Rechenmethoden

Szabolcs Borsanyi

Bergische Universität Wuppertal

2016

Die aktuelle Version dieses Dokumentes kann unter http://particle.uni-wuppertal.de/borsanyi/script/rmsb.pdf erreicht werden

Eine $n \times n$ matrix A ist hermitisch, wenn

$$A = A^+, \qquad \text{d.h.} \qquad A_{ij} = A_{ji}^* \tag{1}$$

Dann gilt für ein beliebiger Vektor b

$$(Ab)^+ = b^+ A^+ = b^+ A \tag{2}$$

Hier b ist ein $n \times 1$ Matrix (oder Spaltenvektor), und b^+ ist ein Zeilenvektor, dessen komponenten einmal konjugiert sind.
Da $\det A^+ = (\det A)^*$ immer gilt, ist die Determinante einer hermitischen Matrix immer reell.
Wenn alle Komponente in A reell sind, dann bedeutet die Hermitizität, dass A symmetrisch ist.

Eine $n \times n$ matrix U ist unitär, wenn

$$U^+ U = UU^+ = \mathbb{1}, \qquad \text{d.h.} \qquad U^{-1} = U^+ \,, \qquad \text{oder} \qquad U_{ik} U^*_{jk} = \delta_{ij} \tag{3}$$

Da $\det AB = \det A \det B$ immer gilt, haben wir

$$1 = \det UU^+ = \det U \det U^+ = \det U (\det U)^* = |\det U|^2 \,, \tag{4}$$

d. h. $\det U$ ist auf dem Einheitskreis.
Die Spaltenvektoren in einer unitären Matrix sind normiert und paarweise orthogonal, und so bilden sie eine orthonormierte Basis:

$$U = \begin{pmatrix} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \end{pmatrix}, \qquad U_{ij} = b^{(j)}_i \tag{5}$$

$$U^+ U = \mathbb{1} \Longrightarrow (b^{(i)}_k)^* b^{(j)}_k = \delta_{ij} \qquad \text{also} \quad b^{(i)+} b^{(j)} = \delta_{ij} \tag{6}$$

Ähnliches gilt für die Zeilenvektoren auch.
Analog werden orthogonale Matrizen definiert: $O^T O = \mathbb{1}$

In zwei Dimensionen betrachte die Drehmatrix

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{7}$$

In der Tat, für ein vektor mit $b = (x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha)^+$:

$$R(\phi)b = \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\alpha - r\sin\phi\sin\alpha \\ r\sin\phi\cos\alpha + r\cos\phi\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi+\alpha) \\ r\sin(\phi+\alpha) \end{pmatrix} \tag{8}$$

In drei dimensionen kann eine generische Drehung als Produkt von drei elementaren Drehungen geschrieben:

$$R(\psi,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Drehmatrizen sind orthogonal und reel (daher auch uintär),

$$R(\phi)^{-1} = R(-\phi) = R(\phi)^+ \tag{9}$$

Die Determinante ist immer 1. (z. B. $\det R(\phi) = \cos\phi\cos\phi + \sin\phi\sin\phi = 1$.)

Die Spiegelungen haben die Eigenschaft, dass zweimal auf einen Vektor v angewandt v zurückgibt:

$$S^2 = \mathbb{1} \tag{10}$$

Da Spiegelungen auch hermitisch (und auch reell) sind, sind sie auch unitär (und orthogonal).
Die determinante der Spiegung ist ± 1, die triviale Spiegelung ist die Einheitsmatrix.
Beispiel: Spiegelung auf die $x - y$ Ebene:

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Eine Spiegelung auf eine andere Ebene ist möglich wenn man den Vektor zuerst dreht, dann spiegelt, und dann zurückdreht:

$$S_\phi = R(\phi)^+ S_{xy} R(\phi) \tag{12}$$

Das Ergebnis ist immer noch eine Spiegelung: $S_\phi S_\phi = \mathbb{1}$, da

$$S_\phi S_\phi = R(\phi)^+ S_{xy} R(\phi) R(\phi)^+ S_{xy} R(\phi) = R(\phi)^+ S_{xy} S_{xy} R(\phi) = R(\phi)^+ R(\phi) = \mathbb{1} \tag{13}$$

Wenn U_1 und U_2 Matrizen beide unitär sind (z.B. Rotationen, Spiegelungen...), dann ist ihr Produkt auch unitär:

$$(U_1 U_2)(U_1 U_2)^+ = U_1 U_2 U_2^+ U_1^+ = U_1 U_1^+ = \mathbb{1} \tag{14}$$

Hier haben wir die **assoziativität** des Matrizenproduktes benutzt, dies gilt weiterhin für unitäre Matrizen.
Einheitselement: Die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ ist auch unitär.
Wenn U unitär ist, so ist auch U^{-1}. In der Tat, $U^{-1} = U^+$,

$$(U^+)(U^+)^+ = U^+ U = \mathbb{1} \tag{15}$$

So sind die vier Gruppeneigenschaften erfüllt. Die Gruppe, die die $n \times n$ unitrr̈e Matrizen bilden heißt: $U(n)$. Sie hat eine Untergruppe nur mit den Matrizen mit $\det U = 1$, sie heißt $SU(n)$.
Sind die $n \times n$ Matrizen reell, so spricht man von der $O(n)$ Gruppe. Zur Gruppe $SO(n)$ gehören die orthogonalen Matrizen mit $\det = 1$

Die unitäre Matrizen beschreiben eine Koordinatenransformation:

$$b' = Ub \tag{16}$$

Das skalare Produkt ist dabei erhalten:

$$a' = Ua, \quad b' = Ub \qquad \Longrightarrow \qquad a'^{+}b' = Ua^{+}Ub = a^{+}U^{+}Ub = a^{+}\mathbb{1}b = a^{+}b \tag{17}$$

Auch $a^{+}Ab$ soll erhalten bleiben:

$$(a^{+}Ab)' = (Ua)^{+}A'Ub = a^{+}U^{+}A'Ub \overset{!}{=} a^{+}Ab \tag{18}$$

Damit letzteres tatsächlich erfüllt wird, definieren wir die Transformation einer Matrix so:

$$U^{+}A'U = A, \qquad \Longrightarrow \qquad A' = UAU^{+} \tag{19}$$

Nach dieser Transformation bleiben hermitische Matrizen (A) hermitisch, und unitäre Matrizen (V) unitär:

$$A'^{+} = (UAU^{+})^{+} = UA^{+}U^{+} = UAU^{+} = A' \tag{20}$$

$$V'^{+}V' = (UVU^{+})^{+}UVU^{+} = UV^{+}U^{+}UVU^{+} = UV^{+}VU^{+} = UU^{+} = \mathbb{1} \tag{21}$$

Wenn U eine unitäre Transformation ist, dann gelten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, A' &= \sum_{i=1}^{n} {A'}_{ii} = \sum_{ijk} U_{ij} A_{jk} {U^{+}}_{ki} = \sum_{ijk} U_{ij} A_{jk} U^{*}_{ik} \\
&= \sum_{ijk} U_{ij} U^{*}_{ik} A_{jk} = \sum_{jk} \delta_{jk} A_{jk} = \sum_{j} A_{jj} = \mathrm{Tr}\, A \qquad (22) \\
\det(A') &= \det(UAU^{+}) = \det U \det A (\det U)^{*} = \det A \qquad (23)
\end{aligned}
$$

(wir verwendeten die Regel für unitäre Matrizen $|\det U| = 1$).
D.h., Spur und Determinante sind bei einer unitären Transformation erhalten.

Betrachte eine $n \times n$ hermitische Matrix A. Wenn wir eine Zahl $\lambda \in \mathcal{C}$ und einen Vektor v (keinen Nullvektor) mit der folgenden Eigenschaft finden:

$$Av = \lambda v \tag{24}$$

so dürfen wir λ als einer der Eigenwerte der Matrix A, und v als der zu λ gehörige Eigenvektor bezeichnen.
Auch nicht-hermitische Matrizen haben Eigenwerte und Eigenvektore. Die hermitischen Matrizen jedoch haben günstige Eigenschaften: z. B.
Die Eigenwerte einer hermitischen Matrix sind immer reell:

$$Av = \lambda v, \quad \text{und dann} \quad v^+ Av = \lambda v^+ v \tag{25}$$

andererseits:

$$v^+ Av = v^+ A^+ v = (Av)^+ v = (\lambda v)^+ v = \lambda^* v^+ v\,, \tag{26}$$

daher ist $\lambda = \lambda^*$.

Die Eigenvektoren sind keine Nullvektoren, und können immer normiert werden. Zwei Eigenvektoren sind nicht 'identisch' wenn die nicht einfach mit einem Skalar ineinander umskalierbar sind.

$$v_1 \text{ und } v_2 \text{ gelten als unterschiedlich } : \nexists\, \alpha \in \mathcal{C} : v_1 = \alpha v_2 \tag{27}$$

Wenn v_1 und v_2 zu unterschiedlichen Eigenwerten gehören, sind sie natürlich auch unterschiedlich.

Behauptung: Wenn eine hermitische Matrix A zwei unterschiedliche Eigenwerte (λ_1, λ_2) und Eigenvektoren (v_1, v_2) hat, so sind v_1 und v_2 orthogonal.

Beweis:

$$v_2^+ A v_1 = \lambda_1 v_2^+ v_1, \tag{28}$$

$$v_2^+ A v_1 = v_2^+ A^+ v_1 = (A v_2)^+ v_1 = \lambda_2^* v_2^+ v_1 = \lambda_2 v_2^+ v_1 \tag{29}$$

Die zweite Gleichung wird aus der ersten Subtrahiert:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) v_2^+ v_1 \qquad \Longrightarrow v_2^+ v_1 = 0\,. \tag{30}$$

Sind die Eigenwerte gleich $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ aber v_1 und v_2 unterschiedlich, sagt man, dass das Eigenwertproblem entartet ist, oder, dass λ_1 und λ_2 entartete Eigenwerte sind.
Dann v_2 und v_1 sind nicht unbedingt orthogonal, aber dann die lineare Kombination

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \tag{31}$$

ist auch ein Eigenvektor:

$$Av = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \lambda v_2 = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \tag{32}$$

So kann mann (z.B. durch das Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren) statt v_1 und v_2 ein ortoghonales Paar finden, dann sind beide Vektoren Eigenvektoren mit dem Eigenwert λ. Ähnliches gilt für den Fall wenn es mehrere entartete Eigenwerte gibt.
In n Dimensionen gibt es höchstens n Vektoren die eine orthonormierete Basis bilden, so kann es nur n paarweise orthogonale Eigenvektoren geben, also auch höchstens n Eigenwerte.
Behauptung: Eine $n \times n$ hermitische Matrix hat genau n paarweise orthogonale Eigenvektoren (oder es kann so gewählt werden).

Man bezeichne die n Eigenwerte der hermitischen Matrix A als λ_j, die Eigenvektoren als $v^{(j)}$, $j = 1 \dots n$.
Die Eigenvektoren können so gewählt werden, dass sie eine orthonormierte Basis bilden, also

$$v^{(j)+} v^{(k)} = \delta_{jk} \tag{33}$$

Man kann, dann die $v^{(j)}$ Eigenvektoren als Zeilenvektoren in einer unitären Matrix unterbringen:

$$U = \begin{pmatrix} v^{(1)+} \\ \dots \\ v^{(n)+} \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad U^+ U = \mathbb{1} \tag{34}$$

Wird A mit U transformiert, so bekommt man

$$A' = UAU^+ = \begin{pmatrix} v^{(1)+} \\ \dots \\ v^{(n)+} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v^{(1)} & \dots & v^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{(1)+} \\ \dots \\ v^{(n)+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Av^{(1)} & \dots & Av^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v^{(1)+} \\ \dots \\ v^{(n)+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 v^{(1)} & \dots & \lambda_n v^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v^{(1)+} v^{(1)} & \dots & \lambda_n v^{(1)+} v^{(n)} \\ \dots & & \dots \\ \lambda_1 v^{(n)+} v^{(1)} & \dots & \lambda_n v^{(n)+} v^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{35}$$

Diese unitäre Transforamtionsmatrix hat A in Diagonalform verwandelt. Es gelten:

$$\sum_i A_{ii} = \mathrm{Tr} A = \mathrm{Tr} A' = \sum_i A'_{ii} = \sum_i \lambda_i \tag{36}$$

$$\det A = \det A' = \prod_i \lambda_i \tag{37}$$

Wie kann man die Eigenwerte finden?

$$Av = \lambda v\,, \quad \Longrightarrow (A - \lambda \mathbb{1})v = 0 \tag{38}$$

Wenn dafür eine Lösung gibt, ist die Determinante Null:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \tag{39}$$

Die obige Gleichung ist die charakteristische Gleichung, bzw.
$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ ist die charakteristische Polynom.
Bei $n \times n$ hermitischen Matrizen hat $p(\lambda)$ genau n Wurzel.
Diese dürfen auch degeneriert, und komplex werden.
Aufgabe:
Schreibe $p(\lambda)$ in eine brauchbare Form,
finde alle Lösungen zur $p(\lambda) = 0$,
löse einzeln die Vektorgleichungen $(A - \lambda \mathbb{1})v = 0$ für v bei allen λ Eigenwerten.

Man betrachte die 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Sie ist hermitisch wenn $c = b^*$.
Ihr charakteristisches Polynom ist:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc \\ &= \lambda^2 - \lambda \mathrm{Tr}\, A + \det A \end{aligned} \tag{40}$$

Der Wurzelsatz von Vieta sagt uns, dass die Lösungen (x_1 und x_2) einer quadratischen Gleichung $x^2 + ux + v = 0$ erfüllen

$$x_1 + x_2 = -u\,, \qquad x_1 x_2 = v\,. \tag{41}$$

Das entspricht dem, was wir schon wussten: $\mathrm{Tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2$ und $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.
Die Eigenwerte einer allgemeinen Matrix A dürfen komplex werden. Wenn aber $c = b^*$ (A ist hermitisch), dann gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4ad + 4b^* b}}{2} = \frac{1}{2}(a+d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4|b|^2} \tag{42}$$

Die Diskriminante $(a-d)^2 + 4|b|^2$ ist immer positiv, oder Null (wenn $A \sim \mathbb{1}$).

Wir bestimmen die Eigenwerte der hermitischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Das charakteristische Polynom von A heisst: $\lambda^2 - 4\lambda + 3$.
Die Lösungen: $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$, d.h.: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$.
Erster Eigenvektor $v_1 =?$:

$$0 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda_2 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 \\ -1 & 2 - 1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v_1 \tag{44}$$

Für den 2×2 Fall ist es besonders einfach:

$$\begin{pmatrix} p & q \\ ? & ? \end{pmatrix} v = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad v \sim \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} \tag{45}$$

Die zweite Zeile passt automatisch.
det $= 0$ bedeutet: zweite Zeile ist Konstante $\times$ erste Zeile.
So ist $v_1 = (1,1)^T$. v_2 ist senkrecht auf v_1, also $v_2 = (1,-1)^T$.
Normiert: $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$ und $v_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$

In der Quantenmechanik muss man u.a. $U(t) = e^{-itH}$ berechnen.
Der Haken: H ist eine hermitische Matrix.
Die Exponenitalfunktion ist analytisch, wird mit einer Potenzreihe definiert:

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \tag{46}$$

ist A eine Matrix (z.B. $A = itH$) macht die Reihe immer noch Sinn.
Es ist natürlich äusserst schwierig A^{100} zu berechnen. Für alle unitäre transformationen U mit $A' = UAU^+$ gilt:

$$\begin{aligned} A^1 &= A = U^+ A' U && (47) \\ A^2 &= AA = U^+ A' U U^+ A' U = U^+ A'^2 U && (48) \\ &\dots && (49) \\ A^k &= A \dots A = U^+ A' U \dots U^+ A' U = U^+ A'^k U && (50) \end{aligned}$$

U^+ und U kann man rausklammern:

$$e^A = U^+ \left(1 + A' + \frac{A'^2}{2!} + \frac{A'^3}{3!} + \dots \right) U = U^+ e^{A'} U \tag{51}$$

Wenn wir U geschickt wählen, können wir vielleicht A'^{100} berechnen und die Reihe aufsummieren.

Wird U^+ aus den normierten und eventuell orthogonarisierten Eigenvektoren als Spaltenvektoren gebaut, so ist UAU^+ diagonal.
Die diagonalisierte Matrix $A' = UAU^+$ enthält die Eigenwerte

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{52}$$

Jeder Eigenwert komm hier sooft vor, wie viele linear unabhängige Eigenvektoren zu dem Eigenwert gehören (Vielfachheit).
Das Spektrum der Matrix A ist die Menge aller Eigenwerte.
Ist A' diagonal, kann A'^k auch einfach berechnet werden:

$$A'^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \text{aber auch} \quad \exp(A') = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{53}$$

Wir wollen berechnen: $f(A) = U^{+} f(A') U$

$$f(A) = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {v^{(1)}}^{+} \\ {v^{(2)}}^{+} \\ \vdots \\ {v^{(n)}}^{+} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\lambda_1){v^{(1)}}^{+} \\ f(\lambda_2){v^{(2)}}^{+} \\ \vdots \\ f(\lambda_n){v^{(n)}}^{+} \end{pmatrix}$$

$$f(A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) v_i^{(k)} {v_j^{(k)}}^{*} \tag{54}$$

Wenn a und b Vektoren sind (Spaltenmatrizen), dann ist

$$a^+ b = \sum_i a_i^* b_i \quad \text{ein skalares Produkt} \tag{55}$$

$$ab^+ = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & a_1 b_2^* & \dots & a_1 b_n^* \\ a_2 b_1^* & a_2 b_2^* & \dots & a_2 b_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1^* & a_n b_2^* & \dots & a_n b_n^* \end{pmatrix} \quad \text{eine Matrix} \tag{56}$$

Ist v ein Einheitsvektor ($v^+ v = 1$) so hat $P_v = vv^+$ die Wirkung an einem Vektor x, dass Px immer in richtung v zeigt. P_v ist ein Projektor.

$$P \text{ gilt als Projektor, wenn } P^2 = P$$

In der Tat: $P_v P_v x = vv^+ vv^+ x = v(v^+ v)v^+ x = vv^+ x = P_v x$ für alle x.
Hier haben wir mit den Vektoren als $1 \times n$ und $n \times 1$ Matrizen gerechnet, und deren Assoziativität genutzt. Es war dabei $v^+ v$ als ein skalares Produkt erkannt.

Sind $\{v^{(k)}\}$ ein Satz von n orthonormierten Basisvektoren in $\mathbb{R}^n$ (z.B. *alle* Eigenvektoren), dann definieren wir für jeden Basisvektor einen Projektor:

$$P_k = v^{(k)} v^{(k)+} \tag{57}$$

Für einen Vektor x zeigt $P_k x$ in richtung $v^{(k)}$, der Betrag gleicht dem k-ten Koordinaten des Vektors x in dem Koordinatensystem, das von den $v^{(k)}$ Basisvektoren aufgespannt wird.

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \qquad \text{“orthogonalität”} \ \text{keine Summierung} \tag{58}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \mathbb{1} \qquad \text{“vollständigkeit”} \tag{59}$$

Erkärung:
$P_i P_j = v^{(i)} v^{(i)+} v^{(j)} v^{(j)+} = v^{(i)} (v^{(i)+} v^{(j)}) v^{(j)+} = v^{(i)} \delta_{ij} v^{(j)+} = \delta_{ij} P_i$
$\sum_i P_i x = v^{(i)} v^{(i)+} x = v^{(i)} c_i = x$,
wo c_i sind die Koordinaten des x Vektors im System der $v^{(k)}$ Basisvektoren.

Jetzt können wir $f(A)$ endlich berechnen:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) v^{(k)} v^{(k)+} = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_k \qquad (60)$$

Dies gilt auf für $f(x) = x$. So bekommen wir die Projektordarstellung von A:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \, , \qquad (61)$$

und so können wir eine Matrix aus den Eigenvektoren und Eigenwerten wiederherstellen. In dieser Darstellung lässt sich die Potenzreihe leicht berechnen:

$$f(A) = \sum_j c_j A^j = \sum_j c_j (\sum_k \lambda_k P_k)^j = \sum_j c_j \sum_k \lambda_k^j P_k = \sum_k P_k \sum_j c_j \lambda_k^j = \sum_k f(\lambda_k) P_k$$

Wir haben die Orthogonalität der Projektoren genutzt, z.B.:

$$(\sum_k \lambda_k P_k)^2 = \sum_k \lambda_k P_k \sum_i \lambda_i P_i = \sum_k \sum_i \lambda_k \lambda_i P_k P_i = \sum_k \sum_i \lambda_k \lambda_i \delta_{ki} P_k = \sum_k \lambda_k^2 P_k$$

Betrachte die Matrix (den Hamiltonoperator):

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Wir haben schon die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet:

$$\lambda_1 = 1\,, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,; \qquad \lambda_2 = 3\,, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,. \tag{63}$$

Damit sind die Projektoren:

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,; \qquad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Projektordarstellung überprüfen:

$$H = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 1\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3 & 1-3 \\ 1-3 & 1+3 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis für $U = \exp(-itH)$ (Zeitentwicklung in der Quantenmechanik):

$$\begin{aligned} U &= e^{-it\lambda_1}P_1 + e^{-it\lambda_2}P_2 = e^{-it}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-i3t}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-i2t}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der einfachste Fall: $y(t)$ ist eine reelle Funktion von $t \in [a, b]$.

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t) \tag{65}$$

ist eine Differentialgleichung (DGL), wo f ist eine Funktion von zwei Variabeln.
Sie wird von $y(t)$ gelöst wenn Eq. (65) für alle $t \in [a, b]$ Punkte gilt.
Die Lösung, $y(t)$, hat nur eine Variable:
$\rightarrow$ die Differentialgleichung ist also **gewönlich** genannt.
In der Gleichung die höchste Ableitung von $y(t)$ ist die erste:
$\rightarrow$ die Differentialgleichung ist von **erster Ordnung**.
Ist f nur von t abhängig, so können wir die Lösung gleich angeben

$$y(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau + C \tag{66}$$

$y(t)$ ist eine Lösung für alle C Werte, und sonst gibt es keine Lösung.
$\rightarrow$ Eq. (66) ist die **allgemeine Lösung** der DGL.
Die Lösung der DGL finden $\equiv$ die DGL integrieren,
auch wenn f komplizierter ist.

Freier Fall: v ist die Geschwindigkeit, t die Zeit, g ist die Gravitationsbeschleunigung:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g \tag{67}$$

Hier kann man einfach integrieren: $v(t) = -gt + C$.
Ist die Anfangsgeschwindigkeit bekannt bei $t = t_0$, so ist $v_0 + gt_0 = C$.
Radioaktiver Zerfall: Es gebe N Atome, die in jeder Sekunde mit γ Wahrscheinlickeit zerfallen, solange sie noch nicht zerfallen sind.

$$\Delta N = -\gamma N \Delta t, \qquad \text{oder, wenn } \Delta t \to 0 : \qquad \frac{dN(t)}{dt} = -\gamma N(t) \tag{68}$$

Die DGL durch N geteilt: $N'(t)/N(t) = -\gamma$. $N'(t)/N(t)$ kommt bekannt vor:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{d}{dt}\log(N(t)), \quad \Longrightarrow \quad \log(N(t)) = C + \int_{t_0}^{t} (-\gamma) d\tau = C - \gamma(t - t_0)$$

Wenn als **Anfangsbedingung** $N(t_0) = N_0$ gegeben ist:

$$N(t) = \exp(C - \gamma(t - t_0)) = N_0 e^{-\gamma(t - t_0)} \tag{69}$$

Mit einer **Anfangsbedingung** (Wert bei t_0) wird die Lösung eindeutig.

Ist die rechte Seite der DGL $y'(t) = f(y(t), t)$ unabhängig von der Variable (t), heisst die DGL **autonom**.
Eine leichte Verallgemeinerung:

$$y'(t) = f(y(t))A(t) \tag{70}$$

Man erkennt, dass

$$\frac{1}{f(y(t))}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dF(y(t))}{dt}, \quad F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(x)}dx \tag{71}$$

So haben wir nach einer Integration :

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{f(x)}dx = \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \tag{72}$$

Die (einzige) Lösung, die die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt:

$$y(t) = F^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right) \tag{73}$$

Beispiel: $y'(t) = t/y(t) \Longrightarrow \int_{y_0}^{y} xdx = \int_{t_0}^{t} \tau d\tau \Longrightarrow y^2(t) - y_0^2 = t^2 - t_0^2 \Longrightarrow$
$y(t) = y_0\sqrt{1 + (t^2 - t_0^2)/y_0^2}$

Nicht alle DGL sind zu integralen zurückzuführen. Bei linearen Gleichungen hat man oft Hoffnung auf Erfolg. Eine DGL ist linear wenn, die unbekannte Funktion(en) nur linear vorkommt. Gibt es nur eine Unbekannte, so hat man

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \tag{74}$$

Ist $B(t) \equiv 0$, dann heisst Eq. (74) eine homogene lineare DGL von erster Ordnung. Ist $B(t) \neq 0$, dann ist die Gleichung inhomogen.
Lösung der homogene Gleichung (Trennung der Veränderlichen)

$$h'(t) = A(t)h(t) \tag{75}$$

$$h(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right) \tag{76}$$

Die homogene Lösung haben wir schon: $h'(t)/h(t) = A(t)$, $h(t) \neq 0$, es sei denn es sich um die triviale Lösung handelt.

$$
\begin{aligned}
y'(t) - A(t)y(t) &= B(t) && (77)\\
y'(t) - \frac{h'(t)}{h(t)}(t)y(t) &= B(t) && (78)\\
\frac{h(t)y'(t) - h'(t)y(t)}{h^2(t)} &= \frac{B(t)}{h(t)} && (79)\\
\frac{d}{dt}\frac{y(t)}{h(t)} &= \frac{B(t)}{h(t)} && (80)\\
\frac{y(t)}{h(t)} &= \int_{t_0}^{t} \frac{B(\tau)}{h(\tau)} d\tau + \mathrm{const} && (81)
\end{aligned}
$$

Die volle Lösung:

$$
y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} B(t')e^{-\int_{t_0}^{t'} A(\tau)d\tau} dt' \right] \tag{82}
$$

Man betrachte die Differentialgleichung

$$y'(t) = 2ty + t^3 \tag{83}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.
Zuerst wird die homogene Gleichung gelöst:

$$y'(t) = 2ty \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{\int_0^t 2\tau d\tau} = y_0 e^{t^2} \tag{84}$$

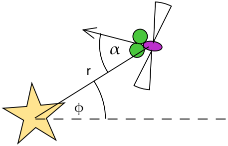
Die inhomognene Lösung lautet:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{t^2}\left(y_0 + \int_0^t e^{-\tau^2}\tau^3 d\tau\right) \\ &= e^{t^2}\left(y_0 + \int_0^{t^2} e^{-\xi}\frac{\xi}{2} d\xi\right) \end{aligned} \tag{85}$$

Nur das Integral: $\int_0^{t^2} e^{-\xi}\xi d\xi = -[e^{-\xi}\xi]_0^{t^2} - \int_0^{t^2}(-e^{-\xi})1 d\xi = 1 - e^{-t^2}(1 + t^2)$

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{2}\right)e^{t^2} - \frac{t^2+1}{2} \tag{86}$$

Aufgabe: Eine Fliege fliegt nicht direkt ins Licht hinein, sondern dreht sich immer in einer Winkel α daneben. Beschreibe die Bahn $r(\phi)$, die die Fliege befliegt.



Formulierung der DGL: Die Bewegung innerhalb einer infinitesimalen Zeitspanne Δt mit v geschwindigkeit:

$$r\Delta\phi = v\Delta t \sin\alpha \tag{87}$$
$$\Delta r = -v\Delta t \cos\alpha \tag{88}$$

oder

$$\frac{\Delta r}{\Delta\phi} = -r(\phi)/\tan\alpha \tag{89}$$

also

$$r'(\phi) = -r(\phi)/\tan\alpha \tag{90}$$

Lösung:

$$r(\phi) = r_0 e^{-\phi/\tan\alpha} \tag{91}$$

Harmonischer Oszillator (Feder + Gewicht):

$$\text{Gesamtenergie } E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{92}$$

m ist die Masse, k die Federkonstante, v die Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{x}(t)$.

$$(\dot{x}(t))^2 = 2E/m - (k/m)x^2 \tag{93}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{2E/m - (k/m)x^2}} = 1 \tag{94}$$

Das Integral: $t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{(2E/m-(k/m)x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2E/m}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(k/2E)x^2}}$.

Mit $y = x\sqrt{k/2E}$:

$t - t_0 = \frac{1}{2E/m} \int \frac{dy\sqrt{2E/k}}{1-y^2} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin y = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{k}{2E}}\right)$

Invertiert: $x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega(t - t_0))$ mit $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Wenn es nicht nur eine Differentialgleichung gibt, sondern mehrere, die miteinander gekoppelt sind, handelt es sich um ein System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= F_1(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), t) && (95)\\ \dot{y}_2(t) &= F_2(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), t) && (96)\\ &\vdots && (97)\\ \dot{y}_n(t) &= F_n(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t), t) && (98) \end{aligned}$$

Ein solches System kann als eine Gleichung im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ betrachtet werden:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t), t) \qquad (99)$$

Die Variabeln $y_1, \ldots, y_n$ können z.B. Koordinaten eines Körpers bedeuten $(x(t), y(t)$ oder $r(t), \phi(t))$, aber auch Koordinaten unterschiedlicher Objekte.

Behauptung: Die Lösung *(wenn es eine gibt)* ist eindeutig, wenn bei $t = t_0$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y_0} \in R^n$ vorgegeben ist.

Wenn die n-te Ableitung einer Funktion $y(t)$ mit den niedrigeren Ableitungen, und eventuell mit dem Funktionswert $y(t)$ und t durch eine Gleichung verbunden ist, heißt die Gleichung eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \ldots \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}}\right) \tag{100}$$

Einfaches Beispiel: Die Energieerhaltung ableiten:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{y}(t))^2 + \frac{1}{2} k y^2(t), \tag{101}$$

$$\to 0 = m\dot{y}(t)\ddot{y}(t) + k y(t)\dot{y}(t) \tag{102}$$

Wenn $\dot{y}(t) \neq 0$, hat man:

$$m\ddot{y} = -ky \tag{103}$$

Diese Gleichung ist linear, autonom (Zeitunabhängig), und homogen (keine externe Kraft).

Lösung: $y(t) = A \sin(\sqrt{k/m} t) + B \cos(\sqrt{k/m} t) = C \sin(\sqrt{k/m}(t - t_0))$

Die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \ldots \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}}\right) \tag{104}$$

kann nach Einführung neuer Funktionen:

$$y_1(t) = y, \quad y_2(t) = \frac{dy}{dt}, \quad y_3(t) = \frac{dy^2}{dt^2}, \quad \ldots \tag{105}$$

als ein System geschrieben werden:

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \tag{106}$$

$$\dot{y}_2(t) = y_3(t), \tag{107}$$

$$\vdots \tag{108}$$

$$\dot{y}_{n-1}(t) \qquad y_n(t), \tag{109}$$

$$\dot{y}_n(t) = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{110}$$

Das System hat eine eindeutige Lösung, wenn bei einer $t = t_0$ Zeitpunkt alle $y_1, \ldots, y_n$ Anfangswere gegeben sind. (Z.B. Position, Geschwindigkeit).

Man betrachte einen getriebenen und gedämpften Oszillator:

$$\ddot{y}(t) + 2\gamma\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = K(t) \tag{111}$$

γ ist der Dämpfungsparameter. Wenn $\gamma = 0$ und $K = 0$ wäre, hätte die Gleichung die Lösung $y(t) \sim \sin \omega_0 t$.
Umschreibung in ein System (c ist eine Konstante, wir wählen ihren Wert später):

$$y_1(t) = y, \quad y_2(t) = c\frac{dy}{dt} \tag{112}$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y} = y_2/c, \tag{113}$$
$$\dot{y}_2 = c\ddot{y} = -2c\gamma\dot{y} - c\omega_0^2 y_1 + cK(t) = -2\gamma y_2 - c\omega_0^2 y_1 + cK(t) \tag{114}$$

In Matrixform: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ -c\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ cK(t) \end{pmatrix}$ Die Matrix kann mit $c = -i/\omega_0$ symmetrisch (nicht Hermitisch) gewählt werden.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 2i\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ K(t)/\omega_0 \end{pmatrix} \tag{115}$$

Die allgemeine Form eines Systems von n linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}(t)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \mathbf{K}(t)\,, \text{oder kurz}\, \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{K}\,, \qquad (116)$$

wo $\mathbf{K}(t)$ ist die externe Kraft, ein zeitabhängiger n-Vektor, und $\mathbf{A}(t)$ ist eine (möglicherweise zeitabhängige) $n \times n$ Matrix. Wenn $K \equiv 0$, heißt die Gleichung homogen.

Es Gelten für den homogenen Fall: $K = 0$:
Behauptung I: Wenn $\mathbf{y}$ eine Lösung und λ eine Konstante ist, dann $\lambda\mathbf{y}$ ist auch eine Lösung.
Behauptung II: Sind $\mathbf{y_a}$ und $\mathbf{y_b}$ Lösungen, so ist die Linearkombination mit konstanten Koeffizienten $\alpha\mathbf{y_a} + \beta\mathbf{y_b}$ auch eine Lösung.

Man nehme an, dass die Koeffizienten zeitunabhängig sind und $\mathbf{K} = 0$:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(\mathbf{t}) \tag{117}$$

Wenn wir die Eigenvektoren und Eigenwerte gefunden haben,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{v}^{(j)}\,, \quad j = 1\ldots n \tag{118}$$

Kann eine Lösung z.B. in der Form $\mathbf{y} = \mathbf{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t}$ gesucht werden. In der Tat:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} = \mathbf{v}^{(1)} \frac{d}{dt} e^{\lambda_1 t} = \mathbf{v}^{(1)} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{119}$$

Da die Gleichung linear ist, ist eine *beliebige* Linearkombination ist auch eine Lösung. So lautet die allgemeine Lösung:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{v}^{(j)} e^{\lambda_j t} \tag{120}$$

Die Koeffizienten c_j können zu den Anfangsbedingungen angepasst werden:

$$y_k(t=0) = \sum_{j=1}^{n} v^{(j)}{}_k c_j\,, \quad \text{oder} \quad \mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{y_0} \,\text{mit}\, V_{kj} = v_k^{(j)} \tag{121}$$

Die homogene Schwingungsgleichung kann jetzt mit einem Ansatz gelöst werden:

$$\ddot{y}(t) + 2\gamma\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \tag{122}$$

Man versuche $y(t) = A\exp(i\omega t)$, mit komplexen A. So ist $y(t)$ komplex. Sind die Koeffizienten reell, so ist dann auch $\mathrm{Re}\ y(t)$ als auch $\mathrm{Im}\ y(t)$ eine Lösung.

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2i\gamma\omega Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = 0 \tag{123}$$

Mit $Ae^{i\omega t}$ kann man sofort kürzen.

$$-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0 \tag{124}$$

$$\omega_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{125}$$

So ist die Lösung:

$$y(t) = \mathrm{Re}\ Ae^{-\gamma t} e^{\pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t} \tag{126}$$

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t - t_0)\right) \tag{127}$$

Haben wir *alle* Lösungen gefunden: ja, weil diese Lösung zu allen möglichen Anfangsbedungungen passt.

Ein Spezialfall: wenn ω_1 und ω_2 zufällig gleich sind: z.B. $\omega_0 = \gamma$:

$$y = y_0 e^{-\gamma t} \tag{128}$$

Nun sind die Anfangsbedingungen für $\dot{y}(t_0)$ und $y(t_0)$ nicht unabhängig zu erfüllen. Es fehlt noch eine Lösung.
Wir verändern einen Parameter $\omega_0^2 \to \omega_0^2 + \epsilon^2$, (Störung: $\epsilon^2 \ll \omega_0^2$) und lösen damit die Entartung auf.

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma t} \sin \epsilon(t - t_0) \tag{129}$$

Jetzt $\epsilon \to 0$, und gleichzeitig wird y_0 mit ϵ umskaliert:

$$y(t) = Ce^{-\gamma t} \frac{\sin \epsilon(t - t_0)}{\epsilon} \to Ce^{-\gamma t}(t - t_0) \tag{130}$$

Man kann überprüfen: $y(t) = te^{-\gamma t}$ löst die Gleichung mit $\gamma = \omega_0$ in der Tat:

$$y(t) = te^{-\gamma t}, \qquad \dot{y}(t) = e^{-\gamma t} - \gamma te^{-\gamma t}, \qquad \ddot{y}(t) = -2\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 te^{-\gamma t}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\gamma\dot{y}(t) + \gamma^2 y(t) = \left((-2\gamma + \gamma^2 t) + 2\gamma(1 - \gamma t) + \gamma^2 t\right) e^{-\gamma t} = 0 \tag{131}$$

Es gebe eine allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y} + q(t)y(t) = K(t) \tag{132}$$

Wenn $y_a(t)$ und $y_b(t)$ zwei linear unabhängige Lösungen der *homogenen* Gleichung sind:

$$y_a(t) \neq \lambda y_b(t), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \tag{133}$$

dann alle Anfangsbedingungen können erfüllt werden, und so ist

$$y_{\mathrm{hom}}(t) = Ay_a(t) + By_b(t) \tag{134}$$

die allgemeine Lösung.
Wenn nun $y_i(t)$ eine (irgendwelche) Lösung der inhomogenen Gleichung ist, dann lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_{\mathrm{inhom}}(t) = Ay_a(t) + By_b(t) + y_i(t) \tag{135}$$

Der obige Lösungsvorschlag kann einfach überprüft werden. Durch die ensprechende Wahl von A und B kann ein beliebiges Anfangsbedingung erfüllt werden.

$$\ddot{y}(t) + 2\gamma\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = c\sin\Omega t \tag{136}$$

Der Oszillator wird nicht umbedingt mit der Eigenfrequenz $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ getrieben. Wie wird $y(t)$ schwingen?
Jetzt brauchen wir nur eine Lösung zu finden:

$$y(t) = a\sin(\Omega t + \phi) = \mathrm{Re}\,\left(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}\right) \tag{137}$$

In die Gleichung eingesetzt suchen wir a und ϕ oder A und B

$$Ae^{i\Omega t}(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) + Be^{-i\Omega t}(-\Omega^2 - 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) = -\frac{ci}{2}e^{\Omega t} + \frac{ci}{2}e^{-\Omega t} \tag{138}$$

$$A = -\frac{ci}{2}\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} = -\frac{ci}{2}\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \tag{139}$$

$$B = +\frac{ci}{2}\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega} = +\frac{ci}{2}\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \tag{140}$$

$$y_i(t) = c\,\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)\sin\Omega t - 2\gamma\Omega\cos\Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \tag{141}$$

Wenn wir eine inhomogene Gleichung gelöst haben

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y} + q(t)y(t) = K(t) \tag{142}$$

also mindestens eine Lösung $y_K(t)$ gefunden haben, ist die allgemeine Lösung bekannt. Für eine andere Kraft $J(t)$ müssen wir erneut Lösen:

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y} + q(t)y(t) = J(t) \quad \to \quad y_J(t) \tag{143}$$

Dann ist die Gleichung

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y} + q(t)y(t) = \alpha K(t) + \beta J(t) \tag{144}$$

damit auch gleich gelöst:

$$y_{\alpha K + \beta J}(t) = \alpha y_K(t) + \beta y_J(t) \tag{145}$$

Für kompliziertere Kräfte können wir in Spektraldarstellung lösen:

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y} + q(t)y(t) = \sum_j c_j \sin(\Omega_j t) \tag{146}$$

So haben wir: $y(t) = \sum_j c_j y_{\Omega_j}(t)$.
Für konstante Koeffizienten haben wir die $y_{\Omega_j}(t)$ in Gl. (141) schon bestimmt.