

Grundlagen der Elementar- und Astroteilchenphysik

Szabolcs Borsanyi

Bergische Universität Wuppertal

2016



Die aktuelle Version dieses Dokumentes kann unter <http://particle.uni-wuppertal.de/borsanyi/script/getasb.pdf> erreicht werden

- Pierre Ramond: **Field theory: a modern primer**
Kapitel: 1.2 – 1.7 (Lorentz- und Poincare-Symmetrie, Spinoren)
- Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li: **Gauge theory of elementary particle physics**
Kapitel 4.1,4.2 (Lie Gruppen)
Kapitel 5.1, 5.3 (Globale Symmetrien, Goldstonetheorem)
Kapitel 8.1 (Lokale Symmetrien)
Kapitel 8.3 (Higgs-Mechanismus)
Kaptiel 11.1-11.3 (Standardmodell
Kapitel 1.1 (Quantisierung)
- Weiterführende Literatur:
L. B. Okun: **Leptons und Quarks**
Kapitel 3. (Myonzerfall)
Kapitel 29. (Appendix)

Ein Vektor mit vier Komponenten, v^μ ist ein Vierervektor, wenn er beim Wechsel zwischen Bezugssystemen durch eine Multiplikation mit der Lorentz Transformationsmatrix transformiert:

$$v^\mu - (v')^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu \quad (1)$$

Das skalare Produkt ist mittels des metrischen Tensor definiert

$$v \cdot w = v^\mu g_{\mu\nu} w^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^4 v^\mu g_{\mu\nu} w^\nu \quad (2)$$

mit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Dann $v \cdot w$ ist ein Skalar, d.h. es bleibt bei der Lorentz-Transformation erhalten:

$$v' \cdot w' = \Lambda^\mu_\rho v^\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma w^\sigma = v^\mu g_{\mu\nu} w^\nu = v \cdot w \quad (4)$$

Hier verwendeten wir die Gleichung $\Lambda^T g \Lambda = g$, die die Lorentz-transformation definiert.

Das wichtigste Beispiel für ein Tensor mit zwei Indizes ist das elektromagnetische Feldstärketensor (*antisymmetrisch*):

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Transformationsregel (ohne x-abhängigkeit): $(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\rho F^{\rho\sigma}$ Wie bildet man ein Skalar daraus?

- $F^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0$, triviales Skalar
- $\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} = -(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$ die Wirkung
- Gibt es eine kovariante Form für $\vec{E} \cdot \vec{B}$? Letzteres Produkt gibt ein Pseudoskalar: bei Spiegelung:

$$\vec{E} \rightarrow -\vec{E} \quad (6)$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B} \quad (7)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} \rightarrow -\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (8)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E} - \vec{B} \cdot \vec{B} \rightarrow \vec{E} \cdot \vec{E} - \vec{B} \cdot \vec{B} \quad (9)$$

Mit dem 4-dimensionalen Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} = -\epsilon_{\sigma\nu\rho\mu} \quad (10)$$

$$\epsilon_{0123} = 1 \quad (11)$$

So ist der duale Fedstärketensor definiert:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Nun ist $F \cdot \tilde{F}$ ein Pseudoskalar:

$$(F^{\mu\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) \tilde{F}^{\rho\sigma} = -\text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

So ist $F \cdot \tilde{F} = -\frac{1}{4} \vec{E} \vec{B}$.

Bisher hatten alle Tensoren obere (Kontravariante) Indizes, z.B. $F^{\mu\nu}$, u^μ .
Wir dürfen aber mit dem metrischen Tensor Produkte bilden, die Kovariante Tensoren:

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu \quad F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (13)$$

So wird z. B. das $u_\mu v^\mu$ Produkt das Skalarprodukt $u^\nu g_{\nu\mu} v^\mu$. Hier ist δ der Kronecker-Delta-Symbol.

Die Inverstransformation erfolgt mit dem Invertensor:

$$u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (14)$$

mit

$$(g^{\cdot\cdot})(g_{\cdot\cdot}) = 1, \quad \text{also} \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad (15)$$

Da aber g die einfache diagonale Form hatte, gilt

$$g^{\cdot\cdot} = g_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Wir dürfen noch $g_\mu^\nu = g^\mu_\nu = \delta_{\mu\nu}$ einführen, so kann g immer eingefügt werden, z.B. $F^{\mu\nu} = g^\mu_\rho F^{\rho\nu}$.

Die Ableitung:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (17)$$

Innere Feldgleichungen: $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

- $\mu = 0$: $\partial_\nu \tilde{F}^{0\nu} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

- $\mu = 1$: $\partial_\nu \tilde{F}^{1\nu} = \dot{B}_x + \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) = \dot{B}_x + (\vec{\nabla} \times \vec{E})_x$

- $\mu = i$: $\partial_\nu \tilde{F}^{i\nu} = \left(\dot{\vec{B}} + \vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_i = 0$

Erregungsgleichung: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu$.

- $\mu = 0$: $\partial_\nu F^{0\nu} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\mu_0 \rho$

- $\mu = 1$: $\partial_\nu F^{1\nu} = \dot{E}_x + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}$

- $\mu = i$: $\partial_\nu F^{i\nu} = \left(\dot{\vec{E}} - \vec{\nabla} \times \vec{B}\right)_i = -j_i$

mit $j^\mu = (\rho, \vec{j})$.

Aus $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu$ folgt schon die Kontinuitätsgleichung:

$$0 = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\mu j^\mu \quad (18)$$

oder, mit $j^\mu = (\rho, \vec{j})$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (19)$$

Die elektrische Ladung ist erhalten.

Die Bewegungsgleichung $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ gilt im gesamten Raumzeit (einfach zusammenhängend), so muss es ein A-feld geben:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (20)$$

Dann gilt für den dualen Tensor:

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu - \partial_\alpha \partial_\nu A_\mu) = 0 \quad (21)$$

$A_\mu(x)$ ist ein Vektorfeld, das Vektorpotential.

Behauptung: Ist Φ ein Skalarfeld, dann ist $\partial_\mu \Phi$ auch ein Vektorfeld.

So könnte man weitere Skalarfelder bauen: $A^\mu \partial_\mu \Phi$.

Eichinvarianz: Im Feldstärketensor $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Phi$ verwenden:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Phi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Phi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \quad (22)$$

Eichtransformation: Die Umbenennung des Vektorpotentials durch

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Phi$$

Eichfixierung: Wir setzen eine Gleichung fest, die das Vektorpotential erfüllen muss, wo für alle mögliche A_μ felder es ein (oder mehrere) Φ Felder gibt, so dass A'_μ diese Gleichung erfüllt.

Z.B. Lorentz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu(x) \equiv 0$.

Für ein allgemeines $A_\mu(x)$ findet man die Lösung der Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi(x) = \partial_\mu A^\mu(x) \quad (23)$$

Nach der Transformation hat man für $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu / \mu_0$

$$\partial^\mu (\partial_\mu A^\nu - \partial^\nu A_\mu) = \partial^\mu \partial_\mu A^\nu(x) = -j^\nu / \mu_0 \quad (24)$$

In der Abwesenheit von Materie haben wir eine Wellengleichung für das Vektorpotential. Sie beschreibt die Fortbewegung des Lichtes. Es gibt aber auch andere Gleichungen, die ein ähnliche Fortbewegung beschreiben:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (25)$$

ϕ ist ein skalares Feld, die Gleichung ist auch ein Lorentz-Skalar

Das ist die **Klein-Gordon**-Gleichung.

Was beschreibt sie?

In Fourier-Raum wechseld:

$$\phi(x) = \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} e^{-ik_\mu x^\mu} \phi(k), \quad \phi(k) = \int dx^4 e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x) \quad (26)$$

dürfen wir schreiben

$$-k_\mu k^\mu \phi(k) + m^2 \phi(k) = 0 \quad (27)$$

Das hat eine Lösung nur bei $k_\mu k^\mu = m^2$, die Dispersionsrelaiton. Schon in der Elektrodynamik konnte man annehmen dass Impuls und Wellenvektor im Verhältnis stehen:

$$p_\mu \sim k_\mu \quad (28)$$

(bis auf verworfene \hbar und c Faktoren)

So gilt: $p_\mu p^\mu = m^2$ oder $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$. Die Gleichung beschreibt ein relat. Teilchen mit Masse m .

Die Lorentz-Transformation (bzw. die Λ Matrizen) formen eine Gruppe:

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda(v_3) \quad (29)$$

$$\Lambda(v_1)\Lambda(-v_1) = \Lambda(0) = 1 \quad (30)$$

mit $v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}$, und ähnlich für die Drehungen, die z.B. mit den Eulerchen Winkel parametrisiert werden können.

Diese Gruppe kann erweitert werden: es gibt die Verschiebungen auch

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu.$$

Lorentz-Gruppe: Spiegelungen, Drehungen und Lorentz-Boost

Poincaré-Gruppe: Spiegelungen, Drehungen, Lorentz-Boost und Translation

Die Lorentz-Gruppe wird von insgesamt 6 Parameter beschrieben (hat 6 Generatoren).

In der Poincaré-Gruppe gibt insgesamt 10 Parameter.

Ist die Translation eine Symmetrie: dann heißen die erhaltene Größen Energie und Impulsvektor.

Wenn eine Gruppe aus Matrizen besteht, ist die Multiplikationsregel einfach durch die Matrizenregeln gegeben.

Bei abstrakten Gruppen kann man jedoch oft Matrizen finden die als Matrizen multiplizieren, aber auch den Gruppenregeln folgen. d.h.

$$\begin{aligned} \forall g \in G \quad \exists D(g) \in K^{2n} \text{ (} n \times n \text{ matrix)} \\ \forall a, b \in G \quad : \quad D(a)D(b) = D(ab) \text{ (matrixprodukt)} \end{aligned} \quad (31)$$

Wenn es eine solche Abbildung $G \rightarrow K^{2n}$ gibt, heißt, es die n -dimensionale Darstellung der Gruppe G .

Es gibt Gruppen, die gleich mit einer Darstellung definiert sind:

Z.B. man nehme die 1×1 unitäre Matrizen, die $U(1)$ Gruppe. Hier ist das Produktregel einfach durch die Multiplikation einer komplexer Phase, oder die Addition einer periodischen Größe gegeben.

Oder man nehme die 2×2 unitäre Matrizen, deren Determinante = 1, die $SU(2)$ Gruppe. Letztere hat 3 reelle Parameter.

Diese Gruppe hat viele nicht-triviale Darstellungen, z.B. mit 3×3 Matrizen.

Hier reden wir über Gruppen, die etliche kontinuierliche Parameter haben, und kleinen Parameter wir immer eine “kleine Transformation” bedeuten.

Lie-Gruppe.

Wir untersuchen kleine Transformationen in einer Darstellung D , nehmen wir an, dass die D Matrizen/Lineare operatoren unitär sind: Wer nennen die Parameter ϕ_j , so können wir entwickeln:

$$D(\phi_j) = \exp \left(i \sum_j \phi_j X_j \right) = D(0) + i \sum_j \phi_j X_j = 1 + i \sum_j \phi_j X_j \quad (32)$$

Behauptung: Die X Matrizen sind nun Hermitesch.

Die X_j Matrizen sind die **Generatoren** der Lie Gruppe in dieser Darstellung.

Beispiel: $SO(2)$: 2D Drehmatrix, mit einem Parameter:

$$a(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\text{So ist } X = -i \frac{\partial a(\phi)}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2$$

Interessant wird es wenn wir die Transformation von Feldern untersuchen. Es gebe ein skalares Feld: $f(x)$

$$\begin{aligned}
 \delta f(x) &= f'(x') - f(x) \\
 &= f'(x + \delta x) - f(x) \\
 &= f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f' + \mathcal{O}(\delta x^2) \\
 &= f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f + \mathcal{O}(\delta x^2)
 \end{aligned} \tag{34}$$

Generator einer infinitesimalen Translation:

$$-i \frac{\delta f(x)}{\delta x^\mu} = -i \partial_\mu f =: P_\mu f \tag{35}$$

P ist ein linearer Operator. Da er die Translation generiert, geben wir ihn den Namen: Viererimpuls.

Wenn wir keine Translation sondern eine Lorentz-Transformation haben:

$$\delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (36)$$

Infinitesimal wird die Lorentz-Transformation wenn $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \alpha^\mu{}_\nu$.
Aus $\Lambda^T g \Lambda = g$ folgt: $g_{\nu\rho} \alpha^\rho{}_\mu + g_{\mu\rho} \alpha^\rho{}_\nu$, d.h.

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu} \quad (37)$$

Bei einer 4×4 antisymmetrischen Matrix gibt es 6 Parameter.

$$f'(x') - f(x) = -\alpha^\mu{}_\rho x^\rho \partial_\mu f = -i \frac{1}{2} \alpha^{\rho\mu} L_{\rho\mu} f \quad (38)$$

mit

$$L_{\rho\sigma} = i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) \quad (39)$$

L ist der Generator für die Verallgemeinerte Drehungen.

In 3D nur mit Drehungen hätten wir $L_{jk} = i(x_j \nabla_k - x_k \nabla_j)$

Die hier vorkommende Ableitungen sind als die Generatoren der Translationssymmetrie zu interpretieren, so ist

$$L_{\rho\sigma} = x_\sigma P_\rho - x_\rho P_\sigma \quad (40)$$

Im Tensor $L_{\mu\nu}$ können wir den Komponenten neuen Namen weggeben:

$$L_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & K_x & K_y & K_z \\ -K_x & 0 & J_z & -J_y \\ -K_y & -J_z & 0 & J_x \\ -K_z & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

\vec{J} ist der gewöhnliche Drehimpuls, ein Pseudovektor, und \vec{K} Vektor beschreibt den Boost. Die äquivalente Formel andersrum:

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} L_{jk} \quad (42)$$

$$K_i = L_{0i} \quad (43)$$

Den Drehimpulsvektor kann man weiter umschreiben

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (x_k P_j - x_j P_k) \quad (44)$$

In $x_\mu = (x_0, -\vec{x})$ aber in $P_\mu = (P_0, \vec{P})$. So schreiben wir

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{P} \quad (45)$$

Sowohl \vec{P} als auch \vec{J} are Generatoren.

Sie sind lineare Operatoren die auf dem Feld F wirken.

Obwohl wir noch keine Quanteneffekte eingeführt haben, sind die Vertauschungsrelationen bereits gegeben. Da die P_i Generatoren als Ableitungen dargestellt sind, können wir gleich schreiben:

$$[x^i, P_j] = -i[x^i, \partial_j] = i\delta_{ij} \quad (46)$$

Damit erhält man für $J_i = \epsilon_{ijk} x^j P_k$

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= \epsilon_{ajk} \epsilon_{bmn} [x^j P_k, x^m P_n] = \epsilon_{ajk} \epsilon_{bmn} (-ix^j \delta_{km} P_n + ix^m \delta_{nj} P_k) \\ &= -i\epsilon_{ajk} \epsilon_{bkn} x^j P_n + i\epsilon_{ajk} \epsilon_{bmj} x^m P_k \\ &= -i\epsilon_{ajk} \epsilon_{bkn} x^j P_n + i\epsilon_{akn} \epsilon_{bjk} x^j P_n = -i(\epsilon_{ajk} \epsilon_{nbk} - \epsilon_{nak} \epsilon_{bjk}) P_j x_n \\ &= -i(\delta_{an} \delta_{jb} - \delta_{ab} \delta_{jn} - \delta_{nb} \delta_{aj} + \delta_{ab} \delta_{nj}) x^j P_n \\ &= -i\epsilon_{abc} \epsilon_{cnj} x^j P_n = i\epsilon_{abc} \epsilon_{cjn} x^j P_n = i\epsilon_{abc} J_c \end{aligned} \quad (47)$$

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c \quad (48)$$

Behauptung: Die Vertauschungsrelationen der Generatoren sind unabhängig von der Darstellung. An diesen algebraischen Regeln der Generatoren kann die Ursprüngliche Gruppe (hier Drehgruppe) erkannt werden.

Eine allgemeine Drehmatrix hat drei Parameter:

$$R(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren sind: $-i\partial R/\partial\varphi_i|_{\varphi\equiv 0}$.

$$T_1 = -i\frac{\partial R}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$T_2 = -i\frac{\partial R}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$T_3 = -i\frac{\partial R}{\partial\psi} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

D.h. für kleine Winkel: $R \approx 1 + iT_1\phi + iT_2\theta + iT_3\psi$.

Man kann leicht nachrechnen:

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \quad (52)$$

Kleine Drehung eines Skalarfeldes ($\alpha^{\mu\nu} \ll 1$):

$$\Phi'(x') - \Phi(x) = -\frac{1}{2}\alpha^{\rho\sigma}i(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)\Phi(x) \quad (53)$$

Bei der Drehung eines Vektorfeldes (z.B. A_μ) müssen auch um die Indizes gekümmert werden. Wie?

Man nehme das Vektorfeld $\partial_\mu\phi$

$$(\partial_\mu\Phi)'(x') - (\partial_\mu\Phi)(x) = \frac{1}{2}\alpha^{\rho\sigma}(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)\partial_\mu\phi - \frac{i}{2}\alpha^{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})_\mu^\nu\partial_\nu\phi \quad (54)$$

Wo S ist ein Tensor mit vier Indizes:

$$(S_{\rho\sigma})_\mu^\nu = i(g_{\rho\mu}g^{\nu\sigma} - g_{\sigma\mu}g^\nu_\rho) \quad (55)$$

In diesem Fall $L_{\rho\sigma} = i(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)$ und $S_{\rho\sigma}$ zusammen sind die Darstellung der Drehung:

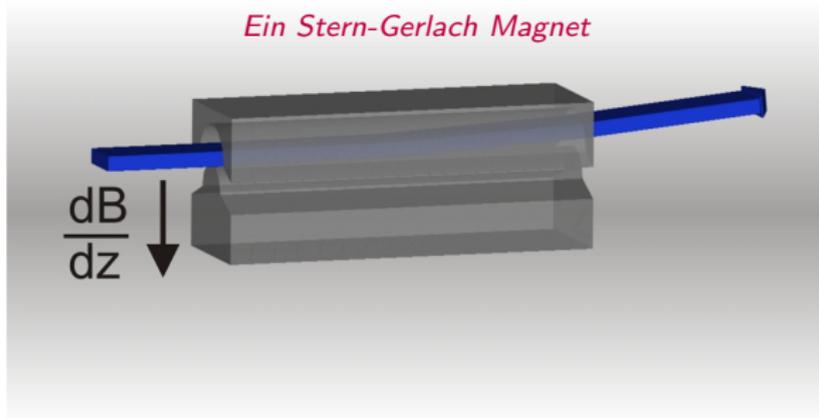
$$A'_\mu(x') - A_\mu(x) = -\frac{i}{2}\alpha^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})_\mu^\nu A_\nu(x) \quad (56)$$

mit $(M_{\rho\sigma})_\mu^\nu = L_{\rho\sigma}g_\mu^\nu + (S_{\rho\sigma})_\mu^\nu$.

L dreht die inhomogene Struktur des Feldes, S dreht die internen Indizes, S steht für Spin.

Wenn ein geladenes Teilchen sich bewegt, erzeugt ein Magnetfeld um sich. Bei einer Kreisbewegung kann es aus Entfernung als ein Magnetischer Dipol wahrgenommen werden.

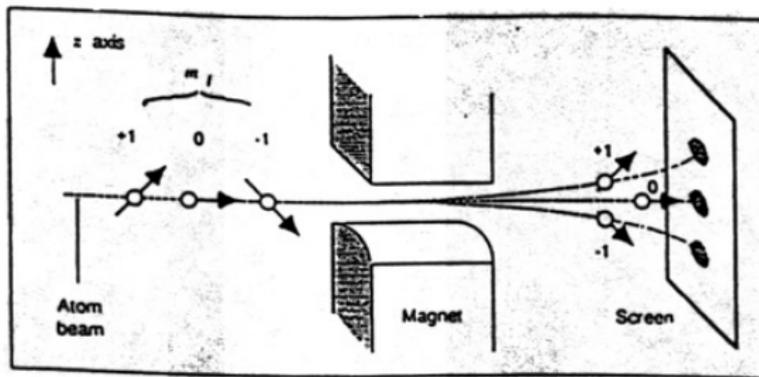
Ein Instrument für die Bestimmung des Magnetischen Dipolmoments:



Dipol ($\vec{\mu}$) im Magnetfeld (B) hat eine Energie: $-\vec{\mu}\vec{B}$.

Wenn B ein Gradient hat (inhomogen), so hat die Energie.

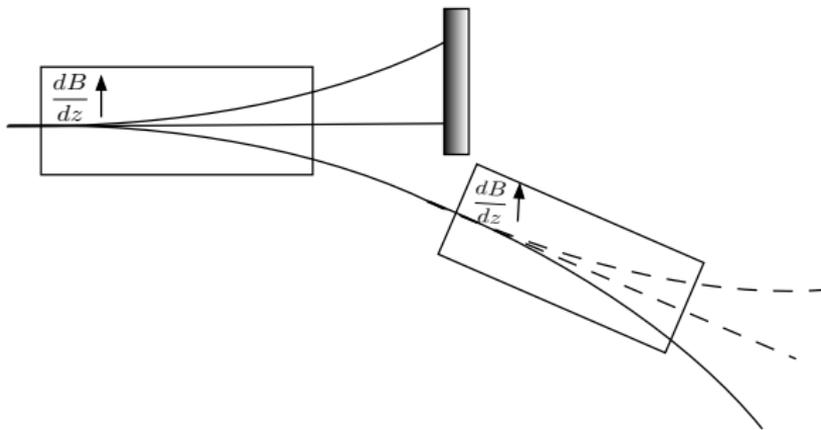
Wenn wir ein unpolarisiertes Teilchenbeam durch den Stern-Gerlach Magnet schießen, entsteht kein kontinuierliches Bild.



(Abbildung: Weinert 1995)

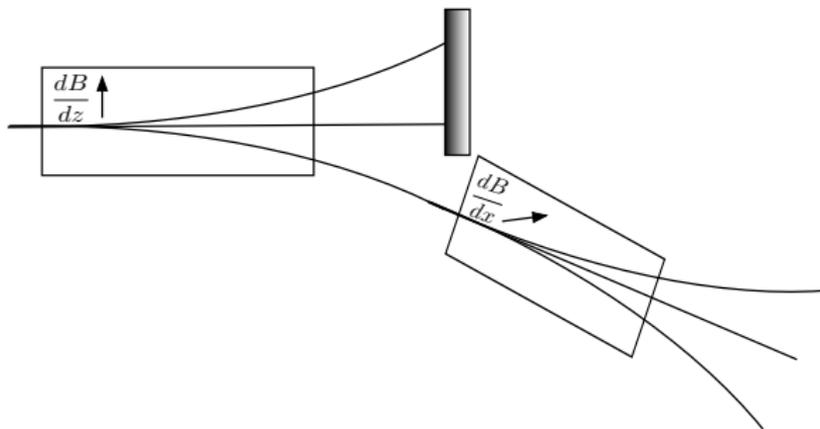
Interpretation: man braucht mehrere Felder (hier drei) um das Teilchen zu beschreiben.

Schalten wir nun zwei Magneten nacheinander.
Wenn wir zwei Beams nach dem ersten Magnet ausblenden,
hat der zweite Magnet ein polarisiertes Beam.



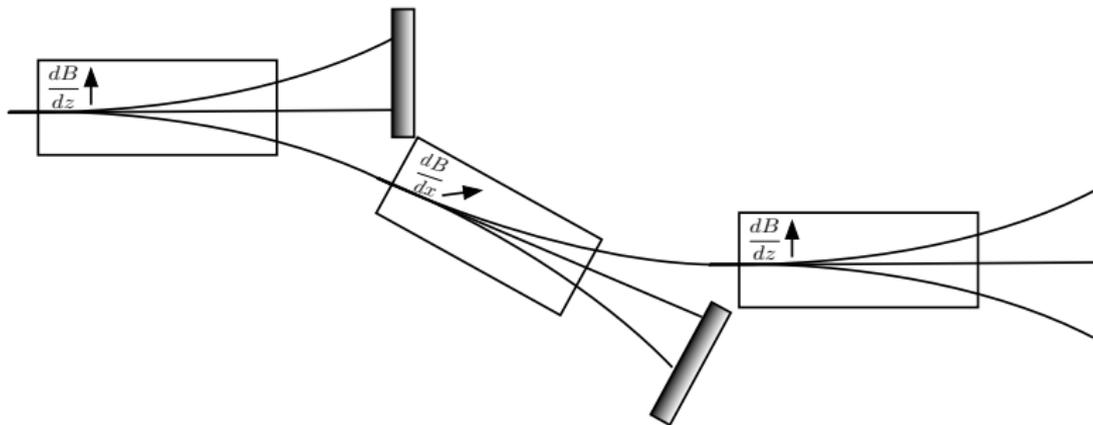
Nach dem zweiten Magnet findet man nur ein Spot.

Wenn nun der zweite Magnet gedreht wird, so dass statt das inhomogene Magnetfeld statt der z -Richtung in der x -Richtung ausgerichtet ist, werden wieder drei Beams sichtbar.



Teilchenfeld: $\Psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ oder etwa $i = 1, 2, \dots, 9$?

Wenn nun ein dritter Magnet in z Ausrichtung zukommt, sehen wir ein oder drei Beams?



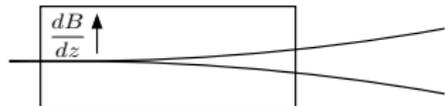
Interpretation: Es gibt drei Feldkomponente, die bei Drehung untereinander transformieren.

Teilchenfeld: $\Psi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$

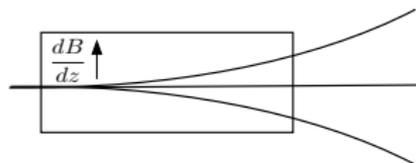
Die Teilchen können nach dem Ergebnis des Stern-Gerlach-Experiments eingeordnet werden:



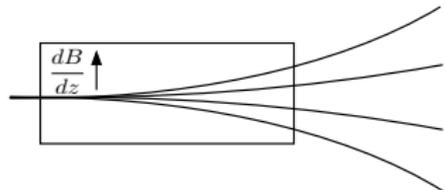
Pion, Kaon



Elektron, Proton



Rho, Phi



Delta, Omega

Um die Elektronen zu beschreiben brauchen wir ein Feld mit einem Index $\Phi_i(x)$, $i = 1, 2$.

$$\Phi'_i(x') - \Phi_i(x) = -\frac{i}{2}\alpha^{\rho\sigma} (L_{\rho\sigma}\delta_{ij} + (S_{\rho\sigma})_{ij}) \Phi_j(x) \quad (57)$$

Hier enthält L Ableitungen nach x . S hat zwei Viererindizes und zwei Indizes für Feldkomponente.

Wenn wir uns auf die Drehgruppe beschränken, sind nur die räumliche Komponente relevant.

$$(S_a)_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}(S_{bc})_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad a, b, c = 1, 2, 3 \quad (58)$$

Wenn das Elektron ruht (*dieses Argument scheitert wenn das Teilchen keine Masse hat*), ist S allein verantwortlich für die Darstellung der Drehgruppe (bzw. derer Algebra):

$$[S_a, S_b] = i\epsilon_{abc}S_c \quad (59)$$

Wir müssen drei 2×2 Hermitesche Matrizen finden die Gl. (59) erfüllen.

Die Pauli Matrizen sind die hier angegebene drei komplexe 2×2 Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Deren Produkt bleibt in der Algebra:

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i \epsilon_{abc} \sigma_c \quad (61)$$

Nimmt man $S_a = \frac{1}{2} \sigma_a$, gilt die erwünschte Gleichung

$$[S_a, S_b] = i \epsilon_{abc} S_c \quad (62)$$

Frage: Hätte man auch reelle 2×2 Matrizen gefunden?

Die Pauli-Matrizen sind Hermitesch. Eigenwerte: -1 und $+1$.

$\det \sigma_a = -1$ und $\text{Tr} \sigma_a = 0$, $\forall a = 1 \dots 3$

Weiterhin: $\sigma_i \sigma_i = 1$ für $i = 1, 2, 3$, also

$$\sum_a S_a S_a = \frac{3}{4} \quad (63)$$

Eigenschaften der Pauli-Matrizen (Übung):

- $[\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b] = i\epsilon_{abc}\frac{1}{2}\sigma_c$
- $\{\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b\} = \delta_{ab}\frac{1}{2}$
- $\sigma_2\sigma_a\sigma_2 = -\sigma_a^*$
- $\text{Tr}\sigma_a = 0$
- $\text{Tr}\sigma_a\sigma_b = 2\delta_{ab}$
- $\text{Tr}\sigma_a\sigma_b\sigma_c = 2i\epsilon_{abc}$
- $\text{Tr}\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = 2(\delta_{ab}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{cb})$

Oft werden die Pauli-Matrizen als Vektor geschrieben: $\vec{\sigma}$, z.B.:

$$\vec{v}\vec{\sigma} = \sum_{a=1}^3 v_a\sigma_a \quad (64)$$

ist eine komplexe 2×2 Matrix. Es gelten dann:

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{b}\vec{\sigma}) = (\vec{a}\vec{b}) + i(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{\sigma} \quad (65)$$

$$(\vec{v}\vec{\sigma})^{2n} = |\vec{v}|^{2n}, \quad (\vec{v}\vec{\sigma})^{2n+1} = |\vec{v}|^{2n}\vec{v}\vec{\sigma}, \quad n \in \mathcal{N} \quad (66)$$

Eine Besonderheit:

Eine Drehung einer Vektor mit Winkel ψ um die z-Achse:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \exp \left\{ i\psi \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = e^{i\psi T_3} \vec{v} \quad (67)$$

Die Generatoren der 3-Dimensionaler Drehung: T_i , $i = 1, 2, 3$, haben alle die drei Eigenwerte: $-1, 0, +1$. So hat man

$$\psi = 2\pi \quad \longrightarrow \quad e^{i\psi T_3} = \mathbf{1} \quad (68)$$

Wenn aber der Generator die Eigenwerte $\pm \frac{1}{2}$ hat, wie beim S_3 :

$$\Phi' = e^{i\psi S_3} \Phi = \left[e^{+i\frac{1}{2}\psi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-i\frac{1}{2}\psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \Psi \quad (69)$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} e^{+i\frac{1}{2}\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{1}{2}\psi} \end{pmatrix} \Phi \quad (70)$$

Eine Drehung mit 2π führt zu einem Vorzeichenwechsel!

Das Vorzeichen des Elektronenfeldes darf keine physikalischen Inhalt haben.

Bisher diskutierten wir die Drehgruppe und deren Algebra.
 Was für eine Gruppe wird von den $S_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ Matrizen erzeugt?
 Die Matrizen

$$U(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha}\frac{1}{2}\vec{\sigma}} \quad (71)$$

sind unitär, 2×2 komplexe Matrizen ($\alpha_i \in \mathbf{R}$).

$$U(\vec{\alpha})^{-1} = U(-\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\frac{1}{2}\vec{\sigma}} = U^\dagger(\vec{\alpha}) \quad (72)$$

In der letzten Schritt verwendeten wir, dass $\sigma_a^\dagger = \sigma_a$.
 Und die Determinante ist

$$\det U(\vec{\alpha}) = e^{\frac{i}{2}|\vec{\alpha}|} e^{-\frac{i}{2}|\vec{\alpha}|} = 1 \quad (73)$$

(Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte.

Die Eigenwerte der Matrix $\vec{v}\vec{\sigma}$ sind $\pm|\vec{v}|$.)

Die unitäre 2×2 Matrizen mit $\det = 1$ formen die $SU(2)$ Gruppe.

Die Generatoren sind $S_a = \frac{1}{2}\sigma_a$, $a = 1, 2, 3$.

Frage: Wieviel Parameter beschreiben $SU(2)$ die Gruppe? Gibt es weitere Generatoren?

Die Generatoren des Drehimpulssymmetrie als auch die der $SU(2)$ Gruppe erfüllen:

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \quad (74)$$

Aus dieser einfacher Gleichung folgen mehrere Behauptungen:

Der folgende Kombination

$$J^2 = \sum_a J_a J_a \quad (75)$$

vertauscht mit allen Generatoren:

$$[J^2, J_a] = 0 \quad (76)$$

Solche Konstruktionen nennen wir ein Casimir Operator.

J^2 ist daher in aller Darstellungen \sim Einheitsmatrix,

$$J^2 = j(j+1) \quad (77)$$

wo $j \geq 0$ eine ganze Zahl oder eine halbe Zahl ist.

z.B. 3D Drehungen: $j = 1$. Skalar: $j = 0$, Elektronfeld: $j = 1/2$.

Die Eigenwerte der J_a Operatoren laufen von $m = -j \dots j$.

z.B. 3D Drehungen: $m = -1, 0, 1$. Skalar: $m = 0$, Elektronfeld: $m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$.

Ist also der Drehimpuls quantisiert? An welcher Stelle haben wir die Quanteneffekte eingeführt?

Aus der Natur der Drehgruppe folgt dass die Generatoren erfüllen

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \quad (78)$$

Was sind die Dimensionen hier?

$$[J] = [\text{Drehimpuls}] = [\text{Impuls} \times \text{Länge}] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{m} = \text{Js} \quad (79)$$

Als wir in natürliche Einheiten wechselten verzichteten wir über \hbar . Sonst sieht die Gleichung so aus:

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}\hbar J_c \quad (80)$$

und

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (81)$$

Allerdings können die halben Indizes nur aus interne Feldkomponenten kommen, aus herkömmliche Drehungen sind $j = 0, 1, 2, \dots$

Wir haben eine Gruppe G . Wir haben zwei Darstellungen gefunden:

$$\begin{aligned} D_1 : \quad G &\rightarrow K^{2n_1} \quad \forall g, h \in G : D_1(g)D_1(h) = D_1(gh) \\ D_2 : \quad G &\rightarrow K^{2n_2} \quad \forall g, h \in G : D_2(g)D_2(h) = D_2(gh) \end{aligned} \quad (82)$$

(also $D_1(g)$ sind $n_1 \times n_1$ und $D_2(g)$ sind $n_2 \times n_2$ Matrizen)

Die Direkte Summe der beiden Darstellungen: $D_3 = D_1 \oplus D_2$ ist eine Darstellung:

$$D_3 : G \rightarrow K^{2(n_1+n_2)} \quad \forall g \in G : D_3(g) = \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array} \right) \quad (83)$$

Die D_3 Matrizen sind block-diagonal.

Ist eine Darstellung block-diagonal, oder kann mit einer Unitäre transformation in block-diagonale Form gebracht werden, nennen wir sie reduzibel.

D ist irreduzibel wenn:

$$\nexists U, D_1, D_2 : \forall g \in G : UD(g)U^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} D_1(g) & 0 \\ \hline 0 & D_2(g) \end{array} \right) \quad (84)$$

Für jede $n \in \mathbf{Z}^+$ gibt es $n \times n$ Matrizen die die Gleichung erfüllen

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}\hbar J_c \quad (85)$$

Raum	$J^2 = \sum_a J_a J_a$	Eigenwerte der J_a Matrizen
1×1	0	0
2×2	$\frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$
3×3	$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-1, 0, +1$
4×4	$\frac{15}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$
$(2j+1) \times (2j+1)$	$j(j+1)\mathbf{1}$	$-j, -j+1, \dots, j-1, j$

Beweis: Quantenmechanik Vorlesung

Wie soll eine Feldgleichung die Drehinvarianz berücksichtigen?

Vorerst nicht-relativistisch:

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (86)$$

Nun wird E und p und x eine Darstellung im Großen Vektorraum der Felder:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\vec{\nabla})^2 \psi + V(x) \psi \quad (87)$$

Ist ψ in der Skalarform, dann darf diese Gleichung schon als Schrödinger-Gleichung bekannt sein.

Der Drehimpuls spielt eine Rolle erst wenn etwas an ihn koppelt, z.B. ein homogenes Magnetfeld: $E_m = -\vec{\mu} \vec{B}$, mit $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i \vec{\nabla})^2 \psi + V(x) \psi - \frac{q}{2m} \vec{L} \vec{B} \psi \quad (88)$$

Wenn ein Teilchenfeld in der $j = 1/2$ Darstellung definiert, ist (Spin-1/2 Teilchen), muss der Gesamtdrehimpuls berücksichtigt werden.

So erhält man die Pauli-Gleichung:

$$i \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i \vec{\nabla})^2 \psi_j + V(x) \psi_j - \frac{q}{2m} (\vec{L} + g \vec{S}_{ij}) \vec{B} \psi_j \quad (89)$$

Hier erschien eine Konstante g , der gyromagnetische Faktor (*bei einem Elektron: $g = 2.0023193048(8)$*), da der Spin etwas anders zum Magnetfeld koppelt, als der herkömmliche Drehimpuls.

Aus einer relativistisch korrekt Rechnung kommt $g = 2$, für die Abweichung vom Wert 2 sind Quanterkorrekturen im Elektromagnetischen Feld verantwortlich.

\vec{B} ist ein Pseudovektor. Die ganze Gleichung ist ein Spinor. \vec{B} muss zu einem anderen Pseudovektor (\vec{L} oder \vec{S}) koppeln, damit wir durch ein skalares Produkt ein Skalar (ohne Viererindex) bekommen. \vec{S} und \vec{L} Generatoren vertauschen, L^2 und S^2 sind beide Casimir Operatoren, aber nur zusammen ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) ergeben sie eine erhaltene Grösse.

Wir erweitern die Diskussion zur ganzen Lorentz-Gruppe:

$$\Phi'_i(x') - \Phi_i(x) = -\frac{i}{2}\alpha^{\rho\sigma} (L_{\rho\sigma}\delta_{ij} + (S_{\rho\sigma})_{ij}) \Phi_j(x) = -\frac{i}{2}\alpha^{\rho\sigma} (M_{\rho\sigma})_{ij}\Phi_j(x) \quad (90)$$

$$J_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}M_{bc} \quad (91)$$

$$K_a = M_{0a} \quad (92)$$

Die algebraischen Regeln sind für J als auch K bekannt.

(Bei einem Skalarfeld, $M_{\rho\sigma} = L_{\rho\sigma} = i(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)$, die Kommutatoren kann man einfach berechnen. Die beim Skalarfeld bestimmten Regeln gelten universell, da die nicht die Eigenschaft des Feldes, sondern die der Gruppe sind.)

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \quad (93)$$

$$[K_a, K_b] = -i\epsilon_{abc}J_c \quad (94)$$

$$[J_a, K_b] = i\epsilon_{abc}K_c \quad (95)$$

Nur die erste Gleichung kann als SU(2) Generatoren-Algebra ausgelegt werden.

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \quad (96)$$

$$[K_a, K_b] = -i\epsilon_{abc}J_c \quad (97)$$

$$[J_a, K_b] = i\epsilon_{abc}K_c \quad (98)$$

Wenn wir aber eine lineare Kombination einführen:

$$N_a \equiv \frac{1}{2}(J_a + iK_a), \quad M_a \equiv \frac{1}{2}(J_a - iK_a) \quad (99)$$

dann finden wir zwei entkoppelte SU(2) Algebras:

$$[N_a, M_b] = 0 \quad (100)$$

$$[N_a, N_b] = i\epsilon_{abc}N_c \quad (101)$$

$$[M_a, M_b] = i\epsilon_{abc}M_c \quad (102)$$

Sind die J , K Darstellungen unitär, sind J und K Hermitesch, und so ist $N_a^+ = M_a$.

Es sind zwei Casimir Operatoren,

$$\sum_a N_a N_a = n(n+1) \quad \sum_b M_b M_b = m(m+1) \quad (103)$$

und die Darstellungen können mit zwei unabhängigen Quantenzahlen n und m beschrieben werden.

Den Darstellungen werden also zwei unabhängig wählbare Zahlen zugeordnet
 $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ und $m = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

- $(0, 0)$: Skalares Feld (ein einziges Feldkomponent)
- $(\frac{1}{2}, 0)$: Spinorfeld (ein Feldindex), $\Psi_{L_i}(x)$, $i = 1, 2$
- $(0, \frac{1}{2})$: Das andere Spinorfeld (ein Feldindex), $\Psi_{R_i}(x)$, $i = 1, 2$
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: Zwei interne Indizes: $\Phi_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2$
 Insgesamt gibt es also vier Komponente. Einen Tensor mit zwei Indizes schreibt man als Matrix:

$$A^\mu = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix} = A^0 + \sum_a A^a \sigma^a \quad (104)$$

Ein Vierervektorfeld kann so eingepackt werden.

Man nehme je ein Feld aus beider Spinor-Darstellungen. Transformationsregel:

$$\psi_L(x) \rightarrow \psi'_L(x') = \Lambda_L(x)\psi_L(x) \quad \text{für} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (105)$$

$$\psi_R(x) \rightarrow \psi'_R(x') = \Lambda_R(x)\psi_R(x) \quad \text{für} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (106)$$

Die $\Lambda_{R,L}$ sind 2×2 komplexe Matrizen, die von der Drehungswinkel $\vec{\omega}$ und dem Boost-Vektor \vec{v} abhängen.

$$\vec{J}_{L/R} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \quad \vec{K}_{L/R} = \mp \frac{i}{2}\vec{\sigma} \quad (107)$$

zwar ist K_a nicht Hermitesch, die Vertauschungrelationen sind wohl erfüllt. Dann haben wir für Boost und Drehung:

$$\Lambda_L(\vec{\omega}, \vec{v}) = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega} - i\vec{v})}, \quad \Lambda_R(\vec{\omega}, \vec{v}) = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega} + i\vec{v})} \quad (108)$$

Eigenschaften der Transformationsmatrizen:

$$\Lambda_L(\vec{\omega}, \vec{\nu}) = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega}-i\vec{\nu})}, \quad \Lambda_R(\vec{\omega}, \vec{\nu}) = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega}+i\vec{\nu})} \quad (109)$$

- $\Lambda_L(\vec{\omega}, \vec{\nu}) = \Lambda_R(\vec{\omega}, -\vec{\nu})$
- $\Lambda_{L/R}^{-1}(\vec{\omega}, \vec{\nu}) = \Lambda_{L/R}(-\vec{\omega}, -\vec{\nu})$ aber $\Lambda_{L/R}^+(\vec{\omega}, \vec{\nu}) = \Lambda_{L/R}(-\vec{\omega}, \vec{\nu})$
- $\Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^+$ und $\Lambda_R^{-1} = \Lambda_L^+$, dadurch $\Lambda_R^* = (\Lambda_L^{-1})^T = (\Lambda_L^T)^{-1}$
- $\sigma^2 \Lambda_L \sigma^2 = \sigma^2 e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega}-i\vec{\nu})} \sigma^2 = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}^*(\vec{\omega}-i\vec{\nu})} = \left[e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega}+i\vec{\nu})} \right]^* = \Lambda_R^*$
- $\Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L = \sigma^2$ und $\Lambda_R^T \sigma^2 \Lambda_R = \sigma^2$

Folgen für einen L-Spinor $\sigma^2 \psi_L^*$ ist in der R-Darstellung.

$$\sigma^2 \psi_L^* \rightarrow \sigma^2 \Lambda_L^* \psi_L^* = \sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R \sigma^2 \psi_L^* \quad (110)$$

aber auch: $\sigma^2 \psi_R^*$ ist in der L-Darstellung.

und, für zwei L-Spinoren: $\chi_L^T \sigma^2 \psi_L$ ist ein Skalar.

$$\chi_L^T \sigma^2 \psi_L \rightarrow \psi_L^T \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L \psi_L = \chi_L^T \sigma^2 \psi_L \quad (111)$$

Wir haben erfahren, dass $\sigma^2 \psi_R^*$ ein L-Spinor ist, und $\chi_L^T \sigma^2 \psi_L$ ein Skalar ist. Es folgt:

$$i(\sigma^2 \psi_R^*)^T \sigma^2 \psi_L = i\psi_R^+ \psi_L \quad (112)$$

ist ein Lorentz-Skalar. $\psi_L^+ \psi_L$ ist aber kein Skalar:

$$\psi_L^+ \psi_L \rightarrow \psi_L^+ e^{\vec{\sigma} \vec{\nu}} \psi_L = \psi_L^+ \psi_L + \vec{\nu} \psi_L^+ \vec{\sigma} \psi_L + \mathcal{O}(\nu^2) \quad (113)$$

Die Drehung ist unitär dargestellt, unter Drehung transformiert $\psi_L^+ \psi_L$ als Skalar, aber nicht unter dem Boost. Für das hier erschienenes Objekt:

$$\psi_L^+ \sigma^a \psi_L \rightarrow \psi_L^+ e^{\frac{1}{2} \vec{\sigma} \vec{\nu}} \sigma^a e^{\frac{1}{2} \vec{\sigma} \vec{\nu}} \psi_L = \psi_L^+ \sigma^a \psi_L + \nu^a \psi_L^+ \psi_L + \mathcal{O}(\nu^2) \quad (114)$$

Die Gleichungen (113) und (114) zusammen sind die übliche Transformationsregel für Vierervektoren (V):

$$\delta V^\mu = \alpha^{\mu\nu} g_{\nu\rho} V^\rho, \quad -\alpha^{i0} = \alpha^{0i} = -\nu^i \quad (115)$$

Dafür müssen wir noch die Pauli-Matrizen als Vierervektoren einführen

$$\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \quad (116)$$

dessen jede Komponente eine 2×2 Matrix ist.

Unser Ziel ist eine Bewegungsgleichung für Ψ_L und Ψ_R .

Um den μ -index der Ableitung ∂_μ zu absorbieren brauchen wir einen anderen Vierervektor. Aus der letzten Seite:

$$\Psi_L^\dagger \sigma^\mu \Psi_L : \text{Vektor} \Rightarrow \Psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L : \text{Skalar} \quad (117)$$

So könnte eine Bewegungsgleichung so aussehen:

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L = 0 \quad (118)$$

Diese beschreibt die freie Neutrinos im Standard Modell.

Ψ_L hat zwei komponente, diese sind aber nicht die für den Spin (!)

Eine ähnliche Gleichung gilt für die R -Darstellung:

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_R = 0 \quad (119)$$

allerdings mit $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$.

Die Gleichungen sind linear, translationsinvariant, usw. . .

→ Lösung mit ebenen Wellen.

Einfachheit halber sollen unsere Lösungsvorschläge einen in der z-Richtung ausgerichteten Impuls (Wellenvektor) haben.

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t - ik_3 x^3} \quad (120)$$

In die Bewegungsgleichung eingesetzt:

$$(i\sigma^0 \partial_0 + i\sigma^3 \partial_3) \Psi_L = \begin{pmatrix} \omega + k_3 & 0 \\ 0 & \omega - k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t - ik_3 x^3} = 0 \quad (121)$$

Diese ist eine Eigenwertgleichung bei einem Eigenwert von 0. Diese Gleichung hat zwei Lösungen, eine bei $\omega + k_3 = 0$ und eine bei $\omega - k_3 = 0$.

Die Energie des Feldes ist als $\hbar\omega$ definiert, da $i\omega_0$ die Zeitverschiebungsoperator ist.

Der Fall: $\omega > 0$

$$+k_3 \text{ Impuls} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t - ik_3 x^3} \quad (122)$$

$$-k_3 \text{ Impuls} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_3 x^3} \quad (123)$$

Der Drehimpulsoperator (in der z-Richtung) ist eine Matrix

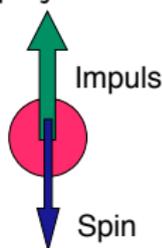
$$J_3 = \frac{1}{2}\sigma^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (124)$$

Effekt auf die beiden Lösungen:

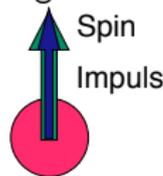
$$+k_3 \text{ Impuls} \quad J_3 \Psi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t - ik_3 x^3} = -\frac{1}{2} \Psi_L \quad (125)$$

$$-k_3 \text{ Impuls} \quad J_3 \Psi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_3 x^3} = +\frac{1}{2} \Psi_L \quad (126)$$

Helizität: Drehimpuls projiziert auf dem Richtungsvektor des Impulses.



linkshändig



rechtshändig

Ψ_L (bei $\omega > 0$) ist linkshändig.

Wenn wir $k_3 > 0$ festlegen, kann man die Lösungen nach ω sortieren:

$$\omega > 0 \quad J_3 \Psi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t - i\omega x^3} = -\frac{1}{2} \Psi_L \quad (127)$$

$$\omega < 0 \quad J_3 \Psi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + i\omega x^3} = +\frac{1}{2} \Psi_L \quad (128)$$

Die Lösung mit positiver Energie ($\omega > 0$) nennen wir als Teilchen, sie ist linkshändig.

Die rechshändige Lösung mit $\omega < 0$ ist etwas neues, so etwas gab in der Quantenmechanik nicht, sie ist ein relativistisches Phänomen: **Das**

Antiteilchen.

In der R -Darstellung hat man die rechtshändige Lösung beim Teilchen.

$$\omega > 0 \quad J_3 \Psi_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t - i\omega x^3} = +\frac{1}{2} \Psi_R \quad (129)$$

$$\omega < 0 \quad J_3 \Psi_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + i\omega x^3} = -\frac{1}{2} \Psi_R \quad (130)$$

Weiter mit $k_3 > 0$, (unser Bezugssystem ist zum Impuls \vec{k} gebunden).
Insgesamt gibt es also zwei Lösungen in beiden Darstellungen:

$$\text{Teilchen} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ik_3 t - ik_3 x^3} \quad (131)$$

$$\text{Antiteilchen} \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+ik_3 t - ik_3 x^3} \quad (132)$$

$$\text{Teilchen} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_3 t - ik_3 x^3} \quad (133)$$

$$\text{Antiteilchen} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+ik_3 t - ik_3 x^3} \quad (134)$$

Was passiert bei einer Spiegelung?

Spin ist Pseudovektor, Impuls ist Vektor. \rightarrow Helizität ist ein Pseudoskalar, sie wechselt Vorzeichen bei Spiegelung. **Raumspiegelung bildet aus Ψ_L Teilchen ein Ψ_R Teilchen und aus Ψ_R Antiteilchen ein Ψ_L Antiteilchen.**

(Bei einer Raumspiegelung ist der Faktor $e^{-i\omega t}$ unverändert, aus positiver Energie wird keine negative Energie.)

Die Spiegelung ist keine Symmetrie der Natur. (Daher kann ein fundamentales Teilchen (Neutrino) zur L -Darstellung gehören.)

Spiegelung ist aber eine Symmetrie der Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik. Zu welchen Gleichungen führt diese Symmetrie?

Spiegelung: $\Psi_L \leftrightarrow \Psi_R$.

Ein einer Gleichung zwei Arten von Spinoren: wir bauen einen großen Spinor mit vier Komponenten aus den beiden kleinen (**Bispinor**):

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \quad (135)$$

Raumspiegelung;

$$\Psi \rightarrow \Psi^P = \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \Psi = \gamma^0 \Psi \quad (136)$$

Wir können für die beiden Darstellungen eine Matrix einführen, die die andere Komponente wegmacht:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad P_L \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (137)$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad P_R \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_R \end{pmatrix} \quad (138)$$

Dafür haben wir eine neue 4×4 Matrix:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (139)$$

Diese Matrizen verfügen über den üblichen Projektor-Eigenschaften:

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad (140)$$

da $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$.

Wir wollen Lorentz-invarianten bilden, aus denen wir eine Bewegungsgleichung konstruieren können. Hier die Summe zwei Skalaren: mit Ψ_L und mit Ψ_R .

$$i\Psi^+ \begin{pmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \Psi \quad (141)$$

Konventionell rechnet man mit

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0 = (\Psi_R^+, \Psi_L^+) \quad (142)$$

Der Skalarausdruck (141) nimmt dann die Form:

$$i\bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \Psi \quad (143)$$

Jetzt definieren wir weitere **Gamma-Matrizen**:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (144)$$

Hier γ^0 stimmt mit Eq. (136) überein. So ist der Skalar:

$$i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad (145)$$

Der Index μ von γ^μ verhält sich wie ein Viererindex.

Wenn die Felder in L und R -Darstellungen kombiniert werden, entsteht ein weiterer Skalarausdruck:

$$\Psi_R^+ \Psi_L + \Psi_L^+ \Psi_R \quad (146)$$

(siehe Gleichung (112)). In der Schreibweise mit vier Komponenten:

$$\Psi^+ \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi} \Psi \quad (147)$$

So können wir die beiden Skalaren mit einem frei wählbaren Parameter m kombinieren:

$$i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi] \quad (148)$$

das geklammerte Teil kann als Bewegungsgleichung genommen werden. *(Dieser Schritt wird später mit dem Konzept der Euler-Lagrange-Gleichungen begründet.)*

So entsteht die **Dirac-Gleichung**:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi = 0 \quad (149)$$

Sie beschreibt einen links- und einen rechthändigen Spinor, die, geregelt vom Parameter m , ineinander umwandeln können.

Die Gamma-Matrizen sind wichtige Bestandteile der Dirac-Gleichung.

Eigenschaften:

- $\gamma^5 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\sigma = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$
- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

Wir haben die γ -Matrizen explizit definiert, und die Eigenschaften erhalten.

Andersrum: diese beiden Eigenschaften geben eine Algebra (Clifford-Algebra) an, und in den vorigen Seiten haben wir bloß eine Darstellung gefunden.

In der Tat: die vier Indizes der Felder kann man untereinander so transformieren, dass die Form der Matrizen ganz anders aussieht. Diese Eigenschaften sind aber generell gültig:

- $\gamma^\mu \gamma^\nu g_{\mu\nu} = 4$
- $\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu g_{\mu\nu} = -2\gamma^\rho$
- $\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu g_{\mu\nu} = 4g^{\rho\sigma}$
- $\text{Tr } \gamma^\mu = 0$
- $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}$
- $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = 0$
- $\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$

Wie transformiert nun der Bispinor unter einer Lorentz-Gruppe:

$$S(\Lambda)\Psi = S(\lambda) \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_L \Psi_L \\ \Lambda_R \Psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega}-i\vec{\nu})} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}(\vec{\omega}+i\vec{\nu})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \quad (150)$$

Gesucht wird $S_{\mu\nu}$ (ein antisymmetrischer Tensor), so dass mit

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_x & -\nu_y & -\nu_z \\ \nu_x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \nu_y & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \nu_z & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (151)$$

$$S(\Lambda)\Psi = 1 - \frac{i}{2}\alpha_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\Psi + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (152)$$

Aus den γ -Matrizen kombinierend sind die Möglichkeiten für einen antisymmetrischen Tensor mit zwei Lorentz-Indizes sehr überschaubar:

$$\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\gamma^0\gamma^a - \gamma^a\gamma^0)\nu_a - \frac{1}{4}\epsilon_{abc}[\gamma^a, \gamma^b]\omega_c \quad (153)$$

In der chiralen Basis gelten

$$\begin{aligned}\gamma^0\gamma^j - \gamma^j\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^j \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \quad (154)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a &= \begin{pmatrix} -\sigma^a\sigma^b & 0 \\ 0 & -\sigma^a\sigma^b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^b\sigma^a & 0 \\ 0 & -\sigma^b\sigma^a \end{pmatrix} \\ &= -2i\epsilon_{abd} \begin{pmatrix} \sigma^d & 0 \\ 0 & \sigma^d \end{pmatrix} \quad (155)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\gamma^0\gamma^a - \gamma^a\gamma^0)\nu_a - \frac{1}{4}\epsilon_{abc}[\gamma^a, \gamma^b]\omega_c \quad (156)$$

$$\begin{aligned}&= \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{\nu} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma}\vec{\nu} \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\epsilon_{abd}\epsilon_{abc} \begin{pmatrix} \sigma^d & 0 \\ 0 & \sigma^d \end{pmatrix} \omega_c \\ &= i \begin{pmatrix} (\vec{\omega} - i\vec{\nu})\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (\vec{\omega} + i\vec{\nu})\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (157)\end{aligned}$$

So mit $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ist

$$S(\Lambda)\Psi = \Psi - \frac{i}{2}\alpha_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\Psi + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (158)$$

Hat man zwei Bispinoren (ψ, η) , sind fünf kovariante Kombinationen Möglich, in denen die Dirac-Indizes kontrahiert werden:

$$\bar{\psi}\eta \quad \text{Skalar} \quad (159)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\eta \quad \text{Vierervektor} \quad (160)$$

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\eta \quad \text{Tensor} \quad (161)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\eta \quad \text{Axialvektor} \quad (162)$$

$$\bar{\psi}\gamma^5\eta \quad \text{Pseudoskalar} \quad (163)$$

Mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu\gamma^\nu]$.

Neben der Dirac-Gleichung kann kompliziertere kovariante Gleichungen konzipieren:

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu + m][i\gamma^\nu\partial_\nu - m]\Phi = 0 \quad (164)$$

Wenn wir nun die algebraische Regeln anwenden, bekommen wir

$$[-g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2]\Phi = 0. \quad (165)$$

Diese Gleichung ist vier Kopien der Klein-Gordon Gleichung.

In der Einleitung haben wir die chirale Basis für die Gamma-Matrizen verwendet:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (166)$$

Eine andere Basis ist z.B. die Dirac-Basis

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (167)$$

Beide Varianten erfüllen die Regeln der Clifford-Algebra, und die Dirac-Gleichung darf in diesen oder weiteren Darstellungen geschrieben. Nur die Komponente des Ψ Spinors haben eine andere Bedeutung.

In der Majorana Basis sind alle Matrizen imaginär:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}$$

Es gelten in alle drei Varianten:

$$\gamma^{0+} = \gamma^0 \quad \gamma^{j+} = -\gamma^j \quad (j = 1 \dots 3) \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\mu+} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu \quad (168)$$

Lösen wir nun die freie Dirac-Gleichung:

$$i(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (169)$$

Ansatz (Ebene Welle mit einem konstanten Bispinor a):

$$\Psi_p = u_p e^{-ip_\mu x^\mu} + v_p e^{ip_\mu x^\mu} \quad (170)$$

Man bekommt sofort:

$$(\not{p}_\mu \gamma^\mu - m)u_p = 0, \quad (\not{p}_\mu \gamma^\mu + m)v_p = 0. \quad (171)$$

Neue Schreibweise (**Feynman-Slash-Notation**):

$$\sum_\mu \partial_\mu \gamma^\mu = \not{\partial}, \quad \sum_\mu p_\mu \gamma^\mu = \not{p} \quad (172)$$

So wird z.B.:

$$\not{p}\not{p} = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\mu p_\nu \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = p^2 \quad (173)$$

So hat man:

$$(\not{p} - m)u_p = 0, \quad (\not{p} + m)v_p = 0. \quad (174)$$

Jetzt rechnen wir konkret in der Dirac Basis:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (175)$$

Wir suchen den Eigenvektor (u_p) der 4×4 Matrix zu einem Eigenwert von Null.

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & -p_0 - m \end{pmatrix} u_p = 0 \quad (176)$$

Ein solcher Eigenwert ist nur möglich wenn die Determinante = 0. Die Determinante ist in jedem Koordinatensystem gleich, wir wählen als z-Achse die Richtung von \vec{p} :

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} p_0 - m & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & -p_0 - m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_0 - m & 0 & |\vec{p}| & 0 \\ 0 & p_0 - m & 0 & -|\vec{p}| \\ -|\vec{p}| & 0 & -p_0 - m & 0 \\ 0 & |\vec{p}| & 0 & -p_0 - m \end{vmatrix} \\ &= (p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)^2 = (p^2 - m^2)^2 \end{aligned} \quad (177)$$

→ $m \equiv$ Masse

$$\begin{pmatrix} p_0 - m & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & -p_0 - m \end{pmatrix} u_p = 0 \quad \begin{pmatrix} p_0 + m & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & -p_0 + m \end{pmatrix} v_p = 0 \quad (178)$$

Wir schreiben kurz $\omega_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Die Determinante ist in beiden Fällen Null, wenn $p_0 = \pm\omega_p$. Für $p_0 = \omega_p$:

$$\begin{pmatrix} \omega_p - m & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & -\omega_p - m \end{pmatrix} u_p = 0 \quad \begin{pmatrix} \omega_p + m & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & -\omega_p + m \end{pmatrix} v_p = 0 \quad (179)$$

Formal lösen wir für u_p :

$$\begin{pmatrix} \omega_p - m & \vec{p}\vec{\sigma} \\ -\vec{p}\vec{\sigma} & -\omega_p - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_p + m \\ \vec{p}\vec{\sigma} \end{pmatrix} = 0 \quad (180)$$

Beide Seiten sind 4×2 Matrizen. Von rechts wird noch mit χ_s 2×1 Matrix (\equiv Spinor) Multipliziert:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (181)$$

Nach Normierung entsteht: $u_p = \sqrt{\omega_p + m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{\omega_p + m} \chi_s \end{pmatrix}$.

Es gibt also insgesamt vier Lösungen:

$$u(\boldsymbol{p}, s) = \sqrt{\omega_{\boldsymbol{p}} + m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}}{\omega_{\boldsymbol{p}} + m} \chi_s \end{pmatrix} \quad (182)$$

$$v(\boldsymbol{p}, s) = \sqrt{\omega_{\boldsymbol{p}} + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}}{\omega_{\boldsymbol{p}} + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (183)$$

$$(184)$$

mit $s = 1, 2$. Die Normierung ist gewählt so, dass

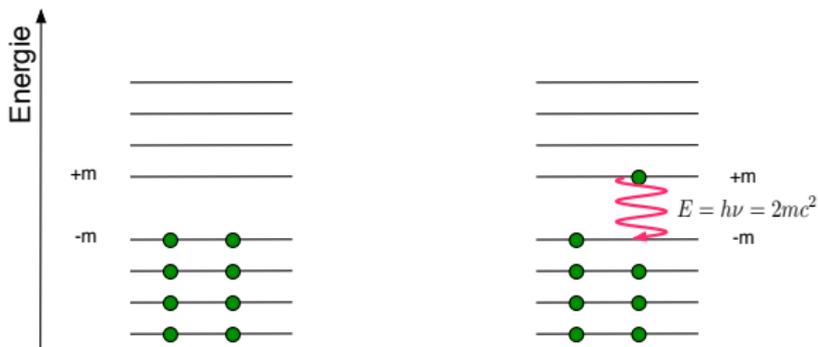
$$\bar{u}(\boldsymbol{p}, s) u(\boldsymbol{p}, s') = 2m \delta_{s, s'}, \quad \bar{v}(\boldsymbol{p}, s) v(\boldsymbol{p}, s') = -2m \delta_{s, s'}. \quad (185)$$

Das dyadische Produkt:

$$\sum_s u_{\alpha}(\boldsymbol{p}, s) \bar{u}_{\beta}(\boldsymbol{p}, s) = (\not{\boldsymbol{p}} + m)_{\alpha\beta} \quad (186)$$

$$\sum_s v_{\alpha}(\boldsymbol{p}, s) \bar{v}_{\beta}(\boldsymbol{p}, s) = (\not{\boldsymbol{p}} - m)_{\alpha\beta} \quad (187)$$

Um für die Lösungen mit negativer Energie eine Erklärung zu geben hat Dirac all solche Zustände als besetzt erklärt. Hierfür hat er auf das Pauli-Prinzip zurückgegriffen: jeder klassische Zustand darf höchstens einmal belegt werden.



Wenn ein nun diese Konfiguration einmahl erregt wird erhält man ein Teilchen-Antiteilchen Paar. Das Loch mit negativer Energie gilt als Antiteilchen.

Man kann eine **erhaltene Ladung** definieren:

Dirac-Gleichung, multipliziert mit $\bar{\Psi}$ von links:

$$\bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi = \bar{\Psi} [\partial_\mu i\gamma^\mu \Psi] - m\bar{\Psi}\Psi = 0 \quad (188)$$

Adjungierte Dirac-Gleichung:

$$\partial_\mu \Psi^+ (-i)\gamma^{\mu+} - m\Psi^+ = 0 \quad (189)$$

Multipliziert mit $\gamma^0\Psi$ von rechts:

$$[\partial_\mu \Psi^+] (-i)\gamma^{\mu+} \gamma^0 \Psi - m\Psi^+ \gamma^0 \Psi = 0 \quad (190)$$

Die γ -Matrizen sind so gewählt, dass $\gamma^{\mu+} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu$, Gl. (168):

$$[\partial_\mu \bar{\Psi}] (-i\gamma^\mu) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi = 0 \quad (191)$$

Subtrahiert man Gl. (191) aus (188) haben wir:

$$\bar{\Psi} [\partial_\mu i\gamma^\mu \Psi] + [\partial_\mu \bar{\Psi}] i\gamma^\mu \Psi = \partial_\mu [\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi] = 0 \quad (192)$$

$$\text{für } j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi : \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \equiv \frac{\partial j^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int d^3r \Psi^+ \Psi = \text{const} \quad (193)$$

Was ist diese Ladungsdichte und dieser Strom für die beiden Lösungen?

$$\Psi_p = u_p e^{-ip_\mu x^\mu} + v_p e^{ip_\mu x^\mu} \quad (194)$$

Wenn u_p beschreibt ein Teilchen mit der Energie $p_0 > 0$ und Impuls \vec{p} , dann beschreibt v_p ein Teilchen mit der energie $-p_0$ und Impuls $-\vec{p}$.

Für die u_p Lösung (gemittelt über die zwei Stellungen des χ_s), siehe Gl. (186):

$$\frac{1}{2} \sum_s \bar{u}_{p,s} \gamma^\mu u_{p,s} = \frac{1}{2} \sum_s \sum_{\alpha,\beta} \bar{u}_{p,s,\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu u_{p,s,\beta} = \frac{1}{2} \sum_s \sum_{\alpha,\beta} (\not{p} + m)_{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \quad (195)$$

$$\frac{1}{2} \sum_s \bar{u}_{p,s} \gamma^\mu u_{p,s} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\not{p} + m) \gamma^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}, p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu + m \frac{1}{2} \text{Tr} \gamma^\mu = 2p^\mu \quad (196)$$

Ähnlich bekommen wir für die v -Lösung:

$$\frac{1}{2} \sum_s \bar{v}_{p,s} \gamma^\mu v_{p,s} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\not{p} - m) \gamma^0 = \frac{1}{2} \text{Tr}, p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu - m \frac{1}{2} \text{Tr} \gamma^\mu = 2p^\mu \quad (197)$$

Bei der u -Lösung steht \vec{j} in Richtung des Impulses, bei der v -Lösung steht er verkehrt.

Ladungskonjugation: Für den Fall, das ein System sich genau so verhält wenn alle Teilchen in Antiteilchen und alle Antiteilchen in Teilchen gewandelt werden, führen wir diese Transformation formell ein:

$$\psi^{(c)} = C\psi^* \quad (198)$$

hier ist C eine 4×4 Matrix mit den Eigenschaften:

$$C^+ C = 1 \quad \text{und} \quad C^+ \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^* \quad \mu = 0 \dots 3 \quad (199)$$

Z.B. in der chiralen Darstellung ist $C = i\gamma^2$ eine gute Wahl, in der Dirac-Darstellung: $C = i\gamma^2\gamma^0$.

Behauptung: Die Lorentz-Transformation eines Ladungskonjugierten Feldes ist die Ladungskonjugierte des Lorentz-Transformierten Feldes:

$$S[\Lambda]\psi^{(c)} = S[\Lambda]C\psi^* = CS[\Lambda]^*\psi^* = C(S[\Lambda]\psi)^* = (S[\Lambda]\psi)^{(c)} \quad (200)$$

Hier ist S die Spinordarstellung der Lorentz-Gruppe, in infinitesimaler Form:

$$S(\Lambda(\alpha)) = 1 - \frac{i}{2}\alpha_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (201)$$

So ist die Ladungskonjugierte Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned}(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 &\Rightarrow (-i\cancel{\partial}^* - m)\psi^* = 0 \\ &\Rightarrow C(-i\cancel{\partial}^* - m)\psi^* = (i\cancel{\partial} - m)\psi^{(c)} = 0\end{aligned}\quad (202)$$

Die Dirac-Gleichung selbst hat die Ladungskonjugation-Symmetrie.

Wie verhalten sich die Lösungen?

$$\text{In Dirac - Basis : } C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\quad (203)$$

Nehmen wir eine u_p -Lösung:

$$\begin{aligned}Cu_p e^{-ipx} &= \sqrt{\omega_p + m} C \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{m+\omega_p} \end{pmatrix} \chi_s e^{-ipx} = \sqrt{\omega_p + m} \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{m+\omega_p} \\ -i\sigma^2 \end{pmatrix} \chi_s e^{ipx} \\ &= \sqrt{\omega_p + m} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{m+\omega_p} \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{(-i\sigma^2)\chi_s}_{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \chi_s} e^{ipx}\end{aligned}\quad (204)$$

$$\text{Mit } q^\mu = (p^0, -p^1, -p^2, -p^3) : v(q, s) = \sqrt{\omega_q + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{q}\vec{\sigma}}{\omega_q + m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s.$$

(Die Matrix vor χ_s ist eine -180° Drehung: $e^{-i\frac{\sigma_2}{2}\pi} = -i\sigma_2$)

Schon in der klassischen Mechanik konnte man merken, dass die Newtonsche Bewegungsgleichungen die Wirkung minimieren, und somit

$$\delta S = 0. \quad (205)$$

Die Wirkung ist das Zeit-Integral der Lagrange-Funktion:

$$S(a, b, \{q_i(t_a)\}, \{q_i(t_b)\}) = \int_a^b L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) dt \quad (206)$$

Die Wirkung ist Minimal, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind:

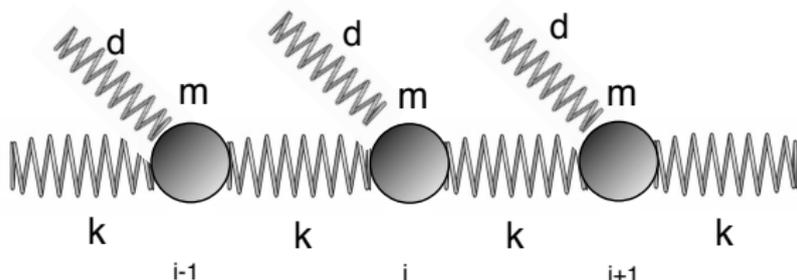
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (207)$$

In der Regel ist die Lagrange-Funktion die Differenz der kinetischen und Potentieller Energie: $L = T - V$.

Z.B. bei einer Reihe von Oszillatoren:

$$L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_i \frac{m_i \omega_i^2}{2} q_i^2 \quad (208)$$

Eine (unendliche) Kette von Oszillatoren:



$$L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \sum_i \left[\frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{d_i}{2} q_i^2 - \frac{k}{2} (q_i - q_{i+1})^2 \right] \quad (209)$$

Mit $\phi_i = q_i(mk)^{1/4}$, $a = (m/k)^{1/2}$ und $\mu = (d/m)^{1/2}$ sieht L so aus:

$$L(\{\phi_i\}, \{\dot{\phi}_i\}, t) = \sum_i \left[\frac{a}{2} \dot{\phi}_i^2 - \frac{a\mu^2}{2} \phi_i^2 - \frac{1}{2a} (\phi_i - \phi_{i+1})^2 \right] \quad (210)$$

So sind die Euler-Lagrange-Gleichungen (mit a geteilt):

$$\ddot{\phi}_i + \mu^2 \phi_i + \frac{1}{a^2} (2\phi_i - \phi_{i+1} - \phi_{i-1}) = 0 \quad (211)$$

Im $a \rightarrow 0$ Limes und verallgemeinert in 3+1 Dimensionen:

$$\begin{aligned}
 L(\{\phi_i\}, \{\dot{\phi}_i\}, t) &= \sum_i \left[\frac{a}{2} \dot{\phi}_i^2 - \frac{a}{2} \mu^2 \phi_i^2 - \frac{1}{2a} (\phi_i - \phi_{i+1})^2 \right] \\
 &\rightarrow \int dx \left[\frac{1}{2} (\dot{\phi}(x))^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi(x))^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi(x))^2 \right] \\
 &\rightarrow L = \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\nu \phi(x) \partial^\nu \phi(x) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi(x)^2 \right] \quad (212)
 \end{aligned}$$

Was unter $\int dx$ steht, ist die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi(x) \partial^\nu \phi(x) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi(x)^2 \quad (213)$$

Und für die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi}_i + \nu^2 \phi_i + \frac{1}{a^2} (2\phi_i - \phi_{i+1} - \phi_{i-1}) &= 0 \\
 \rightarrow \ddot{\phi}(x) - \Delta \phi(x) + \mu^2 \phi_i &= 0 \\
 \rightarrow (\partial_\nu \partial^\nu + \mu^2) \phi(x) &= 0, \quad \text{Die Klein-Gordon-Gleichung} \quad (214)
 \end{aligned}$$

Mit einem Limes-Verfahren bekommt man also, dass

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi(x) \partial^\nu \phi(x) - \frac{1}{2} \mu^2 \phi(x)^2 \quad \rightarrow \quad (\partial_\nu \partial^\nu + \mu^2) \phi(x) = 0 \quad (215)$$

Die Regel für die Euler-Lagrange-Gleichung ist entsprechend verallgemeinert:

Lagrange-Funktion \rightarrow *Lagrange-Funktional*

$$\begin{aligned} 0 \equiv \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} &= \frac{\int \mathcal{L}(\phi, \partial \phi, y) d^4 y}{\delta \phi(x)} \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(y)} \underbrace{\frac{\delta \Phi(y)}{\delta \Phi(x)}}_{\delta(x-y)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi(y))} \underbrace{\frac{\delta (\partial_\mu \Phi(y))}{\delta \Phi(x)}}_{\partial_\mu \delta(y-x)} \right] d^4 y \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(y)} \delta(x-y) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi(y))} \delta(y-x) \right] d^4 y \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) \end{aligned} \quad (216)$$

Die Wirkung S ist eine Zahl (auch bei einer Feldtheorie), und soll bei einer Transformation (z.B. Lorentz-Boost, Drehung, Translation) erhalten bleiben. Wir verlangen dass S alle an Symmetrien der Natur invariant ist. Es gebe eine infinitesimale Transformation

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \phi_i + \varepsilon \Delta \phi_i \quad x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon \Delta x^\mu \quad (217)$$

Unter dem Integral $S = \int \mathcal{L} d^4x$ ändert sich das Lagrange-Funktional:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' + \varepsilon \Delta \mathcal{L} \quad (218)$$

ϕ (und ϕ' auch) ist eine Lösung wo $\delta S = 0$, so ist die E-L-Gleichung:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_i)} \quad (219)$$

$$0 = \delta S' = \delta S + \delta \left(\varepsilon \int d^4x \Delta \mathcal{L} \right), \quad (220)$$

d.h. $\int \Delta \mathcal{L} d^4x$ ist Null, daher $\exists J: \Delta \mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu$

$$\begin{aligned} 0 = \Delta \mathcal{L} - \partial_\mu J^\mu &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi'_i} \Delta \phi'_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi'_i)} \partial_\mu \Delta \phi'_i - \partial_\mu J^\mu \\ &= \underbrace{\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi'_i} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi'_i)} \right)}_{\text{E-L-Gleichung} \rightarrow 0} \Delta \phi'_i + \partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi'_i)} \Delta \phi_i - J^\mu \right)}_{j^\mu} \end{aligned} \quad (221)$$

Noether-Theorem:

Wenn es eine stetige Symmetrie-Transformation gibt, die durch $\phi \rightarrow \phi + \epsilon \Delta \phi$ angegeben ist, und

$$\Delta \mathcal{L} \equiv \partial_\mu J^\mu \quad (222)$$

Dann ist

$$j^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \Delta \phi_i - J^\mu \quad (223)$$

eine erhaltene Viererstromdichte

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (224)$$

d.h. das 3-er Volumenintegral $Q = \int_V d^3x j^0$ konstant ist

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} = \int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} + \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j} = \int_V d^3x \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (225)$$

Beispiel: Skalares Feld und Translation

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \varepsilon a^\mu \quad a^\mu \text{ ist ein konstanter Vektor} \quad (226)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + \varepsilon a) = \phi(x) + \varepsilon a^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (227)$$

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x + \varepsilon a) = \mathcal{L}(x) + \varepsilon a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) \quad (228)$$

So ist in unserem Fall $\Delta\phi = a^\mu \partial_\mu \phi$ und $\Delta\mathcal{L} = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$ und so $J^\mu = a^\mu \mathcal{L}$

$$j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi - J^\mu = a^\nu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - a^\mu \mathcal{L} \quad (229)$$

Wir nehmen jetzt als a^ν die Einheitsvektoren $a^\nu = \delta_\rho^\nu$:

$$j_{(\nu)}^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \partial_\nu\phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} =: T_\nu^\mu \quad \text{Energie-Impuls-Tensor} \quad (230)$$

$$\partial_\mu T_\nu^\mu(x) = 0 \quad (231)$$

$$Q_{(\rho)} = \int d^3x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\phi)} \partial_\rho\phi - \delta_\rho^0 \mathcal{L} \right) \quad (232)$$

$\Pi = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_0\phi)}$ wird kanonischer Impuls genannt. So ist die erhaltene Ladung die *Hamiltonfunktion*, d.h. die Energie:

$$Q_{(0)} = \int d^3x \left(\Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \mathcal{H}(\Pi, \phi) \quad (233)$$

Beispiel: es gebe ein komplexes Skalarfeld Φ .

Das Lagrangefunktional ist reell und Skalar. Dazu wollen wir noch die Diskrete C (Ladungskonjugation) Symmetrie:

$$C\Phi(x) = \Phi^*(x), \quad \mathcal{L}[C\Phi(x)] = (\mathcal{L}[\Phi(x)])^* = \mathcal{L}[\Phi(x)] \quad (234)$$

Die einfachste Form:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi \quad (235)$$

Was sind die Bewegungsgleichungen?

Wir tun als ob Φ und Φ^* ganz unabhängige Felder wären, und wir leiten eine Euler-Lagrange-Gleichung für beide her:

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^*} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi = 0 \quad (236)$$

$$\partial^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^\mu \Phi} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \Phi^* - m^2 \Phi^* = 0 \quad (237)$$

Mit $\Phi_1 = \sqrt{2}\text{Re } \Phi$ und $\Phi_2 = \sqrt{2}\text{Im } \Phi$ kann \mathcal{L} auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_1)(\partial^\mu \Phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_2)(\partial^\mu \Phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\Phi_1)^2 - \frac{1}{2}m^2(\Phi_2)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_j (\partial_\mu \Phi_j)(\partial^\mu \Phi_j) - \frac{1}{2} \sum_j m^2 \Phi_j \Phi_j \end{aligned} \quad (238)$$

Hier kann man eine stetige Symmetrie entdecken:

$$\Phi \rightarrow e^{i\varepsilon} \Phi, \quad \Phi^* \rightarrow \Phi^* e^{-i\varepsilon} \quad (239)$$

So haben wir

$$\Delta\Phi = i\varepsilon\Phi, \quad \Delta\Phi^* = -i\varepsilon\Phi^*, \quad \Delta\mathcal{L} = 0 \quad (240)$$

So ist

$$j^\mu \varepsilon = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi)} \Delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi^*)} \Delta\Phi^* = i(\Phi\partial_\mu\Phi^* - \Phi^*\partial_\mu\Phi)\varepsilon \quad (241)$$

Die erhaltene Ladung:

$$Q = \int d^3x i(\Phi\partial_0\Phi^* - \Phi^*\partial_0\Phi) \quad (242)$$

Wenn man mit Φ_1 und Φ_2 Felder arbeitet lautet die Symmetrietransformation:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (243)$$

$$j^\mu \varepsilon = \sum_j \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi_j)} \Delta\Phi_j = (\partial^\mu\Phi_1, \partial^\mu\Phi_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \varepsilon \quad (244)$$

Die Symmetrieeigenschaft bleibt ungebrochen wenn weitere Terme in \mathcal{L} erscheinen, die nur vom Skalarprodukt $\Phi_j \Phi_j$ bzw. $|\Phi|^2$ abhängen. z.B.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_j)(\partial^\mu \Phi_j) - V(\sqrt{\Phi_j \Phi_j}), \quad V(\varrho) = \frac{1}{2}\alpha\varrho^2 + \frac{1}{24}\varrho^4 \quad (245)$$

Die erhaltene Ladung Q hängt nicht von V ab, und gilt nach wie vor:

$$Q = \int d^3x (\partial_0 \Phi) T \Phi, \quad T : \text{Generator der Symmetrie} : \text{z.B.} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn der interne Index von Φ von $1 \dots N$ läuft, ist die Symmetriegruppe komplizierter, z.B. $O(N)$, oder $U(N)$ wenn die Felder komplex sind. Bei $SU(2)$, z.B. gibt es drei Generatoren, und so auch drei erhaltene Ladungen:

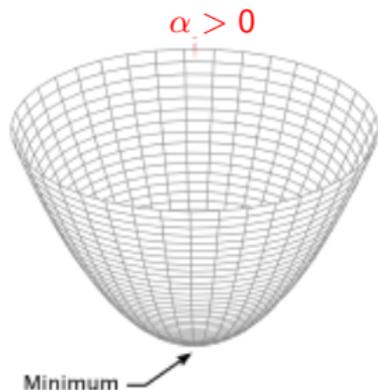
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_j^*)(\partial^\mu \Phi_j) - V(\sqrt{\Phi_j^* \Phi_j}) \quad (246)$$

Diese interne Symmetrie, die z.B. auch $SU(2)$ oder $SO(3)$ sein mag, ist nicht die Spinor-Darstellung der Lorentz-Gruppe, sondern eine neue Symmetrie.

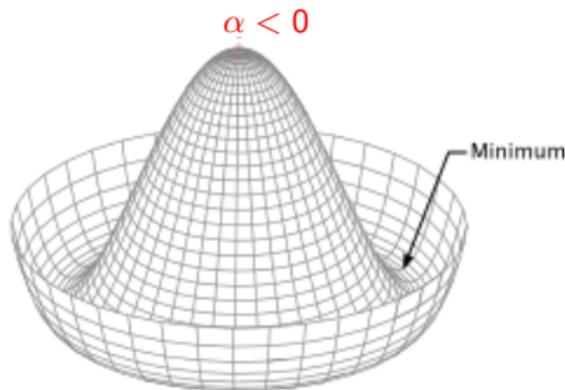
Im Skalaren Beispiel spielt α eine wichtige Rolle:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_j)(\partial^\mu \Phi_j) - V(\sqrt{\Phi_j \Phi_j}), \quad V(\varrho) = \frac{1}{2}\alpha\varrho^2 + \frac{1}{24}\varrho^4 \quad (247)$$

Die Form des Potentials V hängt vom Vorzeichen des Parameters α ab:



Das homogene Teil $\bar{\Phi}(t)$



$$\Phi(x) = \bar{\Phi}(t) + \phi(t, x) \quad \int d^3\phi(x) = 0 \quad (248)$$

bewegt sich in diesem Potential.

Bei $\alpha > 0$: Alles Symmetrisch, zwei Felder mit Masse $\sqrt{\alpha}$.

Bei $\alpha < 0$ liegt der Grundzustand nicht bei $\Phi \equiv 0$, sondern:

- Es gibt mehrere Grundzustände, die durch die Symmetrie der Lagrange-Dichte ineinander transformiert werden.
- Denn das System durch seine Dynamik in einem Grundzustand ankommt, ist die Symmetrie dadurch **spontan gebrochen** (die Lagrangedichte ist nach wie vor symmetrisch).

Ist (am einfachsten) das System in einem Zustand $\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$. können wir die Lagrangedichte mit $\Phi(x) = \bar{\Phi} + \phi(x)$, so schreiben:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_j)(\partial^\mu \phi_j) - V \quad V = \frac{1}{2}\alpha \left((\phi_1 + v)^2 + \phi_2^2 \right) + \frac{1}{24}\lambda \left((\phi_1 + v)^2 + \phi_2^2 \right)^2 \quad (249)$$

Grundzustand heißt, dass v ist dadurch bestimmt ist, dass $\partial V / \partial \phi_1 |_{\phi \equiv 0} = 0$.

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \phi_1} \right|_{\phi \equiv 0} = \alpha v + \frac{\lambda}{6} v^3 = 0 \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \phi_2} \right|_{\phi \equiv 0} = 0 \quad (250)$$

Die Massen sind durch die zweiten ableitungen gegeben. Z.B. für freie Felder:

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{(\partial \phi)^2} \right|_{\phi \equiv 0} \quad (251)$$

In gegenwart von mehreren Feldkomponente kann man im Raum der internen Symmetrie Eigenmoden definieren. Der kinetische Term $(\partial_\mu \phi_i) \partial^\mu \phi_i$ ist diagonal, daher wenn die Moden in V gefunden sind, gelten die für \mathcal{L} auch.

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1 \partial \phi_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2 \partial \phi_2} \end{array} \right) \Bigg|_{\phi \equiv 0} = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (252)$$

Die Komponente $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1 \partial \phi_1} = \alpha - \frac{\lambda}{24} v^2$ haben wir mit $\partial V / \partial \phi_1 = \alpha v + \frac{\lambda}{6} v^3 = 0$ vereinfacht. Die Massen² entstehen nun als die die Eigenwerte dieser Matrix:

$$\text{Radial : } m_R^2 = -2\alpha, \quad \text{Symmetrie : } \equiv \text{Goldstone } m_G^2 = 0 \quad (253)$$

Goldstonetheorem: Für jede spontan gebrochene stetige Symmetrie gibt es einen Eigenmodus mit Null Eigenwert. Dieser entspricht einem Teilchenfeld (Nambu-Goldstone-Boson) mit Masse Null.

Wie kann der Formalismus auch für Spinorfelder verallgemeinern?

Weiterhin soll \mathcal{L} reell und skalar sein.

Um die linkshändige Spinorgleichung zu erhalten:

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L = 0 \quad (254)$$

können wir die folgende Lagrange-Dichte verwenden:

$$\mathcal{L}_L = \Psi_L^+ i\sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L \quad (255)$$

Bei den Euler-Lagrange-Gleichungen werden Φ^+ und Ψ als unabhängige Variablen betrachtet.

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_L}{\delta \partial_\mu \Psi_L^+} = \frac{\delta \mathcal{L}_L}{\delta \Psi_L^+} \Rightarrow 0 = i\sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L \quad (256)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_L}{\delta \partial_\mu \Psi_L} = \frac{\delta \mathcal{L}_L}{\delta \Psi_L} \Rightarrow \partial_\mu \Psi_L^+ i\sigma^\mu = 0 \Rightarrow (i\sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L)^+ = 0 \quad (257)$$

Für rechtshändige Spinoren gilt

$$\mathcal{L}_R = \Psi_R^+ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_R \quad (258)$$

Wenn R als auch L in einem Bispinor dargestellt werden soll: $\Psi \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R \quad (259)$$

$$= i\Psi^+ \begin{pmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \Psi \quad (260)$$

$$= i\Psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad \boxed{\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0} \quad (261)$$

$$= i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \quad (262)$$

Hier wir arbeiteten in der chiralen Basis der γ -Matrizen.

Neben diesem Term, gibt es noch einen einfachen Skalarausdruck:

$$\Psi_R^+ \Psi_L + \Psi_L^+ \Psi_R = (\Psi_L^+, \Psi_R^+) \gamma^0 \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \Psi^+ \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi} \Psi \quad (263)$$

da die γ^0 Matrix so konzipiert ist, dass

$$\begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = \gamma^0 \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \quad (264)$$

Beide Terme zusammen ergeben die Dirac Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi \quad (265)$$

Wir bestimmen die Bewegungsgleichungen aus

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \quad (266)$$

Wir dürfen $\bar{\Psi}$ und Ψ als unabhängige Variablen betrachten.

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta \partial_\mu \bar{\Psi}} = \frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta \bar{\Psi}} \Rightarrow 0 = (i\cancel{\partial} - m)\Psi \quad (267)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta \partial_\mu \Psi} = \frac{\delta \mathcal{L}_D}{\delta \Psi} \Rightarrow i\partial_\nu \bar{\Psi} \gamma^\nu = -m\bar{\Psi} \quad (268)$$

Die zweite Gleichung lässt sich noch zu einer bekannteren Form bringen:

$$\begin{aligned} -i\partial_\nu \gamma^{\nu+} (\bar{\Psi})^+ + m(\bar{\Psi})^+ = 0 &\Rightarrow -(i\partial_\nu \gamma^{\nu+} - m)\gamma^0 \Psi = 0 && \boxed{(\bar{\Psi})^+ = \gamma^0 \Psi} \\ &\Rightarrow -\gamma^0 (i\partial_\nu \gamma^\nu - m)\Psi = 0 && \boxed{\gamma^{\mu+} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu} \end{aligned}$$

So entsteht aus beiden Variationen die Dirac-Gleichung.

Alle drei Formen (\mathcal{L}_L , \mathcal{L}_R , \mathcal{L}_D) verfügen über eine Symmetrieeigenschaft:

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{i\alpha}, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-i\alpha} \quad (269)$$

Beide Terme der Dirac Lagrangedichte sind invariant:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \rightarrow \bar{\Psi} e^{-i\alpha}(i\cancel{\partial} - m)e^{i\alpha}\Psi = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \quad (270)$$

Noether Ladungsdichte:

$$j^\mu{}_\alpha = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Psi)} \Delta \Psi = i\bar{\Psi} \gamma^\mu i\alpha \Psi \quad (271)$$

$$j^\mu \sim \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (272)$$

Eine andere (chirale) Transformation:

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{+i\beta\gamma^5}, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{+i\beta\gamma^5} \quad (273)$$

Zwar ist der kinetische Term invariant, und so ein Strom sich definieren lässt:

$$j_5^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi, \quad (274)$$

ist er aber nicht erhalten, sondern

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2mi\bar{\Psi} \gamma^5 \Psi \quad (275)$$

Wenn nicht mit einer Dirac-Masse es ist wohl möglich den $\bar{\Psi}\Psi$ Term mit der chiralen Symmetrie verträglich zu machen, und zwar mit zwei Skalarfelder

$$\sigma(x)\bar{\Psi}(x)\Psi(x) + i\pi(x)\bar{\Psi}(x)\gamma^5\Psi(x), \quad (276)$$

wo σ und π mit der chiralen Transformaiton mittransformieren:

$$\bar{\Psi}[\sigma(x) + i\gamma^5\pi(x)]\Psi \rightarrow \quad (277)$$

$$\bar{\Psi}e^{-i\beta\gamma^5}[\sigma(x) + \delta\sigma(x) + i\gamma^5(\pi(x) + \delta\pi(x))]e^{-i\beta\gamma^5}\Psi. \quad (278)$$

Eine Invarianz liegt vor wenn

$$\begin{pmatrix} \delta\sigma \\ \delta\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\beta \\ -2\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (279)$$

Hier erkennt man den Generator einer 2D Drehung. Dabei wird $\sigma^2 + \pi^2$ automatisch invariant. So können wir eine Theorie mit chiraler Symmetrie erfinden:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)\partial^\mu\pi - h\bar{\Psi}[\sigma + i\gamma^5\pi]\Psi - V(\sigma^2 + \pi^2) \quad (280)$$

σ und π sind sonst von der Phasensymmetrie ($\Psi \rightarrow \Psi e^{i\alpha}$) unberührt. Unter Raumspiegelung gilt $\Psi \rightarrow \gamma^0\Psi$, $\sigma \rightarrow \sigma$ und $\pi \rightarrow -\pi$.

Chirale Symmetrie und die Art ihrer Brechung sind unter den wichtigsten Eigenschaften der starken Wechselwirkung.

Es gebe zwei Spin-1/2 fermionen $N = (\text{Proton}, \text{Neutron})$. Statt einzelne Dirac-Massen einzuführen, können wir versuchen die Massen durch π und σ Felder zu erzeugen.

$$N = \begin{pmatrix} \Psi_{\text{Proton}} \\ \Psi_{\text{Neutron}} \end{pmatrix} \quad (281)$$

N hat 4 Dirac-Indizes als auch einen internen Index $j = 1..2$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \sum_{j=1}^2 \bar{N}_j \not{\partial} N_j + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi^a)^2 \\ & - h \bar{N}_j [\sigma + i \sum_{a=1}^3 \gamma^5 \tau_{jk}^a \pi^a] N_k - V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \end{aligned} \quad (282)$$

Hier τ^a sind die Pauli-Matrizen, und h ist eine Kopplungskonstante.

Symmetrien:

- $N \rightarrow e^{i\alpha} N$ **Baryonenzahl**
- $N \rightarrow e^{i\beta\gamma^5} N$ **Symmetrie von Quanteneffekten zerstört "Anomalie"**
- $N \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{\tau}} N$ **Isospin** \rightarrow Protonenmasse \approx Neutronenmasse
- $N \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\beta}\vec{\tau}\gamma^5} N$ **Chiral** Diese Symmetrie ist spontan und explicit gebrochen

In Quantenchromodynamik ist durch die Form vom Potential V eine **spontane** Brechung der Chiralen Symmetrie vorhanden (z.B. $\sigma \neq 0$ im Grundzustand, bzw. nach der spontane Brechung der Symmetrie wird durch chiralen Drehungen erreicht dass im Grundzustand $\pi = 0$ und $\sigma = v \neq 0$.)
Wir verschieben $\sigma \rightarrow \sigma + v$, so dass im Grundzustand σ ist wieder 0.

$$\mathcal{L} = i\bar{N}\not{\partial}N + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)\partial^\mu\pi - h\bar{N}[\sigma + v + i\gamma^5\tau^a\pi^a]N - V(\sigma^2 + v^2 + \vec{\pi}^2) \quad (283)$$

Effektiv für die Nukleonen (N) die Lagangedichte erhält so die Form:

$$\mathcal{L}_N = \bar{N}(i\not{\partial} - \underbrace{mv}_{\text{Nucleonenmasse}})N \quad (284)$$

Laut Goldstonetheorem sind diese drei π -Felder, die drei Pionen, Massenlos:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^{a^2}} \right|_{\text{Grundzustand}} = 0, \quad a = 1, 2, 3 \quad (285)$$

Allerdings $m_\pi \approx 140$ MeV, da die Quarkmassen doch nicht ganz Null sind \rightarrow *sowohl eine spontane als auch eine explizite Brechung der Symmetrie ist vorhanden.*
Die Quarkmassen selbst entstehen auch durch eine spontane Symmetriebruchung, den Higgs-Mechanismus.

Bisher haben wir über globale Symmetrien gesprochen, z.B. die globale U(1) Symmetrie, aus der die Baryonenzahl als erhaltene Ladung stammt:

$$\Psi \rightarrow e^{-i\alpha} \Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{i\alpha} \quad (286)$$

Eine lokale Symmetrie handelt es sich wenn \mathcal{L} über eine **ortsabhängige** Phasendrehung invariant wäre:

$$\Psi \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{i\alpha(x)} \quad (287)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{i\alpha(x)} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] e^{-i\alpha(x)} \Psi(x) \\ &\rightarrow \bar{\Psi}(x) e^{i\alpha(x)} [i\gamma^\mu \partial_\mu] e^{-i\alpha(x)} \Psi(x) - \bar{\Psi}(x) m \Psi(x) \\ &\rightarrow \bar{\Psi}(x) [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) e^{i\alpha(x)} \left[i\gamma^\mu e^{-i\alpha(x)} (-i) \partial_\mu \alpha(x) \right] \Psi(x) \\ &\rightarrow \bar{\Psi}(x) [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) [\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x)] \Psi(x) \end{aligned} \quad (288)$$

Diese lokale Symmetrie ist also nicht gegeben.

Ein Dirac-Lagrangedichte transformiert unter einer lokalen U(1) Symmetrie:

$$\mathcal{L} \rightarrow \bar{\Psi}(x) [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) [\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x)] \Psi(x) \quad (289)$$

Wenn wir extra noch etwas mit entgegengesetzte Symmetriebrechung einführen:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (290)$$

$$\bar{\Psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \Psi(x) \rightarrow \frac{1}{e} \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu [\partial_\mu \alpha(x)] \Psi(x) \quad (291)$$

So kann man eine Lagrangedichte mit lokaler Symmetrie konzipieren:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x) - e \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \Psi(x), \quad (292)$$

oder, mit $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x)$, der **kovarianten Ableitung**:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) [i\gamma^\mu D_\mu - m] \Psi(x) \quad (293)$$

ist unvariant unter Eichtransformationen.

Wegen der Eichsymmetrie von A_μ in Gl. (290) müssen wir auf die direkte physikalische Bedeutung der A -felder verzichten.

Wenn wir das A_μ Vektorpotentialfeld schon eingeführt haben, wollen wir auch eine Bewegungsgleichung dazu haben. Eine Bewegungsgleichung entsteht aus \mathcal{L} automatisch wenn es einen Term mit A -Ableitungen gibt.

Die eben postulierte lokale $U(1)$ Symmetrie soll aber nicht gleich zerstört werden. Dabei wollen wir statt A_μ eher D_μ verwenden, der nicht nur ein Lorenzvektor ist, sondern über die Eigenschaft der Eichkovarianz verfügt:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi(x) &\rightarrow [\partial_\mu + ieA_\mu + i(\partial_\mu \alpha(x))] e^{-i\alpha(x)} \Psi(x) \\ &= e^{-i\alpha(x)} [\partial_\mu + ieA_\mu] \Psi(x) = e^{-i\alpha(x)} D_\mu \Psi(x) \end{aligned} \quad (294)$$

Es ist möglich allein aus D_μ einen Ausdruck ohne aussenstehende Ableitungen zu bekommen.

$$\begin{aligned} \text{Muster: } [\partial_x, f(x)]g(x) &= \partial_x(f(x)g(x)) - f(x)\partial_x g(x) = (\partial_x f(x))g(x) \\ &\Rightarrow [\partial_x, f(x)] = (\partial_x f(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu \\ &= (\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial_\nu + ieA_\nu) - (\partial_\nu + ieA_\nu)(\partial_\mu + ieA_\mu) \\ &= ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = ieF_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (295)$$

Jetzt können wir den Feldstärketensor in F wiedererkennen:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (296)$$

Wenn es um die U(1) lokale Symmetrie geht, ist $F_{\mu\nu}$ invariant:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &\rightarrow \partial_\mu(A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha) \\
 &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e}(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\alpha \\
 &= F_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{297}$$

Die Wirkung hat Dimension Null ($\hbar = 1$), A_μ muss genau wie ∂_μ ein Dim=1 Objekt sein:

$$[S] = 0, \quad [\mathcal{L}] = 4, \quad [\partial_\mu] = 1, \quad [A_\mu] = 1, \quad [F_{\mu\nu}] = 2 \tag{298}$$

Die einfachste Objekte mit der richtigen $[\mathcal{L}] = 4$ Dimension:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} \tag{299}$$

Da aber F antisymmetrisch ist, aus $D_\mu D_\nu F^{\mu\nu}$ wird $\frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu]F^{\mu\nu}$, letzere ist aber proportional zu $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

So ist \mathcal{L} durch die Wahl

$$\mathcal{L}_{\text{photon}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{300}$$

ein eichinvariantes Skalar. Wie schon früher diskutiert, wäre

$$\mathcal{L}_{PS} = c\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = c\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{301}$$

ein Pseudoskalar, das bei gebrochener P -Symmetrie eine Rolle spielt.

Die Lagrangefunktion der Photonen und Elektronen dürfen einfach addiert werden. Die Summe beschreibt eine neue Theorie mit Wechselwirkung zwischen den beiden Feldern. Wenn quantisiert, heißt die neue Theorie **Quantenelektrodynamik**.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (302)$$

mit

$$\cancel{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \quad (303)$$

Man kann die freie Felder und die Wechselwirkungen getrennt schreiben:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi}_{\mathcal{L}_{\text{wechselwirkung}}} \quad (304)$$

Wir wollen nun die Euler-Lagrange-Gleichungen herleiten:

$$\mathcal{L}_{\text{photon}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (305)$$

$$\partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{photon}}}{\delta \partial_\nu A_\mu} = \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\nu F^{\mu\nu} \quad (306)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{wechselwirkung}}}{\delta A_\mu} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi = -j^\mu \quad (307)$$

Insgesamt haben wir für die Dynamik der Eichfelder:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \quad (308)$$

Dieser Strom $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ wäre der Noether-Strom. *Die globale U(1) Symmetrie besteht auch in der Gegenwart der Eichfelder.*

Die Komponente des Viererstroms: $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. Laut Formel Eq. (5)

$$\mu = 0 \Rightarrow \partial_\nu F^{0\nu} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (309)$$

$$\mu = 1 \Rightarrow \partial_\nu F^{1\nu} = \dot{E}_x + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}}_{-(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x}$$

$$\mu = k \Rightarrow \partial_\nu F^{k\nu} = \dot{E}_k - (\vec{\nabla} \times \vec{B})_k = -j_k \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{B}} = \vec{j} \quad (310)$$

Die Maxwell Gleichungen sind auch in der Feldtheorie gültig, wenn wir den Noether-Strom als elektromagnetischen Strom verwenden.

Erinnerung: die homogenen Gleichungen folgen allein daraus, dass

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (311)$$

$$A_\mu = (\Phi, -\vec{A}), \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\Phi \quad (312)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (313)$$

Wir sind bei der Elektrodynamik angekommen, wenn wir die globale $U(1)$ Symmetrie der Dirac-Fermionen als lokale Symmetrie erweitert haben. Die $U(1)$ Symmetrie ist aber eine der einfachsten. Kompliziertere Theorien können auch konzipiert werden wenn statt $U(1)$ andere Gruppen verwendet werden, z.B. $U(2)$, $SU(2)$ oder sogar $SU(3)$.

In unserem Beispiel: **$U(3)$ Symmetrie:**

Um diese Symmetrie einen Sinn zu geben, wird zuerst ein Raum definiert: die Fermionfelder werden mit einem neuen Index ausgestattet:

$$\psi(x) \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} \quad (314)$$

Diese Indizes kommen extra zum Bispinor-Index und eventuell zum chiralen Index.

Die $U(3)$ Symmetrie bedeutet, dass, wenn man die drei Spinoren mit einer 3×3 unitäre (U) Matrix miteinander kombiniert

$$\psi'(x) = U(x)\psi(x), \quad (315)$$

gilt $\mathcal{L}[\psi'] = \mathcal{L}[\psi]$. Um dies gewährleisten zu können müssen wir wieder Eichfelder (A_μ) einführen, die gleichzeitig mittransformiert werden.

Eine solche transformation:

$$\psi' = U\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^+ \quad (316)$$

\mathcal{L}_D wird so transformiert

$$[\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)]' = \bar{\psi}(x)U^+(x)i\gamma^\mu\partial_\mu U(x)\psi(x) - m\bar{\psi}U^+(x)U(x)\psi \quad (317)$$

Der zweite term ist invariant, wenn U unitär ist ($U^+U = \mathbf{1}$). Damit auch der erste Term invariant bleibt führen wir die Eichfelder ein:

$$D_\mu(x)\psi(x) = (\partial_\mu - igA_\mu(x))\psi(x) \quad (318)$$

\mathcal{L} ist invariant wenn wir (ähnlich zur Elektrodynamik) verlangen:

$$\begin{aligned} (D_\mu(x)\psi(x))' &= U(x)D_\mu(x)\psi(x) & (319) \\ (\partial_\mu - igA_\mu)'\psi' &= U(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \\ \partial_\mu - igA'_\mu &= U(\partial_\mu - igA_\mu)U^+ \\ A' &= UAU^+ + \frac{i}{g}[U\partial_\mu U^+ - \partial_\mu UU^+] \\ A' &= UAU^+ - \frac{i}{g}[\partial_\mu, U]U^+ & (320) \end{aligned}$$

A ist selber eine Hermitesche 3 × 3 Matrix.

U sei in einer unitären Darstellung einer Lie-Gruppe, d.h. sie kann durch eine endliche Anzahl von Variablen parametrisiert und um kleine Parameterwerte expandiert werden:

$$U(\theta) \approx 1 - iT^a \theta^a \quad (321)$$

wo T^a die hermiteschen Generatoren sind. Für $SU(2)$ sind diese, die Pauli-Matrizen: $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ ($a = 1, 2, 3$), für $U(1)$ ist $T^a = 1$ ($a = 1 \dots 1$). Bei $SU(3)$ $T^a = \frac{1}{2}\lambda_a$, ($a = 1 \dots 8$), λ_a sind die Gell-Mann-Matrizen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (322)$$

Es gelten:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad \text{Tr } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (323)$$

f : *antisymmetrischer Strukturkonstante*

Aus

$$U(\theta) \approx 1 - iT^a \theta^a \quad (324)$$

und

$$A' = UAU^+ - \frac{i}{g} [\partial_\mu, U]U^+ \quad (325)$$

folgt:

$$\begin{aligned} A_\mu^{a'} T^a &= A_\mu^a T^a - i\theta^a A_\mu^b [T^a, T^b] - \frac{1}{g} T^a \partial_\mu \theta^a \\ &= A_\mu^a T^a + f^{abc} \theta^a A_\mu^b T^c - \frac{1}{g} T^a \partial_\mu \theta^a \end{aligned} \quad (326)$$

So ergibt sich die Transformationsregel für das Vektorpotential:

$$A_\mu^{a'} = A_\mu^a + f^{abc} \theta^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a \quad (327)$$

Für die U(1) Symmetrie (Elektrodynamik) galt: $A_\mu' = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$.

Wenn wir den Feldstärketensor berechnen, finden wir, dass

$$[D_\mu, D_\nu] = igT^a F_{\mu\nu}^a \quad (328)$$

auch eine 3×3 Hermitesche Matrix ist. In der Schreibweise:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \quad A_\mu = A_\mu^a T^a \quad a = 1 \dots 8 \quad (329)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (330)$$

oder, mit Komponenten:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (331)$$

Da $D\psi$ genau so transformiert wie ψ , gilt auch für $F_{\mu\nu}$:

$$[(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi]' = U(\theta)(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi \quad (332)$$

Also die Transformationsregel für $F_{\mu\nu}$ heißt:

$$F'_{\mu\nu} = U(\theta)F_{\mu\nu}U^+(\theta) \quad (333)$$

oder für die Komponenten von $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}^a{}' = F_{\mu\nu}^a + f^{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^c \quad (334)$$

Die Gruppe der 3×3 unitären Matrizen spaltet in das direkte Produkt zweier Gruppen: $U(1)$ und $SU(3)$.

$$\forall u \in U(3) : e^{i\phi} = \det u ; \rightarrow e^{-i\phi/3} u \in SU(3) \quad (335)$$

In anderen Worten: jedes Gruppenmitglied der $U(3)$, kann als das Produkt eines $U(1)$ und $SU(3)$ Mitglieds dargestellt werden.

$$U(3) = U(1) \times SU(3) \quad (336)$$

Der Generator für das $U(1)$ Teil, ist die Einheitsmatrix, für das $SU(3)$ Teil sind die $\frac{1}{2} \times$ the Gell-Mann Matrizen die Generatoren.

Die beiden Gruppen können voneinander unabhängig betrachtet werden, die Kopplungskonstante g must auch nicht identisch sein.

- $U(1) \rightarrow$ Quantenelektrodynamik
- $SU(3) \rightarrow$ Quantenchromodynamik (starke Wechselwirkung)

Jetzt sind schon alle Komponente für die Lagrangefunktion der Quantenchromodynamik vorhanden:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (337)$$

wo F und D sind wie folgt definiert:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (338)$$

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - i g T^a A_\mu^a) \psi \quad (339)$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \\ &\quad - g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{b,\mu} A^{c,\nu} \\ &\quad - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu} A^{e,\nu} \end{aligned} \quad (340)$$

Wegen der nichabelische Natur der Gruppe gibt es eine Selbstkopplung unter den Eichfelder.

In Quantenchromodynamik die Eichteilchen heißen **Gluonen**, die Fermionfelder sind die **Quarks**.

In der Elektrodynamik, das A Vektorpotential musste transformiert werden, $F_{\mu\nu}$ war aber eichinvariant.

Bei einer nichtabelischen Symmetrie die Eichfelder (F) und die Fermionen (ψ) transformieren gleichzeitig, aber sehr unterschiedliche:

$$\psi' = \psi - i\theta^a T^a \psi \quad (341)$$

$$F_{\mu\nu}^a{}' = F_{\mu\nu}^a + f^{abc} \theta^b F_{\mu\nu}^c \quad (342)$$

oder für nicht infinitesimale Transformationen:

$$\psi' = U\psi \quad (343)$$

$$F_{\mu\nu}' = UF_{\mu\nu}U^+ \quad (344)$$

Bei einer $SU(N)$ Gruppe hat das ψ Feld N Komponente, ψ ist in der fundamentalen Darstellung der Lie Gruppe.

Die Eichfelder hingegen sind in der adjungierten Darstellung der Lie-Algebra.

In Prinzip könnte man Materiefelder in der adjungierten Darstellung einführen.

Quarks in Quantenchromodynamik sind in der fundamentalen Darstellung.

Die Eichsymmetrie lässt eine geometrische Interpretation zu. In jedem Punkt im vierdimensionalen Raum ist $\psi(x)$ in einer Ortspezifischem Koordinatensystem gegeben. Um $\psi(x)$ mit dem Wert im Nachbarpunkt $\psi(x + \delta)$ vergleichen zu können müssen wir die beiden Felder zu gleichen Koordinaten zu transformieren:

$$\delta x D_\mu \psi(x) = U(x; x + \delta x) \psi(x + \delta x) - \psi(x) \quad (345)$$

Um die $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ Form zu bewahren:

$$U(x; x + \delta x) = -igA_\mu^a T^a \delta x \approx e^{-igA_\mu^a T^a \delta x^\mu} \quad (346)$$

Der Paralleltransport entlang eines Pfades von Punkt x nach Punkt y

$$U(y; x) = \mathcal{P} e^{ig \int_x^y T^a A_\mu^a(z) dz^\mu} \quad (347)$$

Da die T Matrizen miteinander nicht vertauschen muss man hier eine Pfadordnung einführen, d.h. $U(y; x)$ sich als ein Produkt von vielen, geordneten, infinitesimalen $U(z + \delta x, z)$ Paralleltransporten zusammensetzt. Es sind nicht nur die Endpunkte, sondern auch der Verlauf des Pfades relevant.

1) Dann wird $U(x; y)\psi(y)$ genau so transformiert wie $\psi(x)$

→ $\bar{\psi}(x)U(x; y)\psi(y)$ ist invariant.

2) $F^{\mu\nu} \sim$ Spur der Transport um eine infinitesimale Schleife

Neben den Eichfeldern sind Quarks die fundamentale Freiheitsgrade in der starken Wechselwirkung.

Die Quarks sind Spin-1/2 Fermionen, die aber nie als Einzelteilchen beobachtet werden können.

Beobachtbare Teilchen: Protonen und Neutronen sind aus Quarks zusammengesetzt.

Hadron: Detektierbares Teilchen, das aus Quarks zusammengesetzt ist
 Quark Felder (u : up, d : down)

$$u = \begin{pmatrix} \Psi_1^u \\ \Psi_2^u \\ \Psi_3^u \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} \Psi_1^d \\ \Psi_2^d \\ \Psi_3^d \end{pmatrix} \quad (348)$$

die drei Komponente bedeuten das diese Felder zur fundamentalen Darstellung einer SU(3) Eichgruppe gehören. Dieser Dreierindex ist der Farbindex. Die Bispinor-Indizes gibt es extra.

Hadronen dürfen keinen Farbindex.

Die Theorie der SU(3) Lie Algebra behauptet:

Die einfachste Möglichkeiten die Quarkfelder in Hadronen zu kombinieren:

- **Meson = Quark + Antiquark**, z.B.: $\bar{u}d$ oder $\bar{d}u$: die Pionen (Pseudoskalar)
- **Baryon = Quark + Quark + Quark**, z.B.: uud : proton; udd : neutron

Die u und d quarks haben eine ähnliche Masse, sie sind durch die Isospinsymmetrie verbunden:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{\tau}} q \quad (349)$$

das Quarkfeld hat nun einen Isospin- (1...2), einen Farb- (1...3), einen Bispinor (1...4) Index (insgesamt 24 Werte in jedem Raumzeitpunkt). Isospin ist eine exakte Symmetrie, solange die u und d Massen identisch sind.

Die chirale Symmetrie,

$$q \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\vec{\beta}\vec{\tau}\gamma^5} q \quad (350)$$

ist aber durch die Quarkmassen explizit gebrochen. Viel wichtiger ist aber der spontane Symmetriebrechung der chirale Symmetrie

$$\bar{q}q \neq 0 \quad (351)$$

die auch bei Null Quarkmassen gebrochen ist. Die Goldstone Teilchen sind die drei Pionen, deren Masse dadurch von Null unterscheiden kann, dass die Quarks selber eine Masse haben, und auch eine explizite Symmetriebrechung vorliegt.

Das Proton und Neutron erhalten ihre Masse durch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie, und nicht durch die Quarkmassen. Die Quarkmassen selber entstehen durch den Higgs-Mechanismus.

Es sind insgesamt 6 Quarks gefunden, die in Zweiergruppen unterteilt werden:

Q=2/3	Q=-1/3
Up, 2.3 MeV	Down 4.8 MeV
Charm, 1275 MeV	Strange 95 MeV
Top, 173070 MeV	Bottom 4180 MeV

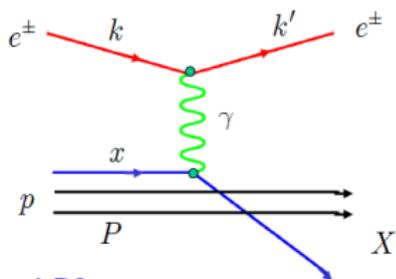
Allen Quarks ist eine Baryonenzahl von $B = +1/3$ zugewiesen. So gilt für Mesonen $B = 1/3 - 1/3 = 0$, und für Baryonen $B = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$, und für Antibaryonen $B = -1$.

Die Baryonenzahl als auch die elektrische Ladung ist erhalten in QCD. Zu welcher Symmetrie gehören diese?

$$Q: \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ue^{+i2/3\phi} \\ de^{-i1/3\phi} \end{pmatrix} \quad (352)$$

$$B: \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} e^{i\theta/3} \quad (353)$$

Die Q-Symmetrie kann aus $\underbrace{T_3}_{\text{isospin}}$ und B kombiniert werden.

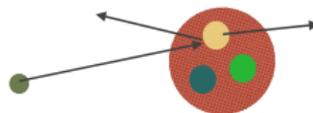


DIS = Deep inelastic scattering
Tiefinelastische Streuung

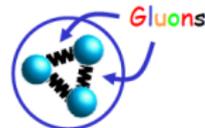
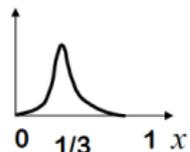
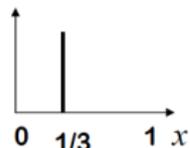
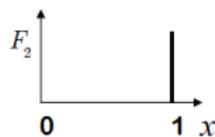
Bei niedriger Energie ist der Prozess eine Rutherford-Streuung, das ganze Proton wird gestoßen

Bei hohen Energien aber trifft das Photon einen Konstituenten: "parton"

Im Experiment findet man dank den Gluonen eine verschmierte Verteilung des Impulses.



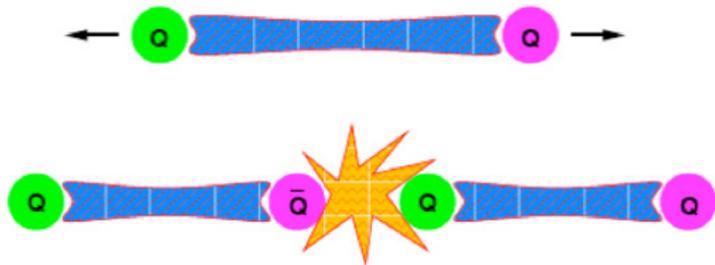
"x" = Impulsanteil des getroffenen Teilchens



Die wichtigste Eigenschaft der Quantenchromodynamik:

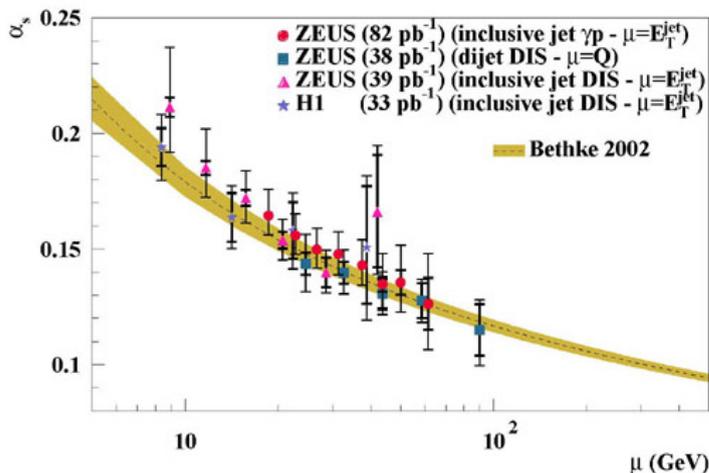
Asymptotische Freiheit

Der Kopplungskonstante g ist in der Lagrangedichte konstant. Doch durch die Selbstwechselwirkung der Eichbosonen ist die Wechselwirkung zwischen Quarks bei kleinen Entfernungen erheblich geschwächt. Bei grossen Distanzen schwellt die Anziehungskraft zwischen Quark und Antiquark nicht ab:



Wenn Quark und Antiquark in einem Meson auseinandergezogen wird, ist die Energie des Gluonfeldes proportional zum Abstand. Die Energiedichte ist in einem String lokalisiert. Doch wenn die Gesamtenergie die Pionenmasse erreicht, wird ein Quark-Antiquark-Paar produziert (Pion). Der String bricht auf in zwei, beide Strings ziehen die Quarks und Antiquarks zusammen und wir erhalten zwei Mesons.

Wenn man in Impulsraum arbeitet, entsprechen kleinen Längen große Impulse oder Energien.



Asymptotische Freiheit in der Hera Experiment:

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \approx \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}n_f) \log \mu^2 / \Lambda^2} \quad (354)$$

n_f : Anzahl von Quarks in der Theorie, leichter als μ .
 Λ : cca 200 MeV, dimensionsvolle Kopplungskonstante

In einer Theorie mit mehreren Quarks hat man in der Lagrangedichte eine summe der Quarkbeiträge:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \sum_j \bar{\psi}_j i\gamma^\mu D_\mu \psi_j - \sum_j m_j \bar{\psi}_j \psi_j \quad (355)$$

die Massen sind für die unterschiedliche Quarks nicht gleich. *Zwei der massen $m_u = 2.3 \text{ MeV}$ und $m_d = 4.8 \text{ MeV}$ sind jedoch nahezu gleich und nahezu Null im Vergleich zu $\Lambda_{QCD} \sim 100 \text{ MeV} \Rightarrow$ Approximative Isospin- und chirale Symetrie.*

Generell aber könnte \mathcal{L} auch so aussehen:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \sum_j \bar{\psi}_j i\gamma^\mu D_\mu \psi_j - \sum_j \bar{\psi}_j M_{ij} \psi_j \quad (356)$$

Dann wenn wir M so diagonalisieren können: $M = V^+ M_{\text{diag}} V$

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} V^+ M_{\text{diag}} V \psi \quad (357)$$

Und mit den neuen Variablen $\psi'_i = V_{ij} \psi_j$ und $M_{\text{diag}} = \text{diag}(M_1, M_2, \dots)$:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \bar{\psi}' i\gamma^\mu D_\mu \psi' - \underbrace{\bar{\psi}' M_{\text{diag}} \psi'}_{\sum_j \bar{\psi}' M_j \psi'} \quad (358)$$

Ganz ähnlich zu den Fermionen kann es auch bei mehreren Skalaren dazu kommen, dass das Potenzial die Felder miteinander verbindet:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + (D\Phi_j)^\dagger (D\Phi_j) - V(\Phi) \quad (359)$$

Man nehme an, dass V eine minimumstelle um $\bar{\Phi}_j$ hat. Dann führt man neue Variablen $(\phi_j(x))$ ein:

$$\Phi_j(x) = \bar{\Phi}_j(x) + \phi_j(x) \quad (360)$$

und entwickelt V um $\bar{\Phi}_j$. Dann ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + (D\phi_j)^\dagger (D\phi_j) - (\phi_i)^\dagger M_{ij} \phi_j - \Delta V(\phi) \quad (361)$$

mit der Taylor-Entwicklung:

$$V(\phi + \bar{\Phi}) = \sum_{ij} \phi_i M_{ij} \phi_j + \Delta V(\phi) \quad (362)$$

Der Konstantterm wäre irrelevant (Verschiebung der Energie)

Kein linearer Term: V hatte eine Minimumstelle an $\bar{\Phi}$.

Nun können wir die Massenmatrix M_{ij} in

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + (D\phi_j)^+(D\phi_j) - (\phi_i)^+ M_{ij}\phi_j - \Delta V(\phi) \quad (363)$$

diagonalisieren ($M = U^+ M_{\text{diag}} U$) und auf neue Variablen umstellen: $\varphi = U\phi$.

$$(D\phi)^+(D\phi) = (D\phi)^+ U^+ U(D\phi) = (DU\phi)^+(D\phi) = (D\varphi)^+(D\varphi) \quad (364)$$

$$\phi^+ M\phi = \phi^+ U^+ M_{\text{diag}} U\phi = (U\phi)^+ M U\phi = \varphi^+ M_{\text{diag}}\varphi \quad (365)$$

Die Eigenwerte von M sind die neue Massen $M_{\text{diag}} = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, \dots)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} + \sum_j \left[(D\varphi_j)^+(D\varphi_j) - (\varphi_i)^+ m_j^2 \varphi_j \right] - \Delta V \quad (366)$$

Hier die Eigenwerte m_j^2 sind eigentlich die Eigenwerte der Ableitungsmatrix des Potentials:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Delta V}{\partial \phi_1 \partial \phi_1} & \frac{\partial^2 \Delta V}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2 \Delta V}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} & \frac{\partial^2 \Delta V}{\partial \phi_2 \partial \phi_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (367)$$

Wir haben schon lokale und globale, abelsche und nichtabelsche Symmetrien betrachtet. Bei globalen Symmetrien haben wir festgestellt, dass durch geeigneten Potenzialen nur solche Grundzustände existieren, die nicht symmetrisch sind, obwohl die Lagrangefunktion selbst invariant war.

Dieses Phänomen ist die spontane Symmetriebrechung (SSB)

Konsequenz: Existenz von masselosen Goldstone-Bosonen.

Wir stellen jetzt die Frage: *Was für eine Theorie stammt von der Erweiterung der globalen zur lokalen Symmetrie in der Gegenwart eines für SSB geeigneten Potenzials?*

Wir nehmen eine lokale SU(2) Symmetrie, und ein skalares Feld mit zwei Komponenten:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (368)$$

Die folgende Lagrangefunktion mit SU(2) Eichfelder ist eichinvariant:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (369)$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igT^a) \phi \quad T^a = \sigma^a/2 \quad (370)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (371)$$

$$V(\phi) = -\mu^2(\phi^\dagger \phi) + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \quad (372)$$

Wenn $\mu^2 > 0$, liegt uns ein Potenzial vor, dessen Minimumstelle nicht im Ursprung ist, sondern bei

$$\phi^+ \phi \Big|_{\text{Grundzustand}} = v^2/2, \quad \text{mit } v = \sqrt{\mu^2/\lambda} \quad (373)$$

Wir haben die Wahl (nach einer globaler Drehung) den Grundzustand so anzugeben:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (374)$$

Die Fluktuation um den Grundzustand ist das verschobene Feld:

$$\phi' = \phi - \phi_0 \quad (375)$$

Der Term mit dem kovarianten Ableitung des Skalarfeldes:

$$(D_\mu \phi)^+ (D^\mu \phi) = ((\partial_\mu - igT^a A^a)(\phi' + \phi_0))^+ ((\partial_\mu - igT^a A^a)(\phi' + \phi_0))$$

enthält den Term:

$$g^2 \phi_0^+ T^a T^b \phi A_\mu^a A^{b\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 A_\mu^a A^{a\mu} \quad (376)$$

Das heißt: aus der $(D_\mu\phi)^+(\mathcal{D}^\mu\phi)$ Kombination folgten Terme die Produkt von mindestens drei Felder sind:

$$\phi'\phi'AA \quad \phi'AA \quad \phi'(\partial\phi')A \quad (377)$$

diese sind für die Wechselwirkungen verantwortlich, und es gibt auch welche die ein Produkt von zwei Felder sind, aus denen ergeben sich die Massen.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{gV}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} M_A^2 A_\mu A^\mu \quad (378)$$

$M_a = gv/2$. Ein solcher Term ist nicht eichinvariant. Der Grund, warum \mathcal{L} weiterhin invariant sein kann, liegt in der Transformationsregel von ϕ_0 selbst. Jedoch, für einen bestimmten Grundzustand ϕ_0 taucht ein Term $\sim A_\mu A^\mu$ auf, der den Eichfeldern eine effektive Masse verleiht.

Im skalaren Sektor des Modells:

$$\begin{aligned} \phi^+\phi &= \phi'^+\phi' + \phi_0^+\phi' + \phi'^+\phi_0 + \phi_0^+\phi_0 \\ (\phi^+\phi)^2 &= v^2\phi'^2 + (\phi_0^+\phi' + \phi'^+\phi_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (379)$$

Die Massen sind die Koeffizienten der Terme quadratisch in ϕ' :

$$\frac{\lambda v^2}{2} (\phi'_2 + \phi'^+{}_2)^2 = \frac{\mu^2}{2} (\phi'_2 + \phi'^+{}_2)^2 + 0 \cdot (\phi'_2 - \phi'^+{}_2)^2 \quad (380)$$

Eine Null Masse hat sich für die Kombiotion $\phi'_2 - \phi'^+_2$ ergeben (Goldstone-Moden). Für das Higgs Feld ($\phi'_2 + \phi'^+_2$) war die Masse positiv. Um die freiheitsgrade besser identifizieren zu können wechseln wir in **Unitäre Eichung**.

In jedem Raumzeit Punkt wählen wir $\xi^a(x)$ so, dass

$$\phi(x) = \exp \left\{ \frac{2i}{v} T^a \xi^a(x) \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (381)$$

und $\eta \equiv 0$ und $\xi^a \equiv 0$ den Grundzustand beschreiben. Wir können die Felder neu definieren:

$$\Phi(x) = U(x)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \quad (382)$$

$$T^a B^a = U(x) T^a A^a_\mu(x) U^{-1}(x) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(x)] U^{-1}(x) \quad (383)$$

mit

$$U(x) = \exp \left\{ -\frac{2i}{v} T^a \xi^a(x) \right\} \quad (384)$$

Aus den Eigenschaften der Eichtransformationen folgen:

$$D_\mu \phi = U^{-1}(x) D_\mu \Phi \quad (385)$$

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (386)$$

mit

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - igTB_\mu) \Phi \quad (387)$$

$$G_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g\epsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c). \quad (388)$$

So können wir mit G und Φ die Lagrangefunktion so schreiben:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi^\mu)^\dagger (D^\mu \Phi) + \frac{\mu^2}{2} (v + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4} (v + \eta)^4 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (389)$$

Im ersten Term gibt es einen Beitrag quadratisch in B :

$$\frac{g^2}{2} (0, v) T^a T^b \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} B_\mu^a B^{b\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 B_\mu B^\mu \quad (390)$$

Wir aus zwei komplexen Skalarkomponenten ein reelles Feld übrig. $\xi(x)$ spielte die Rolle einer Eichtransformation, und taucht jetzt in \mathcal{L} gar nicht auf. Die drei Eichfelder sind massiv geworden.

Wir können diese SU(2) Eichtheorie mit der U(1) Theorie kombinieren.

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a A_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \phi \quad (391)$$

Vorsicht: B hat eine neue Bedeutung: das U(1) Feld. Es kommt mit einer eigenen Kopplungskonstante \times Ladungskoeffizient, das in diesem Fall als

$$Y(\phi) = 1 \quad (392)$$

festgesetzt ist. Y : ist die Hyperladung, die Ladungszahl zu den U(1) Eichfelder, die in D_μ vor B steht und für unterschiedliche Teilchen unterschiedlich gewählt werden kann. Z.B. für linkshändige Quarks ($Y = 1/3$):

$$D_\mu q_L = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a A_\mu^a - \frac{i}{2} \frac{1}{3} g' B_\mu \right) q_L \quad (393)$$

Eine solche Y Parameter kann man frei einführen, er bedeutet, dass bei einer Eichtransformation alle Felder gleichzeitig mit der entsprechenden Ladungszahl gedreht werden:

$$\phi \rightarrow e^{i\vartheta} \phi, \quad q_L \rightarrow e^{i\vartheta/3} q_L, \quad B_\mu \rightarrow B_\mu + \frac{1}{g'} \partial_\mu \vartheta \quad (394)$$

Wir nehmen an, dass die Symmetrie spontan gebrochen wird. Wir können wieder eine geeignete Unitäre (ortsabhängige) $U(\xi)$ Matrix finden, so, dass

$$\Phi(x) = U(\xi(x))\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (395)$$

Φ ist nun in der **unitäre Eichung**. Im folgenden Teil der Lagrangefunktion

$$L_\Phi = (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi) \quad (396)$$

finden wir die Eichfelder in Kombination mit v des Grundzustands:

$$L_\Phi = \frac{v^2}{8} \left\{ g^2 [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] + (gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2 \right\} \quad (397)$$

Für drei Kombinationen der vier Felder ist eine Masse Generiert:

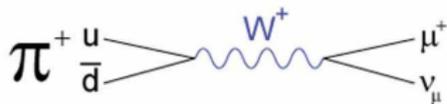
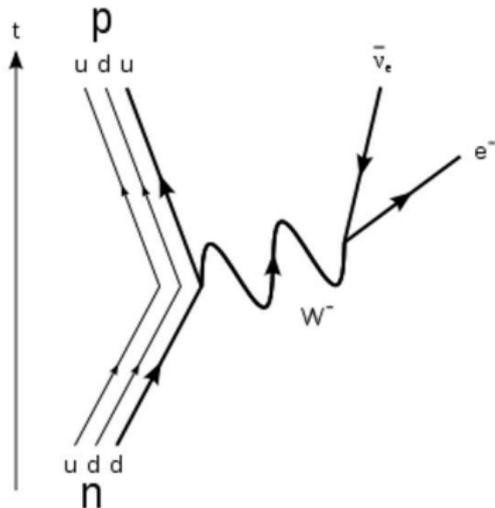
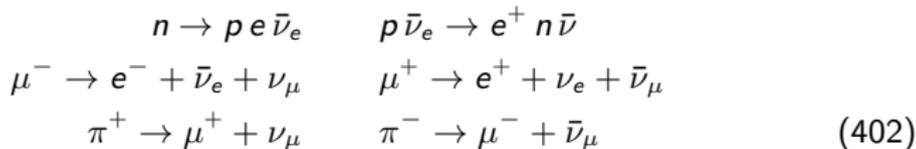
$$W_\mu^\pm = (A_\mu^1 \pm iA_\mu^2)/\sqrt{2}, \quad M_W = gv/2 \quad (398)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W A_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad M_Z = v\sqrt{g^2 + g'^2}/2 \quad (399)$$

$$A_\mu^\gamma = \sin \theta_W A_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \quad M_\gamma = 0 \quad (400)$$

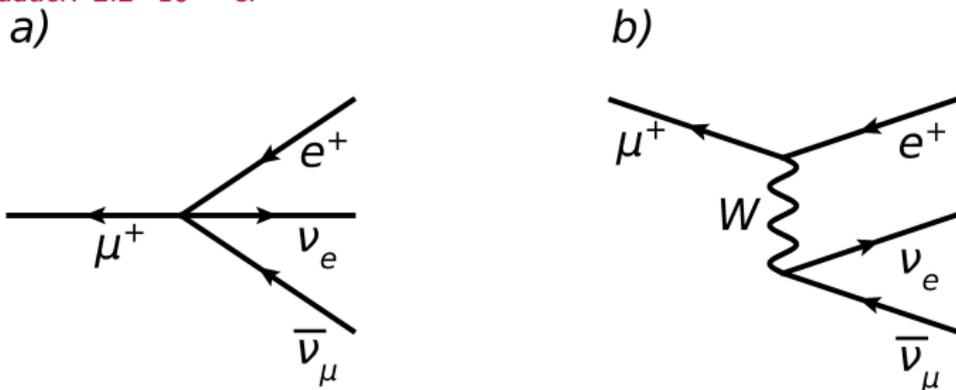
$$\tan \theta_W = g'/g \quad \text{Weinbergwinkel, cca } 28.74^\circ \quad (401)$$

Typische Prozesse sind:



Feynman Diagram für den Myonzerfall:

Das Myon ist ein Elementarteilchen ähnlich zum Elektron. Masse: 106 MeV, mittlere Lebensdauer: $2.2 \cdot 10^{-6}$ s.



$$\mathcal{L}_a = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda^+(x) J^\lambda + \text{h.c.} \quad (403)$$

$$J^\lambda(x) = \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \mu \quad (404)$$

h.c.: Hermitesch Konjugierte, damit \mathcal{L} eine reelle Funktion bleibt.

$$\bar{\psi} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \psi = 2 \bar{\psi}_L \gamma^\lambda \psi_L \quad (405)$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi \quad \psi = \psi_L + \psi_R \quad (406)$$

Dieser Strom beschreibt nur die Leptonen (Elektron, Myon, Tau, Neutrinos):

$$J_l^\lambda(x) = \bar{\nu}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) e + \bar{\nu}_\mu \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \mu + \bar{\nu}_\tau \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) \tau \quad (407)$$

Es sind entsprechend viele Neutrintypen, jeweils zum Elektron, Myon und Tau. Im Standardmodell sind die Neutrinos massenlos, aber

$$\begin{aligned} m_e &= 0.000511 \text{ GeV} \\ m_\mu &= 0.1066 \text{ GeV} \\ m_\tau &= 0.777 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (408)$$

Jetzt wollen wir die Hadronen miteinbeziehen:

$$J^\lambda(x) = J_h^\lambda(x) + J_l^\lambda(x) \quad (409)$$

Für nur u und d Quarks könnte dann man schreiben:

$$J_h^\lambda(x) = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) d \quad (410)$$

So kann der β -Zerfall als auch der Pionzerfall beschrieben werden.

Die Vier-Fermionen-Wirkung gibt eine gute beschreibung der schwachen Zerfallsprozesse mit $G_f \approx 10^{-5} \text{ GeV}$

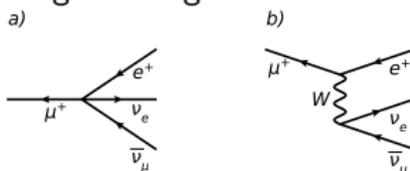
Die Theorie Quantenmechanisch nicht berechenbar (*renormierbar*).

Faustregel: Dimension der Kopplungskonstante soll nicht negativ werden

Daher wird ein massives Vektoroson W eingeführt,

$$\mathcal{L} = gJ_\mu W^\mu + \text{h.c.} \quad (411)$$

Hierfür verwenden wir das durch den Higgs-Mechanismus massiv gewordene Eichfeld. Was vorher ein Punkt-Wechselwirkung war, ist jetzt durch ein komplizierteres Feynman-Diagramm dargestellt:



Die Wellenlinie ist für W . Für die Wechselwirkungen schreibt man den Koeffizienten in \mathcal{L} , für die Linien wird ein **propagator** $\Delta_{\mu\nu}$ geschrieben:

$$\Delta_{\mu\nu} = -\frac{g^{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_W^2}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon} \quad (412)$$

Bei niedriger Energie ($k \ll M_W$): $G_F / \sqrt{2} = g^2 / 8M_W^2$

Auch hadronen mit Strange-Quark weisen ähnliche Zerfallseigenschaften auf:

Leptonischer Zerfall seltsamer Hadronen:

$$\begin{array}{lll}
 \underbrace{K^+}_{u\bar{s}} \rightarrow \mu^+ \nu & \underbrace{K^+}_{u\bar{s}} \rightarrow \mu^+ \nu \underbrace{\pi^0}_{u\bar{u}+d\bar{d}} & \underbrace{K^0}_{d\bar{s}} \rightarrow \mu^+ \nu \underbrace{\pi^-}_{d\bar{u}} \\
 \underbrace{\Lambda}_{uds} \rightarrow \underbrace{p}_{uud} \ell^- \bar{\nu} & \underbrace{\Sigma^-}_{dds} \rightarrow \underbrace{n}_{udd} \ell^- \bar{\nu} & \underbrace{\Xi^0}_{uds} \rightarrow \underbrace{\Sigma^+}_{uus} \ell^- \bar{\nu} \\
 \underbrace{\Xi^-}_{dss} \rightarrow \underbrace{\Sigma^0}_{uud} \ell^- \bar{\nu} & \underbrace{\Xi^-}_{dss} \rightarrow \underbrace{\Lambda}_{uds} \ell^- \bar{\nu} & \underbrace{\Omega^-}_{sss} \rightarrow \underbrace{\Xi^0}_{uss} \ell^- \bar{\nu}
 \end{array} \quad (413)$$

ℓ^- ist ein negativ geladenes Lepton, das Neutrino muss zur gleichen Teilchenfamilie gehören.

In allen Fällen:

- $|\Delta S| \leq 1$, immer nur ein strange Quark/Antiquark zerfällt
- $\Delta Q = \Delta S$, d.h. Übergänge sind $s \rightarrow u$ oder $\bar{s} \rightarrow \bar{u}$, nicht aber $s \rightarrow d$.

$$\begin{aligned}
 J_h^\lambda(x) &= c_1 \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) d + c_2 \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) s \\
 &= \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) d \cos \theta_c + \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) s \sin \theta_c
 \end{aligned} \quad (414)$$

$$J_h^\lambda(x) = \bar{u} \gamma^\lambda (1 - \gamma^5) d \theta \quad (415)$$

$$d \theta = \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \quad (416)$$

Kaonen sind Mesonen wo das aus einem up oder down Quark beziehungsweise einem Strange-Quark zusammengesetzt ist, inkl. deren Antiteilchen.

$$\begin{array}{lll}
 K^+[u\bar{s}] & K^-[s\bar{u}] & m_{K^+} = 493.677 \text{ MeV} \\
 K^0[d\bar{s}] & \bar{K}^0[s\bar{d}] & m_{K^+} = 497.614 \text{ MeV}
 \end{array}$$

u und d sind durch die Isospinsymmetrie verbunden. Kaonen wären die Goldstone-Bosonen der Chiralen Symmetrie, wenn die Strangemasse Null wäre. Die Strangemasse ist nicht Gross, die Kaonen sind Pseudo-Goldstone Bosonen, nach den Pionen die zweitleichteste Hadronen.

Nichtleptonische zerfallprozesse, Z.B:

$$\underbrace{K^+}_{P=-1} \rightarrow \underbrace{\pi^+}_{P=-1} + \underbrace{\pi^0}_{P=-1} \quad \underbrace{K^+}_{P=-1} \rightarrow \underbrace{\pi^+}_{P=-1} + \underbrace{\pi^+}_{P=-1} + \underbrace{\pi^-}_{P=-1} \quad (417)$$

deuten eine Paritätsverletzung an.

Die schwache Wechselwirkung verletzt Parität

Wir schauen jetzt die neutrale Kaonen genauer an:

Verhalten gegenüber Raumspiegelung (P) und Ladungskonjugation (C):

$$P\Psi_{K^0} = -\Psi_{K^0} \quad (418)$$

$$C\Psi_{K^0} = \Psi_{\bar{K}^0} \quad (419)$$

$$\Rightarrow CP\Psi_{K^0} = -\Psi_{\bar{K}^0} \quad (420)$$

Diese Teilchen sind also keine CP -Eigenzustände. Sollte CP eine echte Symmetrie sein, sind dann die physikalische Zustände die folgenden Eigenzustände:

$$\Psi_{K_L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{K^0} + \Psi_{\bar{K}^0}), \quad CP = -1 \quad (421)$$

$$\Psi_{K_S} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{K^0} - \Psi_{\bar{K}^0}), \quad CP = +1 \quad (422)$$

Die beiden Kombinationen unterliegen unterschiedlicher Zerfallprozesse:

$$K_L \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0, \text{ or } \pi^0 + \pi^+ + \pi^- \quad (423)$$

$$K_S \rightarrow \pi^0 + \pi^0, \text{ or } \pi^+ + \pi^- \quad (424)$$

je nach der Gesamt- CP -Quantenzahl des Zerfallproduktes.

(π^0 hat $P=-1$ und $C=1$.)

Die Namen S und L beziehen sich auf die Lebensdauer: (10^{-8} s und 10^{-10} s, weil $m_K - 2m_\pi > m_K - 3m_\pi$)

$$K_L \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0, \text{ or } \pi^0 + \pi^+ + \pi^- \quad (425)$$

$$K_S \rightarrow \pi^0 + \pi^0, \text{ or } \pi^+ + \pi^- \quad (426)$$

Die Massen der L und S Zustände sind etwas unterschiedlich:

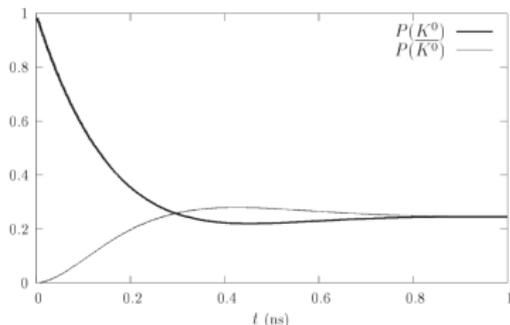
$$\frac{\Delta m}{m} = 7 \times 10^{-15} \quad \text{CP - Verletzung} \quad (427)$$

Der leptonische Zerfall ist aber für K^0 und \bar{K}^0 unterschiedlich:

$$K^0 \rightarrow \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu \quad (428)$$

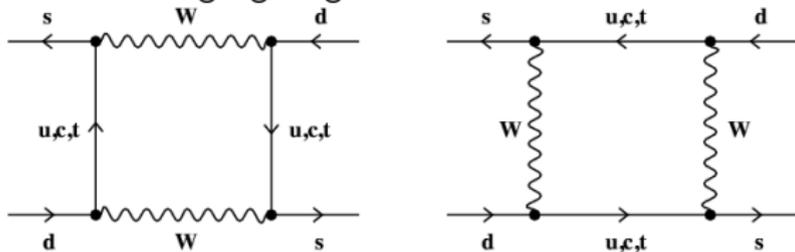
$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (429)$$

Wenn wir zur Zeitpunkt $t = 0$ einen reinen K^0 Zustand haben, startet eine Oszillation zwischen K^0 und \bar{K}^0 . Gleichzeitig zerfällt der K_S -Inhalt.



Der kleine Massenunterschied zwischen K_L und K_S kommt durch ein Prozess zwischen K^0 und \bar{K}^0 mit $|\Delta S| = 2$.

Wie wird ein solcher Übergang möglich:



Hier sind die weitere Quarks auch eingeführt.

In den nächsten Seiten stellen wir die Lagrangedichte des Standardmodells in mehreren Schritten auf.

Eichsymmetrie:

U(1) Hypercharge, Zusammen mit der A_μ^3 boson der SU(2) Theorie ergeben das Photonfeld und das Z-Feld:

$$\mathcal{L}_{1a} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (430)$$

mit $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

SU(2) für die schwache Wechselwirkung,

$$\mathcal{L}_{1b} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^k W^{k\mu\nu} \quad k = 1, \dots, 3 \quad (431)$$

mit $W_{\mu\nu}^k = \partial_\mu W_\nu^k - \partial_\nu W_\mu^k + \frac{g_2}{2} \epsilon^{klm} W_\mu^l W_\nu^m$. Aus den Vektorpotentialen entstehen (wegen des Higgs-Mechanismus) die folgenden Massen-Eigenzustände:

$$W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2} \quad (432)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad M_Z = v \sqrt{g_1^2 + g_2^2}/2 \quad (433)$$

$$A_\mu^\gamma = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \quad M_\gamma = 0 \quad (434)$$

$$\tan \theta_w = g_1/g_2 \quad \text{Weinbergwinkel, cca } 28.74^\circ \quad (435)$$

Ebenso schreibt man für die SU(3) Eichsymmetrie den Beitrag des Gluonfelder:

$$\mathcal{L}_{1c} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad a = 1, \dots, 8 \quad (436)$$

mit $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{klm} G_\mu^k G_\nu^l$.

Die Eichfelder unterliegen den U(1), SU(2) und SU(3) Transformationsregeln:

$$B_\mu = B_\mu + (2/g_1)\partial_\mu\theta \quad (437)$$

$$W_\mu = UW_\mu U^+ - \frac{2i}{g_2} U\partial_\mu U^+ \quad (438)$$

$$G_\mu = VG_\mu V^+ - \frac{i}{g} V\partial_\mu V^+ \quad (439)$$

wo $U(x) \in SU(2)$ und $V(x) \in SU(3)$. So ist

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{1a} + \mathcal{L}_{1b} + \mathcal{L}_{1c} \quad (440)$$

ist invariant unter alle drei Eichsymmetrien.

Die Fermionen (Materieteilchen) werden in der fundamentalen Darstellung eingeführt. Unterschiedliche Arten von Fermionen kommen jedoch mit unterschiedliche Kopplungskonstanten vor.

$$\Psi \rightarrow e^{-i\theta(x)Y/2} U(x)V(x)\Psi \quad (441)$$

Die Fermionen sind normal mit der kovarianten Ableitung berücksichtigt:

$$\mathcal{L}_L = \bar{\Psi}_L^+ i \sigma^\mu D_\mu \Psi_L \quad (442)$$

$$\mathcal{L}_R = \bar{\Psi}_R^+ i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \Psi_R \quad (443)$$

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu - i \frac{g_2}{2} T^a W_\mu^a - i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu \right) \Psi \quad (444)$$

Die Paritätverletzung der schwachen Wechselwirkung wird direkt eingebaut indem wir die rechts- und linkshändige Fermionenkomponenten unterschiedlichen SU(2) Darstellungen zuordnen.

$$D_\mu \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} = D_\mu \ell_L = \left(\partial_\mu - i \frac{g}{2} \tau W_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \ell_L \quad (445)$$

$$D_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = D_\mu q_L = \left(\partial_\mu - i \frac{g}{2} \tau W_\mu + i \frac{g'}{6} B_\mu \right) q_L \quad (446)$$

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu + i g' B_\mu) e_R, \quad (447)$$

$$D_\mu u_R = (\partial_\mu - i \frac{2}{3} g' B_\mu) u_R, \quad (448)$$

$$D_\mu d_R = (\partial_\mu + i \frac{1}{3} g' B_\mu) d_R \quad (449)$$

e_R : rechthändige Elektronen, (Myon und Tau), ℓ_L Leptonen, (Neutrinos inklusive), u, d : Quarks.

D.h., die rechts- und linkshändigen Komponente werden als komplett unabhängige Freiheitsgrade dargestellt:

Typ	U(1) Hyperladung (Y)	SU(2)
ℓ_L	-1	Doublet (ℓ_L, e_L)
q_L	1/3	Doublet (u_L, d_L)
e_R	-2	Singlet, keine Wechselwirkung
u_R	4/3	Singlet, keine Wechselwirkung
d_R	-2/3	Singlet, keine Wechselwirkung

Explizit eingebaut: Die rechtshändigen Fermionen nehmen in der SU(2) Wechselwirkung nicht teil.

Die Hyperladung ist eine Kombination der elektrischen Ladung und des 3. (diagonalen) Generator der SU(2) Algebra:

$$Y = 2(Q - T_3) \quad (450)$$

Wir haben vorerst auf weitere Teilchenfamilien (wie z. B. Myonen, Strange und Charm) verzichtet.

Die gesamthyperladung summiert auf 0, wenn die Farbmultiplicität (3) bei den Quarks berücksichtigt wird (dies ist zur konsistenten Quantisierung notwendig).

Das Higgs-Teilchen ist ein Lorentz-Skalar, gleichzeitig aber ein SU(2) Doublet. Es trägt auch eine Hyperladung ($Y = 1$), nimmt aber in der SU(3) wechselwirkung nicht teil. Laut der Formel $Y = 2(Q - T_3)$ ist die obere Komponente Positiv geladen, die untere neutral. Dank der Eichsymmetrie, können alle bis auf einer reellen Komponente wegtransformiert werden (**unitäre Eichung**).

$$U(\zeta) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (v + \eta(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (451)$$

Die linkshändige Fermionfelder werden durch $U(\zeta)$ transformiert:

$$\ell'_L = U(\zeta)\ell_L, \quad q'_L = U(\zeta)q_L \quad (452)$$

die rechtshändige sind aber trivial dargestellt, transformieren also nicht:

$$e'_R = e_R, \quad u'_R = u_R, \quad d'_R = d_R \quad (453)$$

Während die U(1) und SU(3) Eichfelder unberührt sind, für W_μ gilt:

$$\frac{\tau^k}{2} W_\mu^{k'} = U(\zeta) \left(\frac{\tau^k}{2} W_\mu^k \right) U^{-1}(\zeta) - \frac{2i}{g_2} [\partial_\mu U(\zeta)] U^{-1}(\zeta) \quad (454)$$

Die Lagrangefunktion für das Higgs-Feld ist dementsprechend:

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi) \quad (455)$$

mit $V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$.

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - i \frac{g_2}{2} T^j W_\mu^j - i \frac{g_1}{2} B_\mu \right) \phi \quad (456)$$

Nach Symmetriebrechung hat man in der unitären Eichung

$$V(\phi) = \mu^2 \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 \quad (457)$$

So ist die Higgs-Masse:

$$m_\eta = \sqrt{2} \mu = 125 \text{ GeV}, \quad (458)$$

sie ist eine der freien Parameter des Standardmodells, die nur schwer aus der Phenomenologie eingeschätzt werden konnte. Der Grundzustandswert v ist eng mit der Fermische Kopplungskonstante verbunden, und so ist:

$$v = 246 \text{ GeV} \quad (459)$$

So entstehen unterschiedliche Wechselwirkungen:

$$\mathcal{L}_{CC} = \left(\frac{g_2}{2} J_\mu^1 W^{1\mu} + \frac{g_2}{2} J_\mu^2 W^{2\mu} \right) = \frac{g_2}{\sqrt{8}} (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) \quad (460)$$

Wenn es nur u und d Quarks gibt (eine Familie):

$$\begin{aligned} J_\mu^+ &= J_\mu^1 + iJ_\mu^2 = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L + \bar{u}_L \gamma_\mu d_L \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e + \frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) d \end{aligned} \quad (461)$$

Effektiv entsteht dadurch

$$\mathcal{L}_{CC}^{\text{eff}} = -\frac{-g_2^2}{8M_W^2} J_\mu^+ J^{+\mu}. \quad (462)$$

M_W hängt vom Vakuumerwartungswert v (Grundzustand) des Higgsfeldes ab:

$$v = 2^{-1/4} G_F^{-1/2} = 246 \text{ GeV} \quad (463)$$

Aus den anderen Komponenten der Eichfelder kommt auch ein neutraler Strom:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{NC} &= \frac{g_2^2}{2} J_\mu^3 W^{3\mu} + \frac{1}{2} g_1 J_\mu^Y B^\mu \\
 &= \frac{g_2^2}{2} J_\mu^3 (\cos \theta_W Z^\mu + \sin \theta_W A_{\text{photon}}^\mu) \\
 &\quad + \tan \theta_W \frac{g_2^2}{2} (J_\mu^{\text{em}} - J_\mu^3) (\cos \theta_W A_{\text{photon}}^\mu - \sin \theta_W Z^\mu) \quad (464)
 \end{aligned}$$

So für nach physikalischen Eichfeldern zerlegt:

$$\mathcal{L}_{NC} = e J_\mu^{\text{em}} A_{\text{photon}}^\mu + \frac{g_2}{2 \cos \theta_W} J_\mu^0 Z^\mu \quad (465)$$

$$e = \frac{g_2}{2} \sin \theta_W \quad (466)$$

$$J^0 = J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W J_\mu^{\text{em}} \quad (467)$$

$$J_\mu^0 = \frac{1}{2} \sum_{f, \nu} \left[g_L^f \bar{\psi}_L^f \gamma_\mu \psi_L^f + g_R^f \bar{\psi}_R^f \gamma_\mu \psi_R^f \right] \quad (468)$$

$$g_L^\nu = \frac{1}{2} \quad g_R^\nu = 0 \quad (469)$$

$$g_L^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \quad g_R^e = \sin^2 \theta_W \quad (470)$$

$$g_L^u = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \quad g_R^u = -\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \quad (471)$$

$$g_L^d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \quad g_R^d = \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \quad (472)$$

Die kinetischen Terme der Fermionenfelder sind mit den kovarianten Ableitungen erledigt, ihrer Masse jedoch noch nicht.

Eine Dirac-Masse hätte die Form:

$$\mathcal{L}_{Dirac-Masse} = -\Psi_L^+ m \Psi_R - \Psi_R^+ m \Psi_L \quad (473)$$

Die rechts- und linkshändigen sind aber in unterschiedlichen SU(2) Darstellung. Ein solcher Massenterm würde wohl die SU(2) Eichsymmetrie verletzen. →

Masse durch Higgs-Mechanismus.

$$\mathcal{L}_4 = f^{(e)} \ell_L^+ \phi e_R + f^{(u)} q_L^+ \tilde{\phi} u_R + f^{(d)} q_L^+ \phi d_R + h.c. \quad (474)$$

Hier ϕ ist das Higgs-Feld mit zwei komplexen Komponenten. Das konjugierte Feld $\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^*$ hat die gleiche Eichtransformationseigenschaft wie Φ :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}' &= i\tau_2 \left(e^{-\frac{i}{2}\alpha^a \tau^a} \phi \right)^* = i\tau_2 e^{+\frac{i}{2}\alpha^a (\tau^a)^*} \phi^* = i\tau_2 e^{+\frac{i}{2}\alpha^a (\tau^a)^*} \tau_2 \tau_2 \phi^* \\ &= i e^{+\frac{i}{2}\alpha^a (-\tau^a)} \tau_2 \phi^* = e^{-\frac{i}{2}\alpha^a \tau^a} i\tau_2 \phi^* = e^{-\frac{i}{2}\alpha^a \tau^a} \tilde{\phi} \end{aligned} \quad (475)$$

Wenn es zu einer spontane Symmetriebrechung kommt, dürfen wir (nach einer transformation in die unitäre Eichung)

$$\mathcal{L}_4 = f^{(e)} \ell_L^+ \phi e_R + f^{(u)} q_L^+ \tilde{\phi} u_R + f^{(d)} q_L^+ \phi d_R + h.c. \quad (476)$$

so umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} \left[f^{(e)} e_L^+ e_R + f^{(u)} u_L^+ u_R + f^{(d)} d_L^+ d_R \right] \\ & + \frac{v}{\sqrt{2}} \left[f^{(e)} e_L^+ e_R + f^{(u)} u_L^+ u_R + f^{(d)} d_L^+ d_R \right] + h.c. \end{aligned} \quad (477)$$

Die Terme proportional zu v nehmen die Form der Dirac-Masse, und so

$$m_e = f^{(e)} v / \sqrt{2} \quad (478)$$

$$m_u = f^{(u)} v / \sqrt{2} \quad (479)$$

$$m_d = f^{(d)} v / \sqrt{2} \quad (480)$$

Die Massen sind durch die Kopplungskonstanten zum Higgs-Feld festgelegt.

Das Top Quark ist mit seinem weit größten Masse am stärksten zum Higgs gekoppelt.

Wenn es mehrere Familien gibt, müssen wir uns auch für die $s \rightarrow u$ Prozesse kümmern.

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}, \bar{c})_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (481)$$

Mit drei Familien vervielfachen die Möglichkeiten zur Mischung.

\mathcal{L}_{CC} stammt aus den kovarianten Ableitungen. Eine solchartige Mischung kann aber aus kovarianten Ableitungen unabhängiger Familien nicht kommen.

Wir lassen für diese Mischung die Higgs-Kopplungen verantworten.

Ein A Index läuft über die drei Familien:

$$\begin{aligned} e &\rightarrow e_A = (e, \mu, \tau) \\ \nu_e &\rightarrow \nu_A = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau) \\ u &\rightarrow p_A = (u, c, t) \\ d &\rightarrow n_A = (d, s, b) \end{aligned} \quad (482)$$

Die linkshändigen Leptonen und Quarks formen nach wie vor Doublets:

$$\ell_{AL} = \begin{pmatrix} \nu_A \\ e_A \end{pmatrix}_L \quad q_{AL} = \begin{pmatrix} u_A \\ d_A \end{pmatrix}_L \quad (483)$$

Die Verallgemeinerung der kovarianten Ableitungen läuft unter der Annahme, daß alle drei Familien unabhängig und gleichwertig seien.

Interessant wird es mit den Higgs-Kopplungen:

$$\mathcal{L}_4 = f_{AB}^{(e)} \ell_{AL}^+ \phi e_{BR} + f_{AB}^{(p)} q_{AL}^+ \tilde{\phi} p_{BR} + f_{AB}^{(n)} q_{AL}^+ \phi n_{BR} + h.c. \quad (484)$$

Nach Symmetriebrechung in unitärer Eichung:

$$\mathcal{L}_4 = \frac{\eta(x) + v}{\sqrt{2}} \left[f_{AB}^{(e)} e_{AL}^+ e_{BR} + f_{AB}^{(p)} p_{AL}^+ p_{BR} + f_{AB}^{(n)} n_{AL}^+ n_{BR} \right] + h.c. \quad (485)$$

Hier haben wir ganz generisch erlaubt, dass die Kopplungskonstanen zum Higgs beliebige Matrizen werden.

So gibt es Massen-Matrizen

$$M_{AB}^{(i)} = \frac{-v}{\sqrt{2}} f_{AB}^{(i)} \quad i = e, p, n \quad (486)$$

Eine beliebige 3×3 Matrix M kann mit zwei unitären Matrizen diagonalisiert werden

$$S^+ M T = M_d, \quad (487)$$

mit positiven Eigenwerten:

$$M_d = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{pmatrix} \quad (488)$$

Und so können wir den Massenterm mit den Masseneigenzustände $\psi_L = S\psi'_L$ und $\psi_R = T\psi'_R$ in diagonale Form bringen:

$$\psi_L^+ M \psi_R = (\psi_L^+ S)(S^+ M T)(T^+ \psi_R) = \psi_L'^+ M_d \psi_R' \quad (489)$$

S und T drehen ausschliesslich im dreidimensionalen Familienraum.

Der geladene Strom der schwachen Wechselwirkung ist noch mit den ursprünglichen Fermionfelder definiert:

$$J_{q\mu}^+ = q_{AL}^+ \sigma_\mu \tau^+ q_{AL} = p_{AL}^+ \sigma_\mu n_{AL} \quad (490)$$

Wir stigen auf die Masseneigenzustände $p_L = S_{(p)} p'_L$ und $n_L = S_{(n)} n'_L$ um

$$J_{q\mu}^+ = p_{AL}^+ \sigma_\mu [S_{(p)}^+ S_{(n)}]_{AB} n_{BL} \quad (491)$$

Oder mit der unitären Kombination $U = S_{(p)}^+ S_{(n)}$:

$$J_{q\mu}^+ = p_{AL}^+ \sigma_\mu U_{AB} n_{BL} \quad (492)$$

So entsteht eine Unitäre Matrix, die der schwachen Wechselwirkung ermöglicht zwischen Familien zu mischen. Der Cabibbo-Winkel ist ein Parameter in dieser U Matrix. Wenn es nur zwei Familien gäbe, würde man U so Parametrisieren:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \quad (493)$$

Die Mischung zwischen den Familien

$$J_{q\mu}^+ = p'_{AL}{}^+ \sigma_\mu U_{AB} n_{BL} \quad (494)$$

entstand durch die verallgemeinerung der Higgskopplung zu den Fermionen. Mit drei Familien wird die 3×3 U Matrix von drei reellen Winkel plus sechs komplexen Phasen beschrieben. Fünf von diesen Phasen können durch die Umdefinierung einzelnen Fermionen wegtransformiert werden. Eine Phase bleibt jedoch übrig. Wird oft so Parametrisiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix. Die phase δ ist für die CP-Verletzung verantwortlich, diese gäbe es in einer Welt mit zwei Familien nicht.

Eine ähnliche Mischung bei den Leptonen ist erst dann möglich, wenn die Neutrinos eine nicht-degenerierte Masse haben. Im Standardmodell sind sie Masselos.

Die Lagrange-Funktion lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}\text{tr}(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}) && \text{(U(1), SU(2) and SU(3) gauge terms)} \\
 & +(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\tilde{\sigma}^\mu iD_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R\sigma^\mu iD_\mu e_R + \bar{\nu}_R\sigma^\mu iD_\mu \nu_R + (\text{h.c.}) && \text{(lepton dynamical term)} \\
 & -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\phi M^e e_R + \bar{e}_R\bar{M}^e\bar{\phi} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] && \text{(electron, muon, tauon mass term)} \\
 & -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[(-\bar{e}_L, \bar{\nu}_L)\phi^* M^\nu \nu_R + \bar{\nu}_R\bar{M}^\nu\phi^T \begin{pmatrix} -e_L \\ \nu_L \end{pmatrix} \right] && \text{(neutrino mass term)} \\
 & +(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\tilde{\sigma}^\mu iD_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{u}_R\sigma^\mu iD_\mu u_R + \bar{d}_R\sigma^\mu iD_\mu d_R + (\text{h.c.}) && \text{(quark dynamical term)} \\
 & -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\phi M^d d_R + \bar{d}_R\bar{M}^d\bar{\phi} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right] && \text{(down, strange, bottom mass term)} \\
 & -\frac{\sqrt{2}}{v} \left[(-\bar{d}_L, \bar{u}_L)\phi^* M^u u_R + \bar{u}_R\bar{M}^u\phi^T \begin{pmatrix} -d_L \\ u_L \end{pmatrix} \right] && \text{(up, charmed, top mass term)} \\
 & +(\overline{D_\mu\phi})D^\mu\phi - m_h^2[\bar{\phi}\phi - v^2/2]^2/2v^2. && \text{(Higgs dynamical and mass term)}
 \end{aligned}$$

Sofern hatten wir immer klassische Felder, die einfach Funktionen des Ortes und der Zeit waren.

In der Quantenmechanik wird für die Koordinaten eines Massenpunktes Operatoren eingeführt:

$$x_i \rightarrow \hat{x}_i, \quad i = 1 \dots 3 \quad (495)$$

und genauso für deinen Impuls:

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i, \quad i = 1 \dots 3 \quad (496)$$

Operatoren sind als unendliche Matrizen in einem abstrakten Hilbertraum vorzustellen. Wie bei Matrizen üblich, die vertauschen untereinander nicht unbedingt:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad (497)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (498)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = \frac{\hbar}{i} \delta_{ij} \quad (499)$$

In einer Feldtheorie werden entsprechend auf die kanonischen Koordinaten und Impuls zurückgegriffen. Bei einem Skalarfeld:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 \quad (500)$$

wird der kanonische Impuls Π als

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \Phi} \quad (501)$$

definiert, im aktuellen Fall:

$$\Pi(x, t) = \partial^0 \Phi = \frac{d\Phi(x, t)}{dt} \quad (502)$$

Dieser Impuls vertauscht mit allen Operatoren bis auf dem Koordinaten (Feldwert) am gleichen Ortspunkt.

$$[\hat{\Phi}_i(\vec{x}, t), \hat{\Phi}_j(\vec{y}, t)] = 0 \quad (503)$$

$$[\hat{\Pi}_i(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_j(\vec{y}, t)] = 0 \quad (504)$$

$$[\hat{\Pi}_i(\vec{x}, t), \hat{\Phi}_j(\vec{y}, t)] = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (505)$$

Eine Besondere rolle wird vom Hamiltonoperator gespielt, da dieser die Zeitentwicklung bestimmt:

$$\begin{aligned}\partial_0 \hat{\Phi}(\vec{x}, t) &= i[\hat{H}, \hat{\Phi}(\vec{x}, t)] \\ \partial_0 \hat{\Pi}(\vec{x}, t) &= i[\hat{H}, \hat{\Pi}(\vec{x}, t)].\end{aligned}\quad (506)$$

Der Hamiltonoperator wird aus der Hamiltonfunktion hergeleitet:

$$H(\Phi, \Pi) = \int d^3x [\Pi \partial_0 \Phi - \mathcal{L}(\Phi, \Pi)] \quad (507)$$

$$\hat{H} = H(\hat{\Phi}, \hat{\Pi}) = \int d^3x \frac{1}{2} \left[\Pi^2(\vec{x}, t) + (\nabla \Phi(\vec{x}, t))^2 + m^2 \Phi^2(\vec{x}, t) \right] \quad (508)$$

Die Bewegungsgleichungen in diesem Fall sind einfach

$$\begin{aligned}\partial_0 \hat{\Phi}(\vec{x}, t) &= \hat{\Pi}(\vec{x}, t) \\ \partial_0 \hat{\Pi}(\vec{x}, t) &= \Delta \hat{\Phi}(\vec{x}, t) - m^2 \hat{\Phi}(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (509)$$

d.h, die Kleing-Gordon-Gleichung ist auch auf Operatorniveau erfüllt:

$$(\partial^2 + m^2) \hat{\Phi}(\vec{x}, t) = 0 \quad (510)$$

dies gilt auch bei kompliziertere Potenzialen (z.B. $\lambda \Phi^4$).

Der Hamiltonoperator des freien Feldes kann im Fourierraum als eine Ensemble von infinitesimaler Oszillatoren betrachtet werden.

Genauso wie in der Quantenmechanik wird hier auch alle Oszillatorenvariablen mithilfe von Auf- und Absteigeoperatoren geschrieben,

$$\hat{\Phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + \hat{a}^+(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} \right] \quad (511)$$

Hier verwendeten die Notation $\omega_k = \sqrt{m^2 + |\vec{k}|^2}$. Die Auf- und Absteigeoperatoren selber erfüllen die entsprechenden Vertauschungsregel:

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = 0 \quad (512)$$

$$[\hat{a}^+(k), \hat{a}^+(k')] = 0 \quad (513)$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = \delta(k - k') \quad (514)$$

So wird der Hamiltonoperator für das freie Skalarfeld

$$\hat{H} = \int d^3 k \omega_k \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) \quad (515)$$

Die Fouriermoden sind in der tat entkoppelt, zu allen (räumlichen) Impulsen gehört jetzt ein Oszillator, dessen Energieniveaus quantisiert sind.

Wie sollen wir uns aber den Hilbertraum vorstellen, wo diese Operatoren tätig sind, und was sind die Zustände?

Bei einem harmonischen Oszillator in der Quantenmechanik die Wellenfunktion ist ein Vektor im Hilbertraum. Grundzustand (mit $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$)

Der Hilbertraum wird vom Grundzustand $|0\rangle$ aus mithilfe des Aufsteigeoperators aufgebaut. Der zu $E_n = \hbar\omega(\frac{1}{2} + n)$ gehörende Energieeigenzustand:

$$|1\rangle = \hat{a}^+|0\rangle \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle \quad (516)$$

Jetzt genau so können wir ein Einteilchenzustand aus dem Vakuum ($|0\rangle$) erzeugen:

$$|\vec{k}\rangle = [(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2} a^+(\vec{k})|0\rangle \quad (517)$$

Der gesamte Raum dessen Basis die von Null, Ein-, Zwei-, usw. Teilchenzustände sind ist der Fock-Raum.

Teilchen sind die erste angeregte Zustände der harmonischen Oszillatoren im Konfigurationsraum des Teilchenfeldes.

Es können auch viele Teilchen im gleichen Zustand existieren (Bose-Einstein Condensate), die entsprechen einem höheren Zustand eines der Oszillatoren.

Fermionen unterliegen dem Pauli-Prinzip, d.h. Fermionen dürfen nicht im gleichen Zustand existieren. Im verallgemeinerten Sinne: die Wellenfunktion eines Systems mit mehreren Fermionen muss antisymmetrisch sein zum Vertauschen zwei fermionischen Freiheitsgrades.

Aus der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (518)$$

können wir den kanonischen Impuls gleich bestimmen:

$$\pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \psi(x)} = i\psi^+(x) \quad (519)$$

Nun, für das antisymmetrische Verhalten wird durch die Postulierung von antikommutationsregel gesorgt.

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{y}, t)\} &= 0 \\ \{\psi^+(\vec{x}, t), \bar{\psi}^+(\vec{y}, t)\} &= 0 \\ \{\psi(\vec{x}, t), \bar{\psi}^+(\vec{y}, t)\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (520)$$

Im klassischen Limit $\{\psi(\vec{x}, t), \bar{\psi}^+(\vec{y}, t)\} = 0$, also alle Spinorfelder sind antikommutierend. Keine gewöhnliche Zahlen: Grassmann variabeln

Analog zu den Bosonen werden beim Fermionfeld die Auf- und Absteigeoperatoren verwendet:

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3 p}{[(2\pi)^3 2\omega_p]^{1/2}} \left[u_s(\vec{k}) \hat{a}_s(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + v_s(\vec{k}) \hat{b}_s^+(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} \right] \quad (521)$$

$$\hat{\bar{\psi}} = \int \frac{d^3 p}{[(2\pi)^3 2\omega_p]^{1/2}} \left[\bar{v}_s(\vec{k}) \hat{b}_s(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + \bar{u}_s(\vec{k}) \hat{a}_s^+(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} \right] \quad (522)$$

$$\{\hat{a}_i(\vec{p}), \hat{a}_j^+(\vec{q})\} = \{\hat{b}_i(\vec{p}), \hat{b}_j^+(\vec{q})\} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ij} \quad (523)$$

$$\{\hat{a}_i(\vec{p}), \hat{a}_j(\vec{q})\} = \{\hat{b}_i(\vec{p}), \hat{b}_j(\vec{q})\} = 0 \quad (524)$$

$$\{\hat{a}_i^+(\vec{p}), \hat{a}_j^+(\vec{q})\} = \{\hat{b}_i^+(\vec{p}), \hat{b}_j^+(\vec{q})\} = 0 \quad (525)$$

$$\{\hat{a}_i(\vec{p}), \hat{b}_j(\vec{q})\} = \{\hat{a}_i(\vec{p}), \hat{b}_j^+(\vec{q})\} = 0 \quad (526)$$

Man kann zeigen, dass der Hamiltonoperator die folgenden Integralform nimmt:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(\hat{a}_s^+(\vec{p}) \hat{a}_s(\vec{p}) + \hat{b}_s^+(\vec{p}) \hat{b}_s(\vec{p}) \right) \quad (527)$$

Wegen den antikommutationsregeln gilt auch

$$[\hat{a}^+(\vec{p})]^2 = [\hat{a}(\vec{p})]^2 = 0 \quad (528)$$

$$[\hat{b}^+(\vec{p})]^2 = [\hat{b}(\vec{p})]^2 = 0 \quad (529)$$

Im Fock-Raum ist $|0\rangle$ weiterhin der Grundzustand.

$$\begin{array}{ll}
 a_s^+(\vec{p})|0\rangle & \text{Einteilchenzustand} \\
 [a_s^+(\vec{p})]^2|0\rangle = 0 & \text{Es gibt keinen Zweiteilchenzustand mit gleicher } \vec{p} \text{ und } s \\
 a_{s_1}^+(\vec{p}_1)a_{s_2}^+(\vec{p}_2)|0\rangle & \text{Zwei Teilchen in zwei unterschiedlichen Zuständen} \\
 b_s^+(\vec{p})|0\rangle & \text{Ein Antiteilchen} \\
 a_{s_1}^+(\vec{p}_1)b_{s_2}^+(\vec{p}_2)|0\rangle & \text{Teilchen und Antiteilchen}
 \end{array} \quad (530)$$

Der Fockraum für Fermionen hat Quantenzahlen 0 und 1 (für beide Spinkomponente) für jeden möglichen Impuls und Spin. Für jeden klassischen Freiheitsgrad liegt statt ein Oszillator ein Zweizustandssystem vor.

Es sind zwei wichtige Einzelreaktionen die in Quantenfeldtheorie einfach berechnet werden können:

- $1 \rightarrow n$ Zerfall: ein Teilchen emittiert n Zerfallsprodukte
- $2 \rightarrow n$ Streuung: nach dem Zusammenstoß von zwei Teilchen entstehen n Teilchen.

In beiden Fällen kommt ein Übergang zwischen zwei Zustände im Fockraum zustande.

In der Quantenmechanik wird die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Übergang in der Störungstheorie berechnet. Die graphische Darstellung dieses Rechengvorgangs bieten die Feynman-Diagramme: die Anzahl der Vertices bestimmt die Ordnung der Störung.

Durch Feynman-Diagram wird eine Amplitude berechnet:

$ i\rangle$	Ausgangszustand	
$ f\rangle$	Endzustand	
$T_{fi} = \langle f e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} H dt} i \rangle$	Übergangsamplitude	(531)
$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) M_{fi}$	Impulserhaltung faktorisiert	(532)

Die Wahrscheinlichkeit eines Prozesses wird durch den Betrag-Quadrat der Wellenfunktion gegeben. Die Übergangsamplitude gibt die Veränderung der Wellenfunktion an, daher muss diese jetzt Quadriert werden:

$$\bar{w}_{fi} = |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(\delta_f - \delta_i) (2\pi)^4 \delta^4(0) |M|^2 \quad (533)$$

Das Produkt von zwei δ -Funktionen sind problematisch. In einem endlichen Raumzeit findet man

$$(2\pi)^4 \delta^4(0) = VT, \quad (534)$$

wo V das Volumen ist, und T ist der zeitliche Umfang des Experiments. Zusätzlich muss man berücksichtigen, dass es viele mögliche Endzustände gibt, die jeweils einen infinitesimalen Anteil im Phasenraum haben. Das Phasenvolumen mit n Teilchen im Endzustand:

$$d\bar{\Phi} = \prod_{l=1}^n \frac{d\vec{k}_l V}{(2\pi)^3} \quad (535)$$

Anzahl der Teilchen wird so normiert, dass in einem Einheitsvolumen $2\omega_k$ Teilchen befinden. Mit zwei Teilchen im Anfangszustand mit dem Impuls (\vec{p}_1 und \vec{p}_2):

$$N = \prod_{l=1}^n (2\omega_{k_l} V) \prod_{i=1}^2 (2\omega_{p_i} V) \quad (536)$$

So ist die Übergangswahrscheinlichkeit bezüglich auf einer infinitesimalen Zelle im Phasenraum des Endzustandes:

$$dw_{fi} = \frac{\bar{w}_{fi}}{T} \frac{d\bar{\Phi}}{N} = \frac{V|M|^2}{\prod_{i=1}^k (2E_i V)} d\Phi \quad (537)$$

mit

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{l=1}^n \frac{d\vec{k}_l}{(2\pi)^3 2E_l} \quad (538)$$

Im Spezialfall $n = 1$ wird ein Zerfall eines Teilchens (mit Energie E_a) beschrieben, dieser wird durch eine Zerfallsrate angegeben. Für einen bestimmten Endzustand:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_a} |M|^2 d\Phi \quad (539)$$

Um die inverse Lebensdauer zu berechnen muss auf den möglichen Endzustände integriert werden:

$$\Gamma = \int d\Gamma \quad (540)$$

Dabei müssen auf alle Spinpolarisationen im Endzustand summiert werden. Ist die Spinpolarisation des Ausgangszustandes unbekannt, wird darüber gemittelt.

Gibt es zwei Teilchen im Anfangszustand, so wird ein Wirkungsquerschnitt angegeben (σ). Ein Teilchen a soll in Labframe fest sitzen und wird dabei mit einem Teilchenbeam b bombardiert. Die Flussdichte:

$$j = \frac{v_b}{V} \quad (541)$$

Der infinitesimale Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{dw_{fi}}{j} = \frac{1}{2m_a 2E_b v_b} |M|^2 d\Phi \quad (542)$$

Man kann die Formel zu allen Bezugssystemen Verallgemeinern:

$$d\sigma = \frac{dw_{fi}}{j} = \frac{1}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} |M|^2 d\Phi \quad (543)$$

Der differentiale Wirkungsquerschnitt erhält man durch einer Integration auf dem Phasenraum der Endzustände, wobei über die Raumrichtung der Sekundärstrahlung noch nicht integriert wird. Wird auch noch nach diese Winkelkoordinaten integriert, erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (544)$$

Als Beispiel betrachten wir den Zerfallsvorgang:

$$\mu^{-}(p) \rightarrow e^{-}(k) + \bar{\nu}_e(q_1)\nu_\mu(q_2) \quad (545)$$

Zur niedrigsten Ordnung der Störungstheorie kommt ein einziger Vertex aus der Vierfermionenwirkung:

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \mu \bar{e} \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) \nu_e \quad (546)$$

Durch eine Fierz-Transformation kann man diesen Ausdruck umordnen:

$$M = -\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \mu \bar{\nu}_\mu \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \nu_e \quad (547)$$

Wir brauchen auch die Adjungierte:

$$M^+ = -\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \nu_\mu \bar{\mu} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) e \quad (548)$$

So haben wir

$$|M|^2 = -\frac{G^2}{2} \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \mu \bar{\mu} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) e \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e \bar{\nu}_e \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \nu_\mu \quad (549)$$

Die Felder wie ψ und $\bar{\psi}$ sind jetzt nebeneinander:

$$|M|^2 = -\frac{G^2}{2} \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \mu \bar{\mu} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) e \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \nu_e \bar{\nu}_e \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \nu_\mu \quad (550)$$

Wenn auf die Spinpolarisationen summiert wird, verwenden dir die Eigenschaft der u -Lösungen der Dirac-Gleichung:

$$\sum_s u(s, p) \bar{u}(s, p) = \not{p} + m \quad (551)$$

Wenn wir die Summierung für alle vier Fermionen durchführen:

$$\overline{|M|^2} = -4G^2 \text{Tr} \not{q}^2 \not{k} \gamma_\beta \not{p} \not{q}_1 \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \quad (552)$$

Jetzt kommen weitere Eigenschaften der γ -Matrizen zum Einsatz, wie z.B

$$\gamma^\alpha \not{A} \not{B} \not{C} \gamma_\alpha = -2\not{A} \not{B} \not{C}, \quad \gamma^\alpha \not{A} \not{B} \gamma_\alpha = 4\not{A} \not{B} \quad (553)$$

und so können wir $|M|^2$ umschreiben:

$$\overline{|M|^2} = 128G^2 (pq_1)(kq_2) \quad (554)$$

Jetzt wollen wir den Zerfallsrate anhand

$$d\Gamma = \frac{|M|^2}{2 \cdot 2m} d\Phi \quad (555)$$

Ein Faktor 2 im Nenner kam extra zu: beim Anfangszustand soll man die Spinpolarisationen nicht summieren, sondern mitteln.

Das Elektron soll mit einer Energie E rausfliegen. Das Phasenraumvolumen:

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - q_1 - q_2) \frac{d\vec{k}}{2E(2\pi)^3} \frac{d\vec{q}_1}{2\omega_1(2\pi)^3} \frac{d\vec{q}_2}{2\omega_2(2\pi)^3} \quad (556)$$

Zuerst wird über die Neutrino-Impulse (q_1, q_2) integriert:

$$I_{\alpha\beta} = \int q_{1\alpha} q_{2\beta} \frac{d\vec{q}_1}{\omega_1} \frac{d\vec{q}_2}{\omega_2} \delta^4(q_1 + q_2 - q) \quad (557)$$

mit $q = p - k$. Klar, $I_{\alpha\beta}$ ist ein Lorentz-Tensor, der von keinem anderen Lorentz-Vektor abhängen darf als q . So ist die Indexstruktur vorgegeben:

$$I_{\alpha\beta} = A(q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) + B(q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta), \quad (558)$$

A und B sind Skalare. Nach kurzem Rechnen bekommt man

$$A = \pi/6 \quad B = 0 \quad (559)$$

Das Ergebnis nach Integrieren über den Neutrinozustände:

$$d\Gamma = \frac{G^2}{48\pi^4 m} \left[q^2(pk) + 2(qp)(qk) \right] \frac{dk}{E} \quad (560)$$

Nun ist die Elektronenmasse sehr klein im Vergleich zu der Myonmasse so ist das Elektron Ultrarelativistisch:

$$qk = (p-k, k) \approx pk = mE, \quad q^2 = (p-k)^2 \approx p^2 - 2pk = m^2 - 2mE \quad (561)$$

Wenn wir über die Richtung des Elektrons integrieren gilt es

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{G^2}{12\pi^2 m} (pk)(p^2 - 2pk + 2p^2 - 2pk) E dE \\ &= \frac{G^2}{12\pi^3} (3m^2 - 4mE) E^2 dE \end{aligned} \quad (562)$$

Wird noch über die Energie des Elektrons integriert, erhält man die volle Zerfallsrate:

$$\Gamma = \frac{G^2 m^5}{192\pi^3} \quad (563)$$

Mit $m = 0.105 \text{ GeV}$ und $G = 1.17 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, ist $\Gamma = 0.00069 \text{ GeV} \Rightarrow \Gamma^{-1} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$