. Die Kantenlängen des Rechtecks sind also $p = (ct' + x')/\sqrt{2}$ und $q = (ct' - x')/\sqrt{2}$ und somit ist die Fläche

$$A = \frac{(ct' + x')(ct' - x')}{2} = \frac{(ct')^2 - x'^2}{2}$$

Diese Beziehung gilt für jedes beliebige Inertialsystem und für zwei beliebige Ereignisse, die in einem Inertialsystem, in dem sie an derselben Koordinate stattfinden (dem Ruhesystem), zeitlich nacheinander stattfinden. Wir können also eine Größe

$$\tau^2 = t'^2 - \frac{x'^2}{c^2}$$

definieren, die im Ruhesystem dem Quadrat des zeitlichen Abstandes zwischen zwei Ereignissen $\tau = t$ entspricht und in jedem Inertialsystem konstant ist. Diese Größe nennen wir die invariante Zeit oder Eigenzeit. Gewöhnlich wird sie in differentieller Form geschrieben als

$$\boxed{d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2}$$

und bildet die zentrale Erhaltungsgröße der speziellen Relativitätstheorie. Da die Eigenzeit konstant ist, gilt allgemein bei der Transformation von Koordinaten zwischen zwei beliebigen Inertialsystemen $x t$ und $x' t'$ die Bedingung

$$t^2 - \frac{x^2}{c^2} = t'^2 - \frac{x'^2}{c^2}$$

Wir können nun unsere Transformationsgleichungen

$$t' = \alpha t + \beta x \quad x' = \gamma(x - vt)$$

quadrieren und in diese Beziehung einsetzen

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{x^2}{c^2} &= t'^2 - \frac{x'^2}{c^2} \\ &= (\alpha t + \beta x)^2 - \frac{\gamma^2(x - vt)^2}{c^2} \\ &= \left(\alpha^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right) t^2 + 2\left(\alpha\beta + \gamma^2 \frac{v}{c^2}\right) xt - (\gamma^2 - \beta^2 c^2) \frac{x^2}{c^2} \end{aligned}$$

woraus drei Gleichungen resultieren:

$$\alpha^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad \alpha\beta + \gamma^2 \frac{v}{c^2} = 0 \quad \gamma^2 - \beta^2 c^2 = 1$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}}$$

womit die zweite Gleichung zu

$$\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}} \beta + \gamma^2 \frac{v}{c^2} = 0$$

wird. Wir benutzen die dritte Gleichung

$$\gamma^2 = 1 + \beta^2 c^2$$

um γ zu eliminieren und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{1 + (1 + \beta^2 c^2) \frac{v^2}{c^2}} \beta + (1 + \beta^2 c^2) \frac{v}{c^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} + \beta^2 v^2} \beta + \frac{v}{c^2} + \beta^2 v \end{aligned}$$

Wir geben den ersten Term auf die linke Seite und quadrieren

$$\beta^2 + \frac{v^2}{c^2} \beta^2 + \beta^4 v^2 = \frac{v^2}{c^4} + 2\beta^2 \frac{v^2}{c^2} + \beta^4 v^2$$

was schließlich das Ergebnis

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^4} + \beta^2 \frac{v^2}{c^2}$$

oder

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \beta^2 = \frac{v^2}{c^4}$$

liefert. Somit ist

$$\beta = \pm \frac{1}{c^2} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

weilers

$$\gamma^2 = 1 + \beta^2 c^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2 - v^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

und damit

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

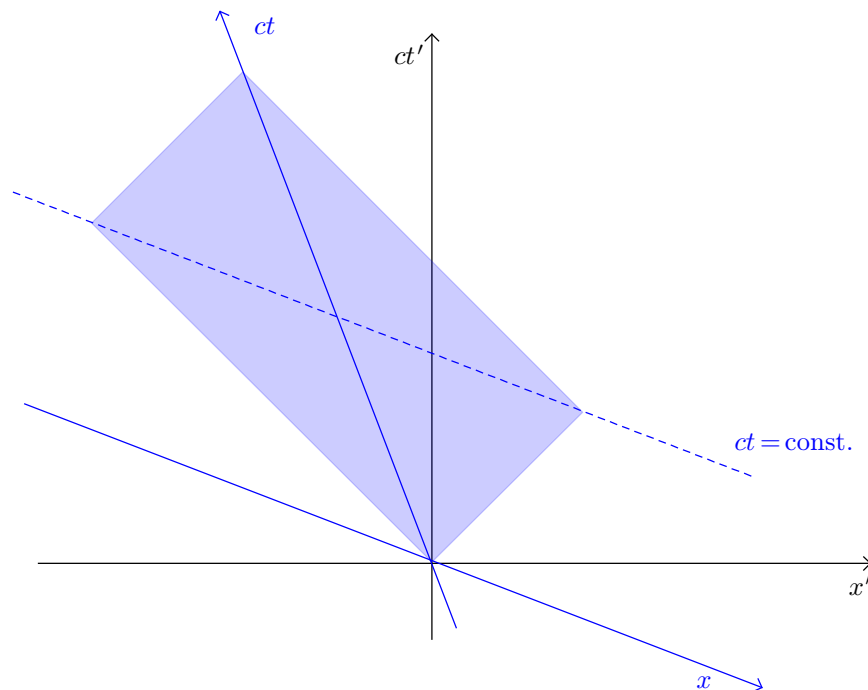
und schließlich

$$\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - v^2 + v^2}{c^2 - v^2}} = \gamma$$

Als letztes müssen wir noch das Vorzeichen von β bestimmen. Während die positiven Vorzeichen von α und γ dadurch gegeben sind, dass beide für $v \rightarrow 0$ gegen $+1$ gehen müssen, betrachten wir zur Bestimmung des Vorzeichens von β die Transformationsgleichungen

$$t' = \gamma \left(t \pm \frac{v}{c^2} x \right) \quad x' = \gamma (x - vt)$$

Wir erhalten also ein positives Vorzeichen, wenn t' bei konstantem t und zunehmendem x ansteigt und ein negatives Vorzeichen, wenn es abfällt. Werfen wir noch einmal einen Blick auf unser Gedankenexperiment im Inertialsystem $x' t'$:



Wie wir sehen, verringert sich t' bei konstantem t und zunehmendem x . Die Transformationsgleichung zwischen Inertialsystemen, die sogenannte Lorentz-Transformation, lautet also

$$\boxed{t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad x' = \gamma (x - vt)}$$

Für eine Transformation in eine beliebige Richtung erhalten wir entsprechend

$$t' = \gamma \left(t - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{x} \right) \quad \vec{x}' = \gamma (\vec{x} - \vec{v} t) \quad (4)$$

5.1.5 Addition von Geschwindigkeiten

Nehmen wir nun an, dass sich eine Punktmasse im Inertialsystem $x' t'$ mit Geschwindigkeit $u = dx'/dt'$ bewegt. Das Inertialsystem $x' t'$ bewegt sich aber, wie wir wissen, selbst mit Geschwindigkeit v bezüglich des Inertialsystems $x t$. Aufgrund der Lorentz-Transformation finden wir

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} \\ &= \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} \end{aligned}$$

also

$$u dt - \frac{uv}{c^2} dx = dx - v dt \quad \Rightarrow \quad (u + v) dt = \left(1 + \frac{uv}{c^2} \right) dx$$

Die Geschwindigkeit $w = dx/dt$ der Punktmasse im Inertialsystems $x t$ ist daher

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Diese Beziehung ersetzt die Addition von Geschwindigkeiten $w = u + v$, die wir aus der klassischen Newton'schen Mechanik kennen. Addieren wir Geschwindigkeiten die jeweils kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind $|u| < c$ und $|v| < c$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (c - u)(c - v) &> 0 \\ c^2 - uc - vc + uv &> 0 \\ c^2 + uv &> uc + vc \\ c + \frac{uv}{c} &> u + v \\ c &> \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \\ c &> w \end{aligned}$$

also wiederum eine Geschwindigkeit $w < c$ kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Eine Punktmasse kann Licht also niemals einholen oder gar überholen. Wie ausgeprägt dieser Effekt ist, lässt sich anhand von zwei einfachen Beispielen zeigen. Wenn wir zweimal die halbe Lichtgeschwindigkeit $u = v = c/2$ addieren, so erhalten wir $w = 0.8c$. Addieren wir jedoch $u = v = 0.99c$, so erhalten wir $w \cong 0.99995c$.

5.1.6 Zeitartige, raumartige und lichtartige Abstände

Kehren wir nun zurück zur Definition der Eigenzeit

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2$$

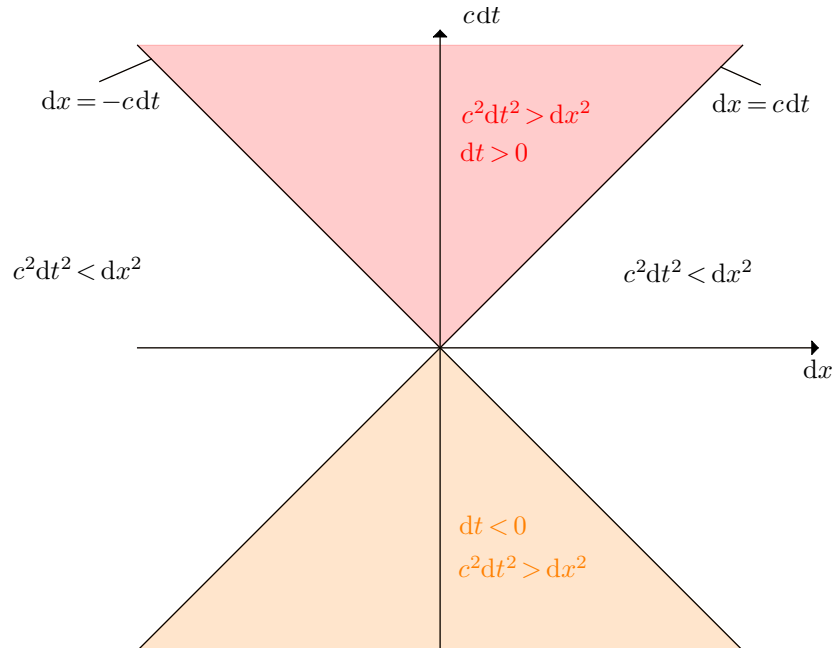
Wir wissen bereits, dass $d\tau$ unabhängig von der Wahl des Inertialsystems ist und als Eigenzeit dem zeitlichen Abstand zweier Ereignisse im mitbewegten Inertialsystem entspricht. Stellen wir diesen Ausdruck etwas um, so erhalten wir

$$dt^2 = d\tau^2 + \frac{1}{c^2} dx^2$$

wobei dt den zeitlichen Abstand der beiden Ereignisse in einem Inertialsystem darstellt, in dem ihr räumlicher Abstand dx beträgt. Da $dx^2 \geq 0$ ist sehen wir, dass die Eigenzeit $d\tau$ der kleinstmögliche zeitliche Abstand zwischen den beiden Ereignissen ist. Insbesondere können wir auch kein Inertialsystem finden, für das der zeitliche Abstand der beiden Ereignisse $dt = 0$ beträgt, die Ereignisse also gleichzeitig stattfinden. Mehr noch: da $d\tau^2 > 0$ ist

$$c^2 dt^2 > dx^2$$

Im Raum-Zeit Diagramm lässt sich die Menge der Punkte, die diese Bedingung erfüllen, darstellen als



Wie wir sehen, sind das also die Ereignisse, die innerhalb des Lichtkegels liegen. Für $dt > 0$ sind sie im zukünftigen und für $dt < 0$ im vergangenen Lichtkegel. Den Abstand zwischen solchen Ereignissen nennen wir zeitartig und, da es ein Inertialsystem gibt, in dem sie am gleichen Ort stattfinden, können sie Punkte auf der Weltlinie eines Objekts darstellen, aber niemals zwei Ereignisse, die gleichzeitig geschehen. Die zeitartige Separation zweier Ereignisse ist demnach unabhängig vom gewählten Inertialsystem und durch $d\tau^2 > 0$ definiert.

Was aber ist mit Ereignissen, die in einem bestimmten Inertialsystem gleichzeitig stattfinden? Ganz allgemein gilt auch hier, dass das Quadrat der Eigenzeit

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2$$

zwischen diesen Ereignissen invariant ist. Allerdings können wir hier ein Inertialsystem finden, in dem die Ereignisse gleichzeitig stattfinden, also $dt^2 = 0$. In diesem speziellen Inertialsystem ist

$$dx^2 = -c^2 d\tau^2 > 0$$

also

$$d\tau^2 < 0$$

Diese Eigenschaft ist wiederum invariant und wir sagen, dass solche Ereignisse raumartig voneinander getrennt sind. Für raumartig getrennte Ereignisse können wir einen invarianten Abstand ds einführen, den wir als

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

definieren sodass $ds^2 > 0$. Im Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden, ist daher $dx^2 = ds^2$ und somit stellt ds den räumlichen Abstand der zwei Ereignisse im System dar, in dem sie gleichzeitig stattfinden. Allgemein können wir schreiben

$$ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2$$

womit

$$dx^2 = ds^2 + c^2 dt^2$$

Die minimale räumliche Entfernung dx der beiden Ereignisse ist also ihr invarianter Abstand ds , das heißt ihr Abstand im Inertialsystem, in dem sie gleichzeitig stattfinden. In allen anderen Inertialsystemen sind die Ereignisse weiter voneinander getrennt. Schließlich sehen wir, da für

raumartig getrennte Ereignisse $ds^2 > 0$, dass

$$dx^2 > c^2 dt^2$$

Dies ist die Region außerhalb der Lichtkegel, wie im obigen Diagramm eingezeichnet.

Neben zeitartig getrennten Ereignissen ($d\tau^2 > 0$) und raumartig getrennten Ereignissen ($d\tau^2 < 0$) gibt es schließlich noch eine dritte Möglichkeit: $d\tau^2 = 0$. Dies impliziert

$$c^2 dt^2 = dx^2$$

also

$$dx = \pm c dt$$

Dies sind genau die Punkte auf dem Lichtkegel, der ebenfalls unabhängig vom Bezugssystem ist. Zwei Ereignisse für die $d\tau^2 = 0$ nennt man lichtartig getrennt. Fassen wir diese Definitionen abschließend in einer kleinen Tabelle zusammen:

$d\tau^2$	Name	am gleichen Ort möglich?	gleichzeitig möglich?	Weltlinien von
>0	zeitartig	ja	nein	Objekten
$=0$	lichtartig	nein	nein	Licht
<0	raumartig	nein	ja	-

Tabelle 1.

5.1.7 Längenkontraktion und Zeitdilatation

Stellen wir uns nun einen Stab der Länge l vor, der im Inertialsystem $x t$ ruht. Wir können die Koordinaten so wählen, dass ein Ende des Stabes sich bei $x_1 = 0$ und das andere bei $x_2 = l$ befindet. Begeben wir uns nun in ein Inertialsystem $x' t'$, das sich relativ zum Stab mit der Geschwindigkeit v bewegt. Mit Hilfe der Lorentz-Transformation

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad x' = \gamma (x - vt)$$

können wir die Koordinaten der beiden Enden des Stabes in diesem neuen Inertialsystem finden. Wir finden für das eine Ende

$$t'_1 = \gamma t \quad x'_1 = -v\gamma t = -vt'_1$$

und für das andere

$$t'_2 = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} l \right) \quad x'_2 = \gamma l - v\gamma t$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$t = \frac{t'_2}{\gamma} + \frac{v}{c^2} l$$

womit die zweite Gleichung zu

$$\begin{aligned} x'_2 &= \gamma l - vt'_2 - \gamma \frac{v^2}{c^2} l \\ &= \gamma l \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - vt'_2 \\ &= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} l - vt'_2 \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l - vt'_2 \end{aligned}$$

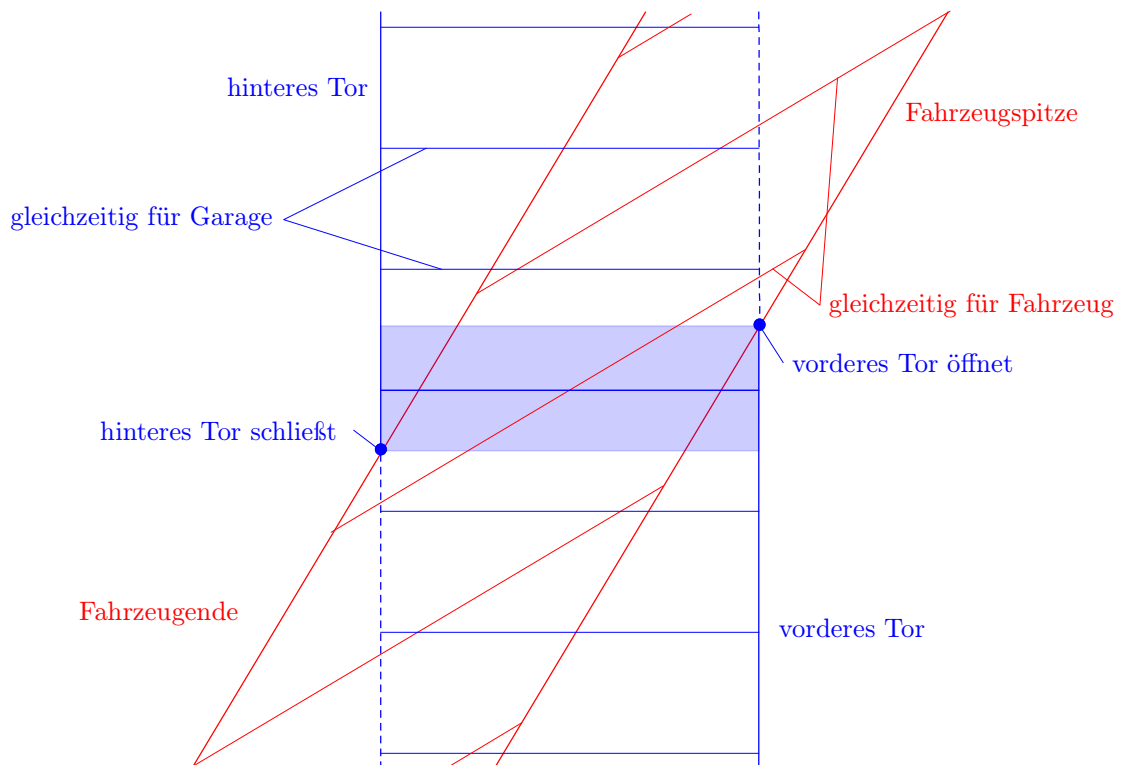
wird. Beobachten wir Anfangs- und Endpunkt des Stabes gleichzeitig, also bei $t'_1 = t'_2$, so erhalten wir die Länge des Stabes $l' = x'_2 - x'_1$ im bewegten Bezugssystem

$$l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l$$

was kürzer ist als die Länge im ruhenden Bezugssystem. Dieses Phänomen nennt man Längenkontraktion. Dabei ist es wichtig zu beachten, dass wir die Argumentation auch genau umgekehrt führen könnten: Ein Stab der Länge l , der im Inertialsystem $x' t'$ ruht, wird vom Inertialsystem $x t$ aus betrachtet ebenfalls eine kürzere Länge l' besitzen.

Beispiel. Ein anschauliches Beispiel, das dieses vermeintliche Paradoxon auf die Spitze treibt, ist das sogenannte relativistische Garagentor. Stellen Sie sich eine Garage der Länge l und ein genau gleich langes Fahrzeug vor, das mit einem substantziellen Teil der Lichtgeschwindigkeit durch die Garage fährt. Die Garage habe vorne und hinten jeweils ein Tor. Das vordere Tor ist zunächst geschlossen und öffnet sich sofort, wenn die vordere Spitze des Fahrzeugs es erreicht. Das hintere Tor stehe zunächst offen und schließe sich sofort, denn das hintere Ende des Fahrzeugs daran vorbeigefahren ist. Nun ist die Frage, ob das Fahrzeug jemals in der Garage eingeschlossen ist.

Vom Standpunkt der Garage aus müsste das Fahrzeug einmal eingeschlossen sein, da das bewegte Fahrzeug in seiner Länge kontrahiert erscheint. Aus der Position des Fahrzeugs ist dies aber genau umgekehrt: Die Länge der Garage scheint kontrahiert und das Fahrzeug passt niemals ganz hinein. Wie diese beiden Standpunkte zu vereinbaren sind, sehen wir am besten in einem Raum-Zeit Diagramm, in das wir die beiden Garagentore sowie das vordere und hintere Ende des Fahrzeugs einzeichnen:



Die Aussage, ob sich das Fahrzeug jemals in der Garage befindet, hängt davon ab, ob beide Tore jemals gleichzeitig geschlossen sind. Da Gleichzeitigkeit aber vom Inertialsystem abhängig ist, hängt die Aussage ebenfalls vom Inertialsystem ab.

Betrachten wir nun eine im Inertialsystem $x t$ ruhende ($x=0$) Uhr, die ein Zeitintervall von $t_1=0$ bis $t_2=T$ misst. Wir verwenden wieder die Lorentz-Transformation um, die Koordinaten der beiden Ereignisse $(x_1, t_1) = (0, 0)$ und $(x_2, t_2) = (0, T)$ in einem relativ dazu bewegten Koordinatensystem $x' t'$ zu finden. Wir haben

$$t'_1 = 0 \quad x'_1 = 0$$

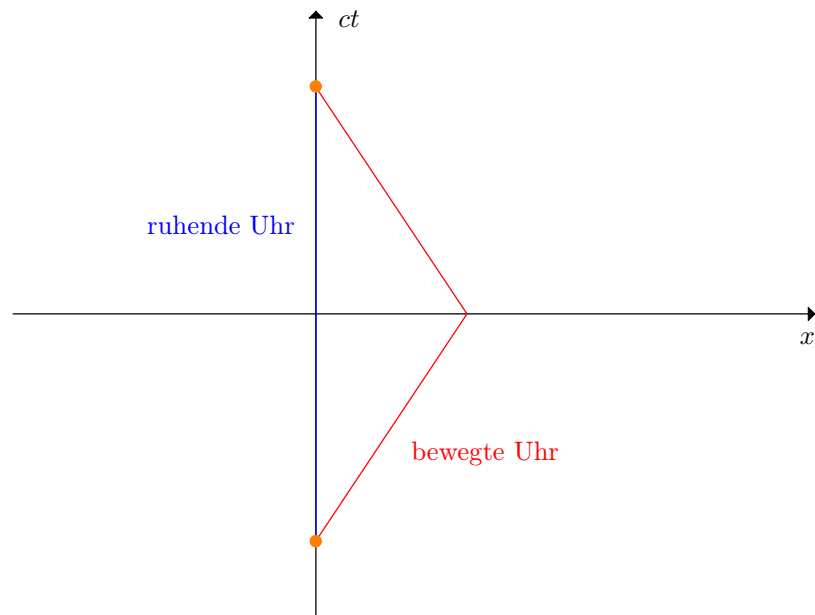
sowie

$$t'_2 = \gamma T \quad x'_2 = -v\gamma T$$

Das Zeitintervall $T' = t'_2 - t'_1$, das die Uhr im bewegten Bezugssystem misst, ist daher

$$T' = \gamma T = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und damit länger als das Zeitintervall, in dem die Uhr ruht. Dieses Phänomen nennt man Zeitdilatation und es ist, wie die Längenkontraktion, auch in umgekehrter Richtung zu beobachten. Eine Uhr, die im Inertialsystem $x' t'$ ruht und ein Zeitintervall T misst, wird im Inertialsystem $x t$ die Zeit T' messen. Um tatsächlich einen Gangunterschied zweier Uhren festzustellen, müssen wir diese zunächst am gleichen Ort (und natürlich zur gleichen Zeit) synchronisieren und sie anschließend zu einer späteren Zeit wieder an denselben Ort bringen. Im einfachsten Fall können wir uns vorstellen, dass eine Uhr im Inertialsystem $x t$ ruht, während eine zweite Uhr sich zunächst mit Geschwindigkeit v entfernt und danach mit Geschwindigkeit $-v$ sich wieder annähert



Ist im Inertialsystem $x t$ eine Zeit t_2 zwischen den beiden Ereignissen (den Treffen der Uhren) vergangen, so hat die ruhende Uhr $n_r = t_2/T$ vergangene Zeitintervalle registriert, während die bewegte Uhr

$$n_b = \frac{t_2}{T'} = \frac{t_2}{\gamma T} = \frac{n_r}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} n_r$$

Zeitintervalle registriert hat. Für den bewegten Beobachter ist also weniger Zeit zwischen den zwei Ereignissen vergangen als für den ruhenden. Dieses Phänomen wird auch als Zwillingsparadoxon bezeichnet.

5.2 Relativistische Notation

Nachdem wir nun explizit gesehen haben, dass räumliche und zeitliche Koordinaten ineinander transformieren, wollen wir unsere Notation so anpassen, dass sie dieser neuen Tatsache Rechnung trägt. Unser Ausgangspunkt ist die differentielle Definition der invarianten Eigenzeit

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^2$$

Um diesen Ausdruck zu erhalten hatten wir unser Koordinatensystem so gewählt, dass Bewegung nur in x -Richtung stattfindet und wir daher y und z Koordinaten vernachlässigen konnten, weil sie trivial (also konstant) transformieren. Es gilt daher auch

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in den räumlichen Koordinaten und es liegt nahe, dass er auch im allgemeinen Fall die invariante Zeit angibt. Um der Symmetrie zwischen räumlichen und zeitlichen Koordinaten Rechnung zu tragen, definieren wir die sogenannten kontravarianten Koordinaten

$$\begin{aligned}x^0 &= ct \\x^1 &= x \\x^2 &= y \\x^3 &= z\end{aligned}$$

womit wir

$$c^2 d\tau^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

erhalten. Die Lorentz-Transformation (4) lässt sich damit schreiben als

$$x^{0'} = \gamma \left(x^0 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{x} \right) \quad \vec{x}' = \gamma \left(\vec{x} - \frac{1}{c} \vec{v} t \right) \quad (5)$$

Fassen wir die x^μ als Komponenten eines Vektors auf, so können wir auch schreiben

$$c^2 d\tau^2 = \begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nennen wir metrischen Tensor und den Vektor, der durch Anwendung des metrischen Tensors auf den kontravarianten Vektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

entsteht, nennen wir den kovarianten Vektor

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen generell obere Vektor- und Tensor-Indizes als kontravariant und untere als kovariant. Diese Beziehung können wir auch als

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu$$

schreiben. Unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention, dass über griechische Indizes, die einmal kovariant und einmal kontravariant in einem Ausdruck vorkommen, von 0 bis 3 summiert wird, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

Die invariante Eigenzeit lässt sich daher kompakt schreiben als

$$c^2 d\tau^2 = dx_\mu dx^\mu$$

Der metrische Tensor hat zwei kovariante Indizes, ist also ein kovarianter Tensor zweiter Ordnung. Wird einer von ihnen, wie im obigen Beispiel, mit dem kontravarianten Index eines Vektors kontrahiert, so ist der resultierende Ausdruck ein kovarianter Vektor. In diesem Sinne „zieht der metrische Tensor die Indizes nach unten“ und sein Inverses müsste genau das Gegenteil tun. Wir bezeichnen das Inverse des metrischen Tensors g^{-1} selbst als $g^{\mu\nu}$. Dabei gilt

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g^{\mu\nu}$$

und in expliziter Form

$$g^{-1} = g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Salopp gesprochen können wir den inversen metrischen Tensor dazu verwenden, Indizes „nach oben zu ziehen“. So ist z.B.

$$g^{\mu\nu} x_\nu = g^{\mu\nu} \underbrace{g_{\nu\alpha}}_{\delta_\alpha^\nu} x^\alpha = x^\mu$$

5.2.1 Lorentz-Transformationen in relativistischer Notation

Betrachten wir die Wirkung einer Lorentz-Transformation (in x -Richtung)

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad x' = \gamma (x - vt)$$

auf die Komponenten eines kontravarianten Vektors x^μ , so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c} \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Wenden wir noch einmal eine Lorentz-Transformation, diesmal mit Relativgeschwindigkeit u an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x''^0 \\ x''^1 \\ x''^2 \\ x''^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & -\frac{u}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{u}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & -\frac{u}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{u}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}} & -\frac{u+v}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}} & 0 & 0 \\ -\frac{u+v}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}} & \frac{1+\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für den Ausdruck in den ersten beiden Diagonalelementen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} &= \frac{1 + \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4}}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\frac{uv}{c^2} + \frac{u^2 + v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\frac{(u+v)^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)^2}}}
 \end{aligned}$$

Mit der relativistischen Summe der Geschwindigkeiten

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

können wir diesen Ausdruck identifizieren als

$$\frac{1 + \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

Für die Nichtdiagonalelemente erhalten wir

$$\begin{aligned}
 -\frac{u + v}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} &= -\frac{\frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}}{c} \frac{1 + \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \\
 &= -\frac{w}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}
 \end{aligned}$$

und somit erhalten wir durch zweifaches Anwenden einer Lorentz-Transformation

$$\begin{pmatrix} x''^0 \\ x''^1 \\ x''^2 \\ x''^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} & -\frac{w}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

was wenig überraschend einer Lorentz-Transformation mit der relativistischen Summe der Geschwindigkeiten der beiden Transformationen entspricht. Die Lorentz-Transformationen in x -Richtung bilden also eine Gruppe und dasselbe können wir völlig analog auch für Lorentz-Transforma-

tionen in y - und z - Richtung zeigen. Wir können also eine Lorentz-Transformation L entlang einer Achse, z.B. der x -Achse, in eine Folge von N kleineren Lorentz-Transformationen $L_{1/N}$ zerlegen, sodass die Transformationsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & -\frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lim_{N \rightarrow \infty} (L_{1/N})^N$$

ist. Für infinitesimale Geschwindigkeiten $v = \varepsilon c$ erhalten wir die Transformation

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei

$$J_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der Generator der Transformation genannt wird. Entsprechend können wir auch Generatoren für Lorentz-Transformationen in y - und z -Richtung finden:

$$J_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um aus diesen Generatoren wieder endliche Transformationen aufzubauen, bilden wir den Grenzwert

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + \frac{\varphi}{N} J_{01} \right)^N \\ &= e^{\varphi J_{01}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi^n J_{01}^n \end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Generatoren ist, dass sie zu einem Projektionsoperator quadrieren, also zu einer Matrix, die eine Einheitsmatrix in einem Unterraum und ansonsten 0 ist. Explizit haben wir

$$J_{01}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{02}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{03}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist jede gerade Potenz von $J_{01}^{2n} = J_{01}^2$ und jede ungerade Potenz $J_{01}^{2n+1} = J_{01}$. Zusätzlich ist

$J_{01}^0 = \mathbb{1}$, womit die endliche Transformation also

$$\begin{aligned}
 L(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi^n J_{01}^n \\
 &= \mathbb{1} + J_{01}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \varphi^{2n} + J_{01} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} \\
 &= \mathbb{1} - J_{01}^2 + J_{01}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \varphi^{2n} + J_{01} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} \\
 &= \mathbb{1} - J_{01}^2 + J_{01}^2 \cosh(\varphi) + J_{01} \sinh(\varphi) \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vergleich mit der uns schon bekannten Form der Lorentz-Transformation

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c} \gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c} \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert schließlich

$$\frac{v}{c} = \tanh(\varphi)$$

Die Variable φ steht also in direktem Zusammenhang mit der Geschwindigkeit und wird Rapidity genannt. Die Rapidity wird oft anstelle der Geschwindigkeit verwendet, da sie den Vorteil hat, dass sie, anders als die Geschwindigkeit, relativistisch additiv ist, d.h. dass

$$L(\varphi_1 + \varphi_2) = L(\varphi_1) L(\varphi_2)$$

5.2.2 Die Lorentz-Gruppe

Wir haben nun die Generatoren von Lorentz-Transformationen in jede der drei Raumrichtungen bestimmt und können damit entlang jeder der drei Achsen eine Lorentz-Transformation durchführen. Wir können die Transformationen entlang verschiedener Achsen auch kombinieren und dadurch allgemeine Lorentz-Transformationen erhalten. Um zu sehen, wie das Zusammenspiel von Lorentz-Transformationen entlang verschiedener Koordinatenachsen funktioniert, sehen wir uns ein einfaches Beispiel an: Wir transformieren zunächst entlang der x -Achse mit Rapidity φ . Darauf wenden wir dann eine infinitesimale Lorentz-Transformation mit Rapidity ε entlang der y -Richtung an und darauf schließlich nehmen wir die erste Transformation zurück, transformieren also mit Rapidity $-\varphi$ wieder in x -Richtung. Die gesamte Transformationsmatrix ist also

$$\begin{aligned}
 L_f &= \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & -\sinh(\varphi) & -\varepsilon & 0 \\ -\sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ -\varepsilon \cosh(\varphi) & \varepsilon \sinh(\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon \cosh(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \sinh(\varphi) & 0 \\ -\varepsilon \cosh(\varphi) & \varepsilon \sinh(\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

Wenig überraschend enthält das Resultat dieser Transformation wieder eine infinitesimale Transformation in y -Richtung. Allerdings ist die Rapidity nicht ε , wie wir es vielleicht vermuten würden,

sondern $\varepsilon \cosh(\varphi)$. Beseitigen wir diesen Effekt durch eine Lorentz-Transformation mit Rapidität $-\varepsilon \cosh(\varphi)$ in y -Richtung, so verbleibt uns eine Transformation

$$\begin{aligned} L_{\text{tot}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \cosh(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon \cosh(\varphi) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon \cosh(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \sinh(\varphi) & 0 \\ -\varepsilon \cosh(\varphi) & \varepsilon \sinh(\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \sinh(\varphi) & 0 \\ 0 & \varepsilon \sinh(\varphi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \\ &= \mathbb{1} + \varepsilon \sinh(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

die wir als Drehung in der x - y Ebene um einen infinitesimalen Winkel $\varepsilon \sinh(\varphi)$ identifizieren. Auf völlig analoge Weise können wir sehen, dass Drehungen in anderen Ebenen aus der Kombination entsprechender Lorentz-Transformationen hervorgehen. Der Effekt, dass eine Aufeinanderfolge von Lorentz-Transformationen eine Drehung bewirken kann, heißt Thomas-Präzession. Wir wollen uns damit aber nicht weiter beschäftigen, sondern begnügen uns damit festzustellen, dass Lorentz-Transformationen zu einer verallgemeinerten Drehgruppe in vier Dimensionen zählen und gewissermaßen die Raum-zeitlichen Gegenstücke zu rein räumlichen Drehungen bilden. Die Gruppe dieser verallgemeinerten Drehungen hat 6 Generatoren: Die drei räumlichen Drehungen

$$J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die drei uns schon bekannten Lorentz-Transformationen entlang der Achsen J_{0i} , die in diesem Zusammenhang oft auch als Lorentz-Boosts bezeichnet werden. Nehmen wir zu diesen kontinuierlichen Transformationen (Drehungen und Boosts) noch die diskreten räumlichen und zeitlichen Reflexionen hinzu, so erhalten wir schließlich die sogenannte Lorentz-Gruppe, die mathematisch auch als $O(1,3)$ bezeichnet wird.⁶ Ihre Generatoren können wir auch allgemein darstellen als

$$(J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \delta_\alpha^\mu g_{\beta\nu} - \delta_\beta^\mu g_{\alpha\nu}$$

5.2.3 Vierervektoren und -tensoren

Die Gruppe der räumlichen Drehungen bildet die Grundlage für einen der wichtigsten Begriffe in der Newton'schen Physik: den Vektor (und direkt darauf aufbauend den Tensor). Erinnern wir uns an den physikalischen Ursprung von räumlichen 3-Vektoren und warum sie von so grundlegender Bedeutung sind: Den Raum, in dem sich physikalische Prozesse in der Zeit $t \in \mathbb{R}$ abspielen, hatten wir als \mathbb{R}^3 beschrieben. Bezeichnen wir einen Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, so implizierte das Prinzip, dass Naturgesetze in jedem Inertialsystem gleich sind, dass eine Symmetrie existierte unter folgenden Transformationen:

- $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$, oder räumliche Translationen (3 Freiheitsgrade)
- $t \rightarrow t + b$, oder zeitliche Translation (1 Freiheitsgrad)
- $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{v}t$, oder Galilei-Transformationen (3 Freiheitsgrade)
- $\vec{x} \rightarrow O\vec{x}$ mit $O \in O(3)$, oder räumliche Drehungen (3 Freiheitsgrade)

Als Folge dieser Symmetrien ist es natürlich, dass physikalische Größen, die in den Naturgesetzen erscheinen, entweder Skalare, Vektoren oder Tensoren höherer Ordnung sind, die das gleiche Transformationsverhalten haben wie ein 3-dimensionaler Ortsvektor. Physikalisch ist das sinnvoll, weil

⁶ Grob gesprochen ist dies die Erweiterung der orthogonalen Gruppe $O(3)$ um die Boost-Generatoren, die ein umgekehrtes Vorzeichen in der Metrik haben.

Vektoren, wenn wir sie uns ganz einfach als Pfeile im Raum vorstellen, unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind.

Diese sehr grundsätzliche Betrachtung ändert sich nun durch unsere Erkenntnis, dass die tatsächliche Symmetriegruppe der Raumzeit \mathbb{R}^4 mit $x \in \mathbb{R}^4$ folgendermaßen aussieht:

- $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, oder raumzeitliche Translationen (4 Freiheitsgrade)
- $x^\mu \rightarrow L^\mu_\nu x^\nu$ mit $L \in O(1, 3)$, oder Lorentz-Transformationen (6 Freiheitsgrade)

Wie wir sehen, hat sich die Anzahl der (kontinuierlichen) Freiheitsgrade nicht geändert - sie ist nach wie vor 10. Rein räumliche 3-Vektoren kommen als grundlegende physikalische Größen nun allerdings nicht mehr in Frage, denn sie sind nicht invariant unter Lorentz-Transformationen. Wir können uns dazu ein leicht verständliches Analogon mit einer reduzierten Dimension vorstellen. Sagen wir, wir würden einen Impuls beschreiben wollen, würden dazu aber nur 2-Vektoren und Skalare verwenden dürfen. Wir könnten natürlich versuchen, eine Projektion des Impulses in x - und y -Richtung zu nehmen $\vec{p} = (p_x, p_y)$, der sich unter Rotation in der x - y Ebene korrekt transformiert und dazu einen Skalar p_z , der sich unter Rotation nicht transformiert. Offensichtlich wird dieser Impuls, sobald wir eine Rotation durchführen, an der die z -Achse beteiligt ist, nicht mehr die gleiche physikalische Situation beschreiben wie zuvor. Ähnlich müssen wir nun akzeptieren, dass Größen, die wir bisher als 3-Vektoren beschrieben hatten, tatsächlich nur die drei räumlichen Komponenten eines 4-Vektors sind. Interessanter noch ist die Situation bei den Skalaren: diese können entweder genuin Skalare sein, oder aber bisher unentdeckt gebliebene zeitliche Komponenten eines vier-Vektors. Sehen wir uns dazu ein Beispiel aus der Elektrodynamik an: die Stromdichte \vec{j} muss relativistisch Teil eines 4-Vektors j^μ sein, doch was ist die zeitliche Komponente? Erinnern wir uns an die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \partial_i j^i = 0$$

die im relativistischen Fall nach wie vor gelten soll (aus dieser Beziehung hatten wir schließlich die endgültige Form der Maxwell-Gleichungen hergeleitet, die $c = \text{const.}$ erst bedingten!). Mit $x^0 = ct$ erhalten wir

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial x^0} = c \partial_0$$

womit die Kontinuitätsgleichung zu

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad j^0 = c \rho$$

wird und wir die zeitliche Komponente der Stromdichte als die Ladungsdichte (multipliziert mit c) identifizieren. Dies gilt in der Tat allgemein: Dichten und Ströme, die über Kontinuitätsgleichungen verbunden sind, sind zeitliche bzw. räumliche Komponenten eines 4-Stromes. Wir finden damit auch die Lösung zu einer scheinbaren Inkonsistenz, die uns bei der Konstruktion des Induktionsgesetzes aufgefallen ist: In bewegten Bezugssystemen schien die Ladungsdichte sich zu verändern. Nun sehen wir, dass dies keine Inkonsistenz ist, sondern im Gegenteil eine zwingende Folge davon, dass die Ladungsdichte kein Skalar ist, sondern die Komponente eines 4-Vektors. Transformieren wir eine Ladungsdichte ρ explizit in ein mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegtes Bezugssystem, so erhalten wir aus der Lorentz-Transformation

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{j} \right) = \frac{\rho - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{j}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

was in führender Ordnung in v^2/c^2 als

$$\rho' = \rho - \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \cdot \vec{j} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

geschrieben werden kann - der Ausdruck, den wir bei der Herleitung der Induktion erhalten haben.

5.3 Relativistische Energie und relativistischer Impuls

Der wohl wichtigste dynamische Vektor in der Newton'schen Mechanik ist der Impuls. Für eine freie Punktmasse m gehorchen Energie und Impuls der Beziehung

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Im relativistischen Fall bilden die Komponenten des Impulses \vec{p} die räumlichen Komponenten eines 4-Vektors, dessen zeitliche Komponente p^0 unter Lorentz-Transformation (5) übergeht in

$$p^{0'} = \gamma \left(p^0 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{p} \right)$$

während die räumlichen Komponenten selbst als

$$\vec{p}' = \gamma \left(\vec{p} - \frac{1}{c} \vec{v} p^0 \right)$$

transformieren. Stellen wir uns nun vor, dass die Lorentz-Transformation uns in ein Inertialsystem $x' t'$ führt, in dem die Punktmasse ruht und daher keinen Impuls besitzt $\vec{p}' = 0$. Im Inertialsystem $x t$ hat die Punktmasse daher eine Geschwindigkeit \vec{v} und wir erhalten

$$\vec{p} = \frac{1}{c} \vec{v} p^0$$

Da für kleine Geschwindigkeiten $|\vec{v}| \ll c$ die nichtrelativistische Beziehung $\vec{p} = m \vec{v}$ gelten soll, folgern wir also, dass

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{c} p^0 = m$$

Für $v = 0$ ist aber $p^0 = p^{0'}$, daher haben wir also $p^{0'} = mc$ und somit folgt aus dem zeitlichen Teil der Lorentz-Transformation

$$mc = \gamma \left(p^0 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{p} \right)$$

Wir setzen $\vec{v} = c \vec{p} / p^0$ ein, das aus der oben hergeleiteten Beziehung zwischen \vec{p} und \vec{v} folgt, und erhalten

$$\begin{aligned} mc &= \gamma \left(p^0 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{p^0} \right) \\ &= \frac{p^0 - \frac{\vec{p}^2}{p^0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{p^0 - \frac{\vec{p}^2}{p^0}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{p}^2}{(p^0)^2}}} \\ &= \frac{(p^0)^2 - \vec{p}^2}{\sqrt{(p^0)^2 - \vec{p}^2}} \\ &= \sqrt{(p^0)^2 - \vec{p}^2} \end{aligned}$$

Wir quadrieren diese Gleichung und erhalten

$$m^2 c^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$$

oder

$$(p^0)^2 = m^2 c^2 + \vec{p}^2$$

Was aber bedeutet das physikalisch? Um das herauszufinden, sehen wir uns wieder den Grenzwert kleiner Geschwindigkeiten $|\vec{v}| \ll c$ (also $|\vec{p}| \ll mc$) an, in dem wir finden, dass

$$\begin{aligned} p^0 &= \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} \\ &= \sqrt{m^2 c^2 \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2} \right)} \\ &= mc \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2} + O\left(\frac{|\vec{v}|^4}{c^4} \right) \right) \\ &= \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) + O\left(m \frac{|\vec{v}|^4}{c^3} \right) \end{aligned}$$

Der zweite Term in der Klammer ist der nichtrelativistische Ausdruck für die kinetische Energie. Es liegt also nahe, die zeitliche Komponente des Impulses als Energie $E = cp^0$ zu identifizieren, doch zunächst scheint uns der führende Term $E = mc^2$ daran zu hindern, da er nichtrelativistisch nicht auftritt. Bei genauerem Hinsehen stellt sich dieser Term jedoch als eine Konstante heraus, die in der Newton'schen Mechanik überall ohne Probleme subtrahiert werden kann. Gehen wir über die Newton'sche Mechanik hinaus, so bildet dieser Term aber die wohl spektakulärste Vorhersage der speziellen Relativitätstheorie, die inzwischen experimentell vielfach bestätigt ist: Masse ist eine Form von Energie. Zusammenfassend gilt also die Beziehung zwischen Impuls, Masse und Energie:

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

6 Elektrodynamik in relativistischer Notation

Wir kehren nun zurück zur Elektrodynamik und schreiben sie in relativistischer Notation. Da die Relativitätstheorie aus den Erkenntnissen der Elektrodynamik, im Speziellen der konstanten Lichtgeschwindigkeit, abgeleitet ist, ist es nicht verwunderlich, dass sich die Grundgleichungen in dieser Notation vereinfachen.

6.1 Eichpotentiale und Felder

Beginnen wir mit unserer Betrachtung bei den Potentialen ϕ und \vec{A} und deren Verhalten unter Eichtransformationen ψ :

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\psi} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi$$

Mit der Relation $\partial_t = c\partial_0$ erhalten wir

$$\frac{1}{c} \phi \rightarrow \frac{1}{c} \phi - \partial_0 \psi \quad A^i \rightarrow A^i + \partial_i \psi$$

Es ist naheliegend ϕ/c als zeitliche Komponente des 4-Vektor-Potentials $A^0 = \phi/c$ zu betrachten und in der Tat erhalten wir damit die relativistische Beziehung

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi$$

für eine Eichtransformation, unter der elektrische und magnetische Felder invariant sind. Man könnte nun versucht sein, die jeweiligen zeitlichen Komponenten der Vektoren von elektrischem und Magnetfeld zu finden, doch in der Tat benötigen wir das nicht, denn wir haben bereits die relevanten Beziehungen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Beginnen wir damit, die Beziehung für das elektrische Feld in relativistische Notation umzuschreiben

$$E^i = -c(\partial_i A^0 + \partial_0 A^i) = -c(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = c g^{i\mu} (\partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu)$$

so sehen wir, dass die Komponenten des elektrischen Feldes nicht die räumlichen Komponenten eines 4-Vektors, sondern die raum-zeitlichen Komponenten eines antisymmetrischen 4-Tensors zweiter Ordnung darstellen, den wir als $F_{\mu\nu}$ bezeichnen:

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$$

Wir haben also

$$E^i = c g^{i\mu} F_{\mu 0}$$

Was aber sind die räumlichen Komponenten dieses Tensors? Wir haben

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

was wir mit den Komponenten des Magnetfelds vergleichen können

$$B^k = \varepsilon_{kij} \partial_i A_j = -\varepsilon_{kij} \partial_i A_j = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} F_{ij}$$

Wir nennen $F_{\mu\nu}$ den Feldstärketensor und können seine räumlichen Komponenten nun durch das Magnetfeld ausdrücken. Dazu multiplizieren wir die obige Gleichung mit ε_{klm} womit wir

$$\begin{aligned}\varepsilon_{klm}B^k &= -\frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon_{klm}\varepsilon_{kij}}_{\delta_{li}\delta_{mj}-\delta_{lj}\delta_{mi}} F_{ij} \\ &= -\frac{1}{2}(F_{lm} - F_{ml}) \\ &= F_{ml}\end{aligned}$$

erhalten. Zusammen mit den raum-zeitlichen Komponenten, die durch das elektrische Feld gegeben waren erhalten wir also

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ -\frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ -\frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ -\frac{E^3}{c} & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.2 Grundgleichungen für das Eichpotential

Wir hatten gesehen, dass die Grundgleichungen der Elektrodynamik in den Potentialen besonders einfach und symmetrisch ausgedrückt werden können, wenn wir die Lorenz-Bedingung

$$\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

verlangen. In relativistischer Notation lautet diese einfach

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Die daraus resultierenden Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\square\phi &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \square\vec{A} &= \frac{1}{c^2} \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

können wir nun zusammenfassen als

$$c^2 \square A^\nu = \frac{j^\nu}{\varepsilon_0}$$

wobei der d'Alembert-Operator in relativistischer Notation auch

$$\partial_t \partial_t - \partial_i \partial_i = \partial_\mu \partial^\mu$$

geschrieben werden kann und daher insgesamt

$$c^2 \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{j^\nu}{\varepsilon_0}$$

als Grundgleichung in der Lorenz-Eichung identifiziert werden kann. Mit der Identität $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$ erhält diese ihre endgültige Form

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu}$$

6.3 Maxwell-Gleichungen in relativistischer Notation

Um die Maxwell-Gleichungen in relativistischer Notation zu finden, starten wir zunächst mit der Grundgleichung des Eichpotentials

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

und addieren dazu die Ableitung der Lorenz-Eichbedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

nämlich

$$\partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_0 j^\nu &= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu \partial_\mu A^\mu \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu) \\ &= \partial_\mu F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

was genau den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen entspricht. Was die homogenen Maxwell-Gleichungen betrifft, so erinnern wir uns daran, dass diese die Grundlage dafür sind, dass sich elektromagnetische Felder aus Potentialen ausdrücken lassen. Für das Magnetfeld hatte die Relation

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \partial_i B^i = 0$$

zur Folge, dass sich das Magnetfeld als

$$B^i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A^k$$

schreiben lies, da

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A^k = 0$$

Diese einfache Identität können wir auf vier Dimensionen verallgemeinern. Wir haben

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu \partial^\alpha A^\beta = 0$$

wobei $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ der total antisymmetrische Tensor in 4 Dimensionen ist. Aufgrund der Antisymmetrie von ε und der Symmetrie der Ableitungen in $\nu \leftrightarrow \alpha$ sind diese vier Gleichungen trivialerweise erfüllt. Die Antisymmetrie in $\alpha \leftrightarrow \beta$ können wir dazu nutzen, um die Gleichungen als

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu \partial^\alpha A^\beta \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

zu schreiben. Definieren wir schließlich noch den dualen Feldstärketensor

$$\boxed{\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}$$

so können wir die Maxwell-Gleichungen in relativistischer Notation schreiben als

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

6.4 Euler-Lagrange Gleichungen für das elektromagnetische Feld

Wir wollen nun eine große konzeptuelle Brücke zur klassischen Mechanik schlagen und sehen, wie wir die Grundgleichungen für das elektromagnetische Feld als Euler-Lagrange Gleichungen verstehen können. Dabei beginnen wir mit der Wellengleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

für das Eichpotential, von der wir uns erinnern, dass sie für die Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ gilt. Um zu sehen, dass die Wellengleichung die Form von Euler-Lagrange-Gleichungen hat, schreiben wir diese zunächst in etwas expliziterer, nichtrelativistischer Form als

$$\frac{1}{c^2} \ddot{A}^\nu - \partial_i \partial_i A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

Als nächstes stellen wir uns vor, dass wir die räumlichen Ableitungen

$$\partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2}) - f(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2})}{a}$$

aus einer Grenzwertbildung erhalten. Damit ist die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_i f(\vec{x}) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial_i f(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2}) - \partial_i f(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2})}{a} \\ &= \sum_{i=1}^3 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \vec{e}_i a) - 2f(\vec{x}) + f(\vec{x} - \vec{e}_i a)}{a^2} \end{aligned}$$

Somit können wir die Wellengleichung schreiben als

$$\ddot{A}^\nu(\vec{x}) = c^2 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{A^\nu(\vec{x} + \vec{e}_i a) - 2A^\nu(\vec{x}) + A^\nu(\vec{x} - \vec{e}_i a)}{a^2} + \mu_0 j^\nu \right)$$

Rufen wir uns nun die allgemeine Form der Euler-Lagrange Gleichungen in Erinnerung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n}$$

Die q_n sind hierbei verallgemeinerte Koordinaten, die wir mit den Komponenten des Eichpotentials identifizieren müssen. Setzen wir für die Lagrangefunktion also folgende Form an

$$\begin{aligned} L &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2c^2} \dot{A}^\nu(\vec{x}) \dot{A}_\nu(\vec{x}) \right. \\ &\quad \left. + A_\nu(\vec{x}) \left(\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{A^\nu(\vec{x} + \vec{e}_i a) - 2A^\nu(\vec{x}) + A^\nu(\vec{x} - \vec{e}_i a)}{a^2} + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) \right) \right) \\ &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2c^2} \dot{A}^\nu(\vec{x}) \dot{A}_\nu(\vec{x}) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &\quad + \frac{k}{2} \int d^3x \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{A^\nu(\vec{x} + \vec{e}_i a) A_\nu(\vec{x}) - 2A^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) + A^\nu(\vec{x} - \vec{e}_i a) A_\nu(\vec{x})}{a^2} \\ &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2c^2} \dot{A}^\nu(\vec{x}) \dot{A}_\nu(\vec{x}) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &\quad + \frac{k}{2} \int d^3x \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{A^\nu(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2}) A_\nu(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2}) - A^\nu(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2}) A_\nu(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2})}{a^2} \\ &\quad + \frac{k}{2} \int d^3x \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{-A^\nu(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2}) A_\nu(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2}) + A^\nu(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2}) A_\nu(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2})}{a^2} \\ &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2c^2} \dot{A}^\nu(\vec{x}) \dot{A}_\nu(\vec{x}) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &\quad - \frac{k}{2} \int d^3x \sum_{i=1}^3 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{A^\nu(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2}) - A^\nu(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2})}{a} \right) \left(\frac{A_\nu(\vec{x} + \vec{e}_i \frac{a}{2}) - A_\nu(\vec{x} - \vec{e}_i \frac{a}{2})}{a} \right) \\ &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_0 A^\nu(\vec{x})) (\partial_0 A_\nu(\vec{x})) - \frac{1}{2} (\partial_i A^\nu(\vec{x})) (\partial_i A_\nu(\vec{x})) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A^\nu(\vec{x})) (\partial^\mu A_\nu(\vec{x})) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \end{aligned}$$

Wobei k eine noch zu bestimmende Konstante ist. Wir können leicht zeigen, dass dies die korrekten Euler-Lagrange Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\nu(\vec{x})} &= \frac{k}{2c^2} \int d^3x' \frac{\partial (\dot{A}^\rho(\vec{x}') \dot{A}_\rho(\vec{x}'))}{\partial \dot{A}_\nu(\vec{x})} \\ &= \frac{k}{2c^2} \int d^3x' \frac{g^{\rho\sigma} \partial (\dot{A}_\sigma(\vec{x}') \dot{A}_\rho(\vec{x}'))}{\partial \dot{A}_\nu(\vec{x})} \end{aligned}$$

Da der Index \vec{x} kontinuierlich ist, müssen wir die Ableitung als Variationsableitung auffassen, also ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\nu(\vec{x})} &= \frac{k}{2c^2} \int d^3x' \frac{g^{\rho\sigma} \delta(\dot{A}_\sigma(\vec{x}') \dot{A}_\rho(\vec{x}'))}{\delta \dot{A}_\nu(\vec{x})} \\ &= \frac{k}{2c^2} \int d^3x' g^{\rho\sigma} (\delta_\sigma^\nu \dot{A}_\rho(\vec{x}') + \dot{A}_\sigma(\vec{x}') \delta_\rho^\nu) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= \frac{k}{2c^2} (g^{\rho\nu} \dot{A}_\rho(\vec{x}) + \dot{A}_\sigma(\vec{x}) g^{\nu\sigma}) \\ &= \frac{k}{c^2} \dot{A}^\nu(\vec{x})\end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Euler-Lagrange-Gleichungen benötigen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial A_\nu(\vec{x})} &= k \int d^3x' \frac{g^{\rho\sigma} \delta\left(A_\rho(\vec{x}') \left(\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{A_\sigma(\vec{x}' + \vec{e}_i a) - 2A_\sigma(\vec{x}') + A_\sigma(\vec{x}' - \vec{e}_i a)}{a^2} + \mu_0 j_\sigma(\vec{x}')\right)\right)}{\delta \dot{A}_\nu(\vec{x})} \\ &= k g^{\nu\sigma} \left(\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{A_\sigma(\vec{x} + \vec{e}_i a) - 2A_\sigma(\vec{x}) + A_\sigma(\vec{x} - \vec{e}_i a)}{a^2} + \mu_0 j_\sigma(\vec{x}) \right) \\ &\quad + \frac{k}{2} g^{\rho\nu} \int d^3x' A_\rho(\vec{x}') \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{\delta^3(\vec{x}' + \vec{e}_i a - \vec{x}) - 2\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) + \delta^3(\vec{x}' - \vec{e}_i a - \vec{x})}{a^2} \\ &= k \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{A^\nu(\vec{x} + \vec{e}_i a) - 2A^\nu(\vec{x}) + A^\nu(\vec{x} - \vec{e}_i a)}{a^2} + \mu_0 j^\nu(\vec{x})\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass aus der Lagrange-Funktion

$$L = k \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(\vec{x})) (\partial^\mu A^\nu(\vec{x})) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right)$$

tatsächlich die Wellengleichung für das elektromagnetische Potential in der Lorenz-Eichung folgt. Wir können versuchen noch einen Schritt weiter zu gehen und die Lagrange-Funktion in den Feldern $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ auszudrücken, anstatt in den Potentialen A_μ . Dabei können wir uns wieder zu Nutze machen, dass in der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ gilt und daher $\partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$. Wir integrieren zunächst den ersten Term in der Lagrange-Funktion partiell, wobei wir annehmen, dass die Randterme verschwinden (da wir wie üblich die Felder auf einen beliebig großen aber endlichen Raum begrenzen):

$$\begin{aligned}L &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(\vec{x})) (\partial^\mu A^\nu(\vec{x})) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &= k \int d^3x \left(-\frac{1}{2} A_\nu(\vec{x}) \partial_\mu \partial^\mu A^\nu(\vec{x}) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &= k \int d^3x \left(-\frac{1}{2} A_\nu(\vec{x}) \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu(\vec{x}) - \partial^\nu A^\mu(\vec{x})) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(\vec{x})) (\partial^\mu A^\nu(\vec{x}) - \partial^\nu A^\mu(\vec{x})) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right) \\ &= k \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(\vec{x})) F^{\mu\nu}(\vec{x}) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right)\end{aligned}$$

Da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch in $\mu \leftrightarrow \nu$ ist, trägt vom Ausdruck $\partial_\mu A_\nu(\vec{x})$, den es multipliziert, ebenfalls nur der antisymmetrische Anteil $(\partial_\mu A_\nu(\vec{x}) - \partial_\nu A_\mu(\vec{x}))/2 = F_{\mu\nu}(\vec{x})/2$ bei und wir erhalten schließlich

$$L = k \int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(\vec{x}) F^{\mu\nu}(\vec{x}) + \mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right)$$

als Ausdruck für die Lagrange-Funktion der Elektrodynamik.

6.5 Die Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes

Wir wollen nun die Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes finden und damit auch die bisher unbekannte Konstante k in der Lagrangefunktion. Wir beginnen damit, die konjugierten Impulse zu berechnen. Diese sind

$$\begin{aligned}\Pi_\nu(\vec{x}) &= \frac{\delta L}{\delta \partial^0 A^\nu(\vec{x})} \\ &= \frac{k}{2}(F_{0\nu} - F_{\nu 0}) \\ &= kF_{0\nu}\end{aligned}$$

woraus die Hamiltonfunktion

$$H[x_q^i, p^i, A, \Pi] = \int d^3x \left(\Pi_\nu(\vec{x}) \partial^0 A^\nu(\vec{x}) - \frac{k}{4} F_{\mu\nu}(\vec{x}) F^{\mu\nu}(\vec{x}) - k\mu_0 j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right)$$

resultiert. Ersetzen wir die konjugierten Impulse wieder durch Ableitungen der Potentiale so finden wir, dass die ersten beiden Terme des Integranden eine Energiedichte

$$\begin{aligned}h_F &= k \left(F_{0\nu} \partial^0 A^\nu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\ &= k \left(F_{0\nu} F^{0\nu} + F_{0\nu} \partial^\nu A^0 - \frac{1}{4} (F_{0\nu} F^{0\nu} + F_{\nu 0} F^{\nu 0} + F_{ij} F^{ij}) \right) \\ &= k \left(F_{0\nu} F^{0\nu} - \frac{1}{2} F_{0\nu} F^{0\nu} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + F_{0i} \partial^i A^0 \right) \\ &= k \left(\frac{1}{2} F_{0\nu} F^{0\nu} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - F_{0i} \partial_i A^0 \right) \\ &= k \left(-\frac{1}{2} F_{0i}^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2 - F_{0i} \partial_i A^0 \right) \\ &= k \left(-\frac{1}{2c^2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2} \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{\nabla} \frac{\Phi}{c} \right) \\ &= -\frac{k}{2} \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) - k \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \Phi\end{aligned}$$

liefern. Setzen wir den Integranden wieder in die Hamiltonfunktion ein und integrieren den letzten Term partiell so erhalten wir

$$\begin{aligned}H &= -\frac{k}{2} \int d^3x \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + \frac{k}{c^2} \int d^3x \Phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - k \int d^3x \mu_0 j^\nu A_\nu \\ &= -\frac{k}{2} \int d^3x \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + \frac{k}{\varepsilon_0 c^2} \int d^3x \Phi \rho - k\mu_0 \int d^3x j^\nu A_\nu \\ &= -\frac{k}{2} \int d^3x \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + k\mu_0 \int d^3x j^0 A_0 - k\mu_0 \int d^3x j^\nu A_\nu \\ &= -\frac{k}{2} \int d^3x \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) + k\mu_0 \int d^3x \vec{j} \cdot \vec{A}\end{aligned}$$

Der zweite Term ist nun offensichtlich ein Quellterm. Die Energiedichte des reinen elektromagnetischen Feldes können wir daher ablesen als

$$u = -\frac{k}{2} \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right)$$

Vergleichen wir dies mit der Energiedichte des elektromagnetischen Strahlungsfeldes die wir zuvor schon abgeleitet hatten

$$\begin{aligned}u &= \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right)\end{aligned}$$

so können wir die bisher unbestimmte Konstante k ablesen als

$$k = -\frac{1}{\mu_0}$$

Damit erhält die Lagrangefunktion ihre endgültige Form

$$L = - \int d^3x \left(\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(\vec{x}) F^{\mu\nu}(\vec{x}) + j^\nu(\vec{x}) A_\nu(\vec{x}) \right)$$

6.6 Kovariante Form der Euler-Lagrange Gleichungen

Wir wissen nun, dass wir die Maxwell-Gleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen verstehen und daher die Elektrodynamik in den Lagrange-Formalismus der Mechanik einbetten können. Trotzdem ist die Herleitung dieser Gleichungen, wie wir sie im vorletzten Abschnitt betrieben haben, nicht relativistisch und zeichnet die Zeit gegenüber den räumlichen Richtungen aus. Da wir nun aber die Lagrange-Funktion selbst haben, können wir versuchen, die Maxwell-Gleichungen aus dem noch fundamentaleren Prinzip der extremalen Wirkung herzuleiten.

6.6.1 Variation der Wirkung

Betrachten wir zunächst eine generische Wirkung

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi](x)$$

wobei wir \mathcal{L} als Lagrange-Dichte bezeichnen. Die Variable ϕ steht hier stellvertretend für ein beliebiges Feld $\phi(x)$, wobei x den 4-Vektor bezeichnet. Variieren wir das Feld $\phi(x)$ in einer beliebigen, endlichen Region, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \int d^4x' \left(\frac{\delta \mathcal{L}(x')}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) + \frac{\delta \mathcal{L}(x')}{\delta \partial_\mu \phi(x)} \delta \partial_\mu \phi(x) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta \phi(x) \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi(x) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi(x) \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi(x) \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi(x) \Big|_{\partial \mathbb{R}^4} + \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi(x) \end{aligned}$$

Der erste Term der letzten Zeile verschwindet, da die Variation $\delta \phi(x)$ auf einen endlichen Bereich begrenzt ist. Verlangen wir nun, dass die Variation der Wirkung verschwindet, so erhalten wir die Bedingung

$$\int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi(x) = 0$$

für eine beliebige Variation des Feldes $\delta \phi(x)$. Da die Variation an jedem Punkt x verschieden sein kann, kann dies nur erfüllt sein, wenn der Integrand verschwindet, also

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0}$$

Dies ist die verallgemeinerte Form der Euler-Lagrange Gleichung für eine relativistische Feldtheorie.

6.6.2 Die kovarianten Euler-Lagrange-Gleichungen der Elektrodynamik

Die Wirkung, als zeitliches Integral über die Lagrange-Funktion, ist für die Elektrodynamik

$$S = - \int dt \int d^3x \left(\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(\vec{x}, t) F^{\mu\nu}(\vec{x}, t) + j^\nu(\vec{x}, t) A_\nu(\vec{x}, t) \right)$$

oder, in kovarianter Notation,

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \left(\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + j^\nu(x) A_\nu(x) \right)$$

Wir sehen damit, dass die Wirkung der Elektrodynamik als ein 4-dimensionales Integral über die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\nu(x) A_\nu(x) \right)$$

geschrieben werden kann. Wie wir zuvor gesehen haben, lässt sich dies in Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ auch schreiben als

$$\mathcal{L}[A_\nu, \partial_\mu A_\nu] = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + j^\nu A_\nu \right)$$

Dies ist genau die Form der Lagrange-Dichte, wie wir sie in der allgemeinen Ableitung des letzten Absatzes benötigt haben. Folglich resultieren aus der Variation der Wirkung die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0$$

Wir haben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{c} j^\nu$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{1}{c\mu_0} \partial^\mu A^\nu$$

womit die verallgemeinerte Euler-Lagrange-Gleichung zu

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

wird, was genau der Wellengleichung für Potentiale in Lorenz-Eichung entspricht.

6.7 Bewegte Punktladungen

Nachdem wir nun den Lagrange-Formalismus für elektromagnetische Felder entwickelt haben, stellt sich die Frage was genau unser Quellterm j^ν darstellt. Die einzig sinnvolle Antwort darauf, die wir bisher kennen, ist dass j^ν elektrisch geladene, mechanische Objekte darstellt. Allerdings müssen wir an dieser Stelle vorsichtig sein um nicht allzu allgemeine Objekte als Quellen zuzulassen. Der Grund dafür ist, dass uns die Elektrodynamik dazu gezwungen hat die gesamte Mechanik neu, relativistisch, umzuformulieren. Wir haben die direktesten Konsequenzen dieser Umformulierung im letzten Kapitel behandelt, aber es gibt noch einige weitere, die wir nun bedenken müssen.

6.7.1 Die Unmöglichkeit idealer starrer Körper

Unsere mechanische Vorstellung von festen oder deformierbaren Medien gehört beispielsweise dazu. Um dies deutlich zu sehen betrachten wir einen idealen starren Körper, z.B. in der Form eines Zylinders mit Radius r . Wir können uns z.B. vorstellen, dass der Umfang des Zylinders aus N Massepunkten besteht, die starr miteinander verbunden sind. Da der Umfang des Zylinders $2\pi r$ beträgt, ist der starre Abstand zwischen den Massepunkten $d = 2\pi r / N$. Wenn wir diesen Zylinder nun mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse drehen, so bewegen sich die Punkte in einem Abstand r von der Achse mit einer Geschwindigkeit $v = \omega r$ tangential zum Zylinderrand. Aufgrund der relativistischen Längenkontraktion verkürzen sich die tangentialen Abstände am Zylinderrand für einen ruhenden Beobachter um den Faktor

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - r^2 \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Der ruhende Beobachter würde die starren Massepunkte, die den Zylinderrand bilden, also in einem Abstand $d' = d / \gamma$ voneinander sehen. Entlang des gesamten Kreisumfangs $2\pi r$ würden sich daher

$$\begin{aligned} N' &= \frac{2\pi r}{d'} \\ &= \gamma \frac{2\pi r}{d} \\ &= \gamma \frac{2\pi r N}{2\pi r} \\ &= \gamma N \end{aligned}$$

Massepunkte befinden müssen, was ein Widerspruch zu unserer ursprünglichen Annahme ist. Wir sehen daher dass ein starrer Körper im Sinne einer Ansammlung von Punktmassen, die sich jeweils in einem fixen Abstand zueinander befinden, relativistisch unmöglich ist.

6.7.2 Die Lagrangefunktion einer freien, relativistischen Punktladung

Die Unmöglichkeit ideal starrer Körper ist nur ein Beispiel dafür, dass Konzepte oder Idealisierungen der Mechanik, speziell solche, die nur phänomenologisch eingeführt wurden, für eine grundlegende Beschreibung der Natur nicht zu verwenden sind. Ein weiteres Konzept, das wir aufgeben müssen ist das des Potentials. In der Elektrodynamik haben wir explizit gesehen, wie das elektrostatische Potential durch den Induktionsterm in den Maxwell-Gleichungen ad absurdum geführt wird. Potentiale sind aber ganz allgemein nicht mit der Fernwirkungsfreiheit der relativistischen Mechanik verträglich, weil sie alle eine Fernwirkung implizieren. Wenn wir also versuchen eine fundamental korrekte, relativistische Beschreibung mechanischer Phänomene aufzustellen und dazu zunächst auf alle phänomenologischen Kräfte und Idealisierungen der Newton'schen Mechanik sowie auf die Gravitation als einer Fernwirkungskraft verzichten, welche Objekte bleiben uns? Die Antwort ist geladene Punktmassen, die nur an das elektromagnetische Feld koppeln.⁷ Dies scheint zunächst eine schwere Einbuße zu sein, da viele Phänomene nun plötzlich nicht mehr in der Mechanik beschreibbar sind. Dies gilt aber nur, wenn es unser Ziel ist, möglichst viele Phänomene mit ad-hoc Beschreibungen einfach und näherungsweise zu verstehen. Wenn es dagegen unser Ziel ist, die fundamentalen Kräfte und Naturgesetze zu finden, so können wir es durchaus als Fortschritt betrachten, wenn wir z.B. das Hook'sche Gesetz, die Luftreibung oder die Normalkraft auf einer schiefen Ebene nicht mehr einfach postulieren dürfen. Im Gegenteil sollten wir versuchen ob es uns gelingt, sie alle aus der elektromagnetischen Wechselwirkung herzuleiten und somit ihre phänomenologische Einführung zu begründen. Beginnen wir also in diesem Sinne mit der Energie einer relativistischen Punktmasse m

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

In der Newton'schen Mechanik konnten wir die Bewegungsgleichungen aus der Lagrange-Funktion

$$L = T - V$$

gewinnen, wobei T die kinetische und V die potentielle Energie darstellt. Die Verallgemeinerung dieses Ausdrucks für eine relativistische Punktmasse ist nicht offensichtlich. Wir werden aber sehen, dass in diesem Fall der korrekte nichtrelativistische Grenzfall alleine genügt, um die Lagrangefunktion zu finden. Zu diesem Zweck beginnen wir zunächst mit der nichtrelativistischen Lagrangefunktion eines Massepunkts in einem Potential

$$L[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] = \frac{m \dot{\vec{x}}^2}{2} - V[\vec{x}]$$

Wir wenden nun eine zeitabhängige, nichtrelativistische Koordinatentransformation

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}(t) t \quad \dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}} - \vec{v}(t) - \dot{\vec{v}}(t) t$$

an. In den neuen Koordinaten ist die Lagrange-Funktion also

$$L[\vec{x}', \dot{\vec{x}}'] = \frac{m(\dot{\vec{x}}' + \vec{v}(t) + \dot{\vec{v}}(t) t)^2}{2} - V[\vec{x}' + \vec{v}(t) t]$$

Diese Lagrangefunktion gilt zunächst für beliebige $\vec{v}(t)$. Nun betrachten wir den Spezialfall in dem

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}_E(t)$$

wobei \vec{x}_E die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$m \ddot{\vec{x}}_E = -\vec{\nabla} V[\vec{x}]$$

⁷ Wobei wir auch hier noch die elektrostatische Selbstwechselwirkung der Punktladung ignorieren müssen, da diese wie wir gesehen haben eine divergente Energie liefert. Dies können wir aber, wie in der Elektrostatik besprochen, ohne weitere Probleme machen.

in den Koordinaten \vec{x} darstellt. Betrachten wir nun zusätzlich den Spezialfall, in dem das Potential unabhängig von den Koordinate ist. Die Euler-Lagrange-Gleichung in den Koordinaten \vec{x} lautet dann $m\ddot{\vec{x}}_E = 0$ und die Lösung ist entsprechend

$$\dot{\vec{x}}_E(t) = \vec{v}$$

womit die Lagrange-Funktion in den transformierten Koordinaten

$$L[\vec{x}', \dot{\vec{x}}'] = \frac{m(\dot{\vec{x}}' + \vec{v})^2}{2} - V$$

lautet. Seien wir an dieser Stelle etwas präziser und geben explizit vor, dass die Randbedingungen

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$$

sind. Wenn wir mit diesen Randbedingungen die Wirkung

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L[\vec{x}, \dot{\vec{x}}]$$

variieren und $\delta S = 0$ verlangen, so ist

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}{t_1 - t_0}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t_0) &= \vec{x}(t_0) - \vec{v} t_0 \\ &= \vec{x}_0 - \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}{t_1 - t_0} t_0 \\ &= \frac{\vec{x}_0 t_1 - \vec{x}_0 t_0 - \vec{x}_1 t_0 + \vec{x}_0 t_0}{t_1 - t_0} \\ &= \frac{\vec{x}_0 t_1 - \vec{x}_1 t_0}{t_1 - t_0} \\ &= \frac{\vec{x}_0 t_1 - \vec{x}_1 t_1 + \vec{x}_1 t_0 + \vec{x}_1 t_1}{t_1 - t_0} \\ &= \vec{x}_1 - \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_0}{t_1 - t_0} t_1 \\ &= \vec{x}(t_1) - \vec{v} t_1 \\ &= \vec{x}'(t_1) \end{aligned}$$

Die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung in den Koordinaten \vec{x}' ist daher einfach

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}'(t_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}'(t) = 0$$

also eine unbewegte Punktmasse. Was uns an dieser elementaren Betrachtung interessiert ist nun zunächst die Wirkung in ihrem Minimum. Wir schreiben dafür unsere Wirkung etwas um

$$\begin{aligned} L[\vec{x}', \dot{\vec{x}}'] &= \frac{m(\dot{\vec{x}}' + \vec{v})^2}{2} - V \\ &= \frac{m\dot{\vec{x}}'^2}{2} + m\dot{\vec{x}}' \cdot \vec{v} + \underbrace{\frac{m\vec{v}^2}{2}}_{-V'} - V \\ &= \frac{m\dot{\vec{x}}'^2}{2} + m\dot{\vec{x}}' \cdot \vec{v} - V' \end{aligned}$$

wobei wir alle nicht von der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}'$ abhängigen Teile in dem Potential V' zusammengefasst haben. Wir sehen nun, dass für dieses spezielle Koordinatensystem, in dem die Euler-Lagrange-Gleichung eine unbewegte Punktmasse $\dot{\vec{x}}' = 0$ liefert, das Minimum der Wirkung bei der Lagrange-Funktion

$$L_{\min} = -V'$$

erreicht wird, wobei V' der von der Geschwindigkeit unabhängige Teil der Energie der Punktmasse ist. Da dies im Grenzwert verschwindender Geschwindigkeit gilt, können wir davon ausgehen, dass dies in der relativistischen Betrachtung weiterhin gilt. Der nicht von der Geschwindigkeit abhängige Teil der Energie einer freien, relativistischen Punktmasse ist aber $V' = mc^2$. Wir setzen daher zunächst

$$L_{\min} = -mc^2$$

und bilden daraus die Wirkung für die Trajektorie mit minimaler Wirkung

$$S_{\min} = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} dt$$

Dieses Integral, das nur im Spezialfall $\dot{x}' = 0$ gilt, kann sehr einfach in eine vom Bezugssystem unabhängige Form gebracht werden. Wir erinnern uns dass

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^i dx^i$$

Mit der Wahl der Koordinaten \dot{x}' sind wir in ein ausgezeichnetes Bezugssystem gegangen, das durch

$$\dot{x}' = 0 \quad \Rightarrow \quad dx^i = 0$$

gekennzeichnet ist und in dem daher $dt = d\tau$. Es liegt daher nahe, die relativistische Wirkung einer freien Punktmasse für den allgemeinen Fall als

$$S = -mc^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau$$

zu schreiben.

6.7.3 Die Euler-Lagrange-Gleichung einer freien, relativistischen Punktladung

Betrachten wir nun, ob die Wirkung die wir im letzten Abschnitt erhalten haben, zu vernünftigen Ergebnissen führt. Dazu leiten wir zunächst die Euler-Lagrange-Gleichungen aus der Wirkung ab. Wir haben

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} dx^i dx^i} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} dt \end{aligned}$$

womit die Wirkung sich als

$$S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} dt$$

mit der Lagrange-Funktion

$$L[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$$

schreiben lässt. Die Variation dieser Wirkung ergibt daher

$$\begin{aligned} \delta S[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] &= -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{-\frac{\dot{\vec{x}}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \delta(\dot{\vec{x}}) dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \delta\vec{x} \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \right) \delta\vec{x} dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \right) \delta\vec{x} dt \end{aligned}$$

Da die Variation $\delta\vec{x}$ beliebig ist, verschwindet die Variation der Wirkung nur, wenn auch der Integrand gleich null ist, woraus die korrekte Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \\ &= \frac{\ddot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} + \frac{\dot{\vec{x}}(\ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}})}{c^2 \left(1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

also

$$\ddot{\vec{x}} = 0$$

folgt. Der zweite wichtige Punkt ist der korrekte nichtrelativistische Grenzfall der Lagrange-Funktion. Für $|\dot{\vec{x}}| \ll c$ erhalten wir

$$\begin{aligned} L[\vec{x}, \dot{\vec{x}}] &= -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \\ &= -mc^2 \left(1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{2c^2} + O\left(\frac{\dot{\vec{x}}^4}{c^4}\right) \right) \\ &= -mc^2 + \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + O\left(\frac{\dot{\vec{x}}^4}{c^2}\right) \end{aligned}$$

was der korrekten, nichtrelativistischen Lagrange-Funktion einer freien Punktmasse mit dem (relativistisch irrelevanten) konstanten Potential $V = mc^2$ entspricht.

6.7.4 Kopplung an das elektromagnetische Feld

Die bisherigen Betrachtungen haben eine freie, relativistische Punktmasse betroffen und waren daher sehr elementar. Nun aber wollen wir diese Punktmasse an das elektromagnetische Feld koppeln. Wie das prinzipiell funktioniert wissen wir schon: Wir betrachten den Term

$$S_I = -\frac{1}{c} \int d^4x j^\nu(x) A_\nu(x)$$

in der Wirkung des elektromagnetischen Feldes, der an die Quelle j^μ koppelt. Die hier vorkommende Viererstromdichte ersetzen wir durch die einer bewegten Punktladung. Beginnen wir zunächst mit dem einfachsten Fall, nämlich dem einer unbewegten Punktladung q am Ort \vec{x}_q . Für diesen Fall erhalten wir

$$j^0 = c\rho = cq\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_q) \quad \vec{j} = 0$$

und damit

$$S_I = -qc \int_{t_0}^{t_1} A_0 dt$$

Um diesen Ausdruck in einer relativistisch invarianten Form zu schreiben, definieren wir zunächst die Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

die für unseren Spezialfall einer ruhenden Ladung einfach

$$u_q^\mu = c\delta_0^\mu$$

ist. Diese Identität erlaubt es uns, den Quellterm der Wirkung zu schreiben als

$$S_I = -q \int_{\tau_0}^{\tau_1} u_q^\nu A_\nu d\tau$$

was manifest relativistisch kovariant ist. Die gesamte Wirkung, inklusive des elektromagnetischen Terms und des Terms für die relativistische Punktmasse lautet damit

$$S = -\frac{1}{4c\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \int d\tau (qu_q^\nu A_\nu(\vec{x}_q, t) + mc^2)$$

Wir schreiben das Integral über die Eigenzeit $d\tau$ noch in ein Integral über die Zeitkoordinate dt um. Dazu verwenden wir die Identitäten

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} dt$$

sowie

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} \\ &= c \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{dx^i}{d\tau} \\ &= \frac{dx^i dt}{dt d\tau} \\ &= \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4c\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \int dt (qu_q^\nu A_\nu(\vec{x}_q, t) + mc^2) \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \\ &= -\frac{1}{4c\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \int dt (qu_q^0 A_0(\vec{x}_q, t) + qu_q^i A_i(\vec{x}_q, t) + mc^2) \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \\ &= -\frac{1}{4c\mu_0} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \int dt \left(qc A_0(\vec{x}_q, t) + q \dot{x}_q^i A_i(\vec{x}_q, t) + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \right) \\ &= \int dt \left(-\frac{1}{4\mu_0} \int d^3x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \left(q(c A_0(\vec{x}_q, t) + \dot{x}_q^i A_i(\vec{x}_q, t)) + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion einer relativistischen Punktladung q mit Masse m , die an ein elektromagnetisches Feld koppelt ist also

$$L = -\frac{1}{4\mu_0} \int d^3x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + q(-cA^0(\vec{x}_q, t) + \dot{x}^i A^i(\vec{x}_q, t)) - mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}$$

6.7.5 Die Hamiltonfunktion einer gekoppelten Punktladung

Nun wollen wir noch die Hamiltonfunktion des System bestimmen. Da wir die Hamiltonfunktion des elektromagnetischen Feldes selbst schon bestimmt haben, sehen wir uns nur noch den Teil der Lagrangefunktion an, der die Punktmasse und ihre Kopplung mit dem elektromagnetischen Feld beschreibt. Dieser ist

$$L_q = q(-cA^0(\vec{x}_q, t) + \dot{x}^i A^i(\vec{x}_q, t)) - mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}$$

Die konjugierten Impulse ergeben sich dann aus

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_q^i} \\ &= qA^i(\vec{x}_q, t) + m \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Die Umkehrung der ersten Relation liefert

$$\frac{\dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = \frac{1}{m}(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))$$

und damit

$$\frac{\dot{x}^2}{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} = \frac{1}{m^2}(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))$$

oder

$$\dot{x}^2 \left(1 + \frac{1}{m^2 c^2} (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t)) \right) = \frac{1}{m^2} (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))$$

Wir erhalten also

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{\frac{m^2}{(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))} + \frac{1}{c^2}}$$

womit

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{m^2 c^2}{(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))} + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{\frac{(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))}{m^2 c^2}} + 1}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{m^2 c^2 + (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))}} \end{aligned}$$

Damit ist schliesslich

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t)) \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \\ &= \frac{c(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))}{\sqrt{m^2 c^2 + (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))}} \end{aligned}$$

woraus wir die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H_q[\vec{x}_q, t^i, p^i] &= p^i \dot{x}^i + q(cA^0(\vec{x}_q, t) - \dot{x}^i A^i(\vec{x}_q, t)) + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \\ &= \dot{x}^i (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t)) + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} + qcA^0(\vec{x}_q, t) \\ &= c \frac{(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t)) + mc^2}{\sqrt{m^2 c^2 + (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))}} + qcA^0(\vec{x}_q, t) \\ &= c \sqrt{m^2 c^2 + (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))} + qcA^0(\vec{x}_q, t) \\ &= \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 (p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))(p^i - qA^i(\vec{x}_q, t))} + qcA^0(\vec{x}_q, t) \end{aligned}$$

erhalten. Dies können wir kompakter schreiben als

$$H = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 \vec{P}^2} + q\Phi(\vec{x}_q, t)$$

wobei wir den modifizierten Impuls

$$\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}_q, t)$$

definiert haben. Vergleichen wir diese Gesamtenergie der gekoppelten Punktmasse mit der der freien

$$H_0 = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 \vec{p}^2}$$

so sehen wir, dass die Kopplung an ein elektromagnetisches Feld den Impuls modifiziert und einen zusätzlichen Term $q\Phi(\vec{x}_q, t)$ bewirkt. In relativistischer Notation können wir diese Modifikationen kompakter schreiben als

$$P^\mu = p^\mu - qA^\mu(x_q)$$

und erhalten daraus die Beziehung

$$P^\mu P_\mu = m^2 c^2$$

Interessanterweise erfolgt die Kopplung des elektromagnetischen Feldes über die Potentiale und nicht über die Felder selbst, wie man naiv erwarten könnte. Dies wird vor allem in der quantenmechanischen Betrachtung noch weitreichende Folgen haben.